MATEMÁTICA APLICADA.
ESTUDIO Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Edgar Patricio Mejía Zamora

Luis Tarquino Vinueza Rodríguez

Andrés Marcelo Salinas Copo

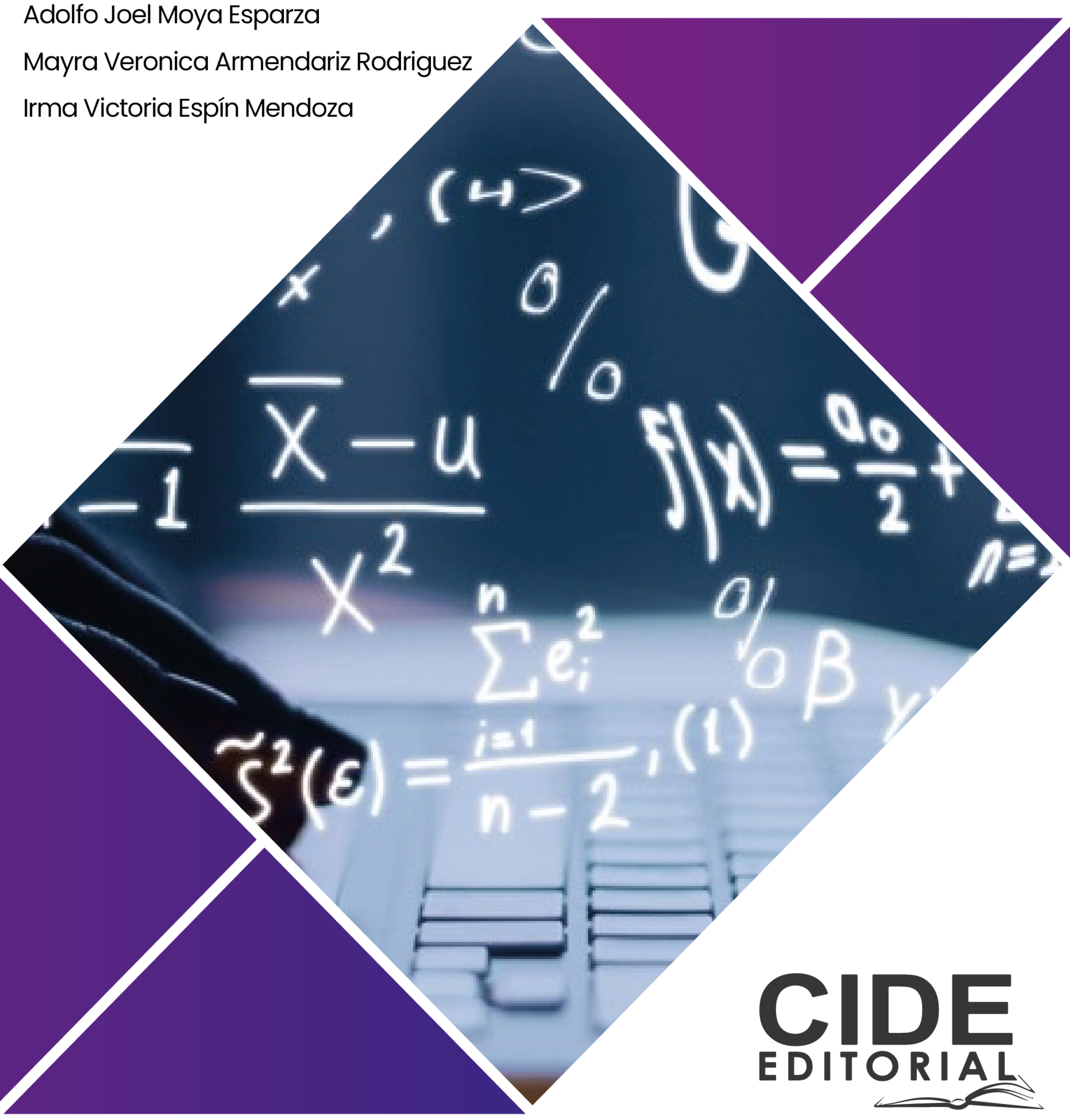
Iván Gonzalo Grandes Hidalgo

Hugo Mateo Escobar Ribadeniera

Adolfo Joel Moya Esparza

Mayra Veronica Armendariz Rodriguez

Irma Victoria Espín Mendoza



CIDE EDITORIAL

MATEMÁTICA APLICADA.
ESTUDIO Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

MATEMÁTICA APLICADA.
ESTUDIO Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Autores

Edgar Patricio Mejía Zamora
Luis Tarquino Vinueza Rodríguez
Andrés Marcelo Salinas Copo
Iván Gonzalo Grandes Hidalgo
Hugo Mateo Escobar Ribadeniera
Adolfo Joel Moya Esparza
Mayra Veronica Armendariz Rodriguez
Irma Victoria Espín Mendoza

Matemática aplicada. Estudio y resolución de problemas

Centro de Investigación y Desarrollo Ecuador
Tel.: + (593) 04 2037524
http.:/www.cidecuador.org

ISBN: 978-9942-679-45-1

doi.org/10.33996/cide.ecuador.MA2679451

Dirección editorial: Lic. Pedro Misacc Naranjo, Msc.
Coordinación técnica: Lic. María J. Delgado
Diseño gráfico: Lic. Danissa Colmenares
Diagramación: Lic. Alba Gil
Fecha de publicación: febrero, 2025

Guayaquil – Ecuador

La presente obra fue evaluada por pares académicos experimentados en el área

Catalogación en la Fuente

Matemática aplicada. Estudio y resolución de problemas / Edgar Patricio Mejía Zamora, Luis Tarquino Vinueza Rodríguez, Andrés Marcelo Salinas Copo, Iván Gonzalo Grandes Hidalgo, Hugo Mateo Escobar Ribadeniera, Adolfo Joel Moya Esparza, Mayra Veronica Armendariz Rodriguez y Irma Victoria Espín Mendoza. - Editorial CIDE, 2025.

126 p.: incluye tablas, figuras; 21,6 x 29,7 cm.

ISBN: 978-9942-679-45-1

1. Matemática aplicada

Semblanza de los autores

Edgar Patricio Mejía Zamora

0000-0002-0465-7638
Patricio2963@gmail.com

Profesional con una amplia trayectoria en el ámbito académico y laboral. Es licenciado en Matemática - Física, con una maestría en Matemática Aplicada, títulos que consolidan su formación en el área de Ciencias de la Educación. En el ámbito académico, ha impartido clases en diferentes unidades educativas tanto fiscales como particulares y desde hace 6 años se desempeña como docente en el Instituto Superior Tecnológico Bolívar en diferentes carreras. A lo largo de su carrera, ha sido reconocido por diversos méritos académicos por su puntualidad en su asistencia como en su entrega de documentación.

Luis Tarquino Vinueza Rodríguez

https://orcid.org/0009-0003-1430-8612
fantasma_vinuez@hotmail.com

Profesional con una amplia trayectoria en el ámbito académico y laboral. Ingeniero en Sistemas, actualmente egresado de la maestría en Pedagogía en Entornos Digitales, títulos que consolidan su formación en el área de Ciencias de la Educación. En el ámbito académico, ha impartido clases en institutos superiores y unidades educativas particulares y desde hace 7 años se desempeña como docente en el Instituto Superior Tecnológico Bolívar en diferentes carreras. A lo largo de su carrera, ha sido reconocido por diversos méritos académicos tanto como líder de unidades, por su puntualidad en su asistencia como en su entrega de documentación.

Andrés Marcelo Salinas Copo

0000-0002-0465-7638
amscc1@gmail.com

Profesional con una amplia trayectoria en el ámbito académico y laboral. Es Técnico Mecánico Automotriz, Profesor de Segunda Enseñanza en Informática Licenciado en Informática y Computación, Ingeniero en Sistemas, títulos que consolidan su formación en el área de las Ciencias Computacionales. En el ámbito académico, ha impartido clases en diferentes unidades educativas tanto fiscales como particulares, en la Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE y desde hace 13 años se desempeña como docente en el Instituto Superior Tecnológico Bolívar en diferentes carreras. A lo largo de su carrera, ha sido reconocido por diversos méritos académicos por su puntualidad en su asistencia como en su entrega de documentación.

Iván Gonzalo Grandes Hidalgo

https://orcid.org/0009-0006-0684-3107
ivangrandes@yahoo.com

Iván Grandes es un profesional con una amplia trayectoria en el ámbito académico e informático. Es Ingeniero en Sistemas, con una maestría en Docencia de las Ciencias Informáticas, títulos que consolidan su formación en el área Informática y educativa. En el ámbito académico, ha impartido diversas materias en algunas unidades educativas tales como: El colegio particular de "La Inmaculada", el Centro educativo bilingüe "Horizontes", y por varios años ha desempeñado su labor como docente en asignaturas relacionadas con la Matemática y Computación en la Escuela de Formación de Soldados ESFORSE. Desde hace 3 años se desempeña como docente en el Instituto Superior Tecnológico Bolívar en las diferentes carreras. En el campo profesional siempre ha aportado con sus conocimientos y contingente en el área informática en beneficio de todas las instituciones y empresas que han requerido de su ayuda, así mismo, en el campo educativo ha alcanzado ya 15 años de experiencia docente, capacitando, apoyando y orientando a muchos estudiantes en el aprendizaje sistemático de diferentes asignaturas, así como también en la formación integral de los estudiantes.

Hugo Mateo Escobar Ribadeniera

https://orcid.org/0009-0006-7296-3844
mateo_escobar_r@yahoo.es

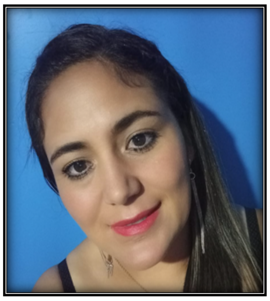
Mateo Escobar es un profesional con una trayectoria laboral en el sector empresarial y académico. Es Economista con una maestría en Finanzas mención en Dirección Financiera, títulos que respaldan su formación en el área económica. Con 6 años de experiencia laboral en el sector empresarial, ha desempeñado funciones como Analista Datos Maestros en Plasticaucho Industrial S.A. adicionalmente tiene 3 años de Docente en el Instituto Superior Tecnológico Bolívar, lo que le ha permitido adquirir conocimientos del sector empresarial y transmitirlos académicamente.

Adolfo Joel Moya Esparza

https://orcid.org/0009-0004-0496-9457
adolfojme@gmail.com

Profesional con una amplia trayectoria en el ámbito académico y laboral. Es Ingeniero en Sistemas, con una maestría en Tecnologías para la Gestión y Práctica Docente, títulos que consolidan su formación en el área de la Educación. En el ámbito académico, ha impartido clases en diferentes unidades educativas tanto fiscales como particulares y desde hace 5 años se desempeña como docente en el Instituto Superior Tecnológico Bolívar en diferentes carreras. A lo largo de su carrera, ha sido reconocido por diversos méritos académicos por su puntualidad en su asistencia como en su entrega de documentación.

Mayra Veronica Armendariz Rodriguez



0009-0005-5308-445X
armendarizmayra@hotmail.com

Es una profesional de la educación con más de ocho años de experiencia en el ámbito docente. Durante seis años, formó parte de la Unidad Educativa Vigotsky, donde contribuyó activamente a la formación de estudiantes con un enfoque innovador y comprometido con la enseñanza inclusiva. Actualmente, desde hace dos años, es parte del equipo de la Unidad Educativa Óscar Efrén Reyes, donde sigue desempeñándose con pasión y compromiso. Uno de sus mayores aportes es su conocimiento en Lengua de Señas, lo que le permite fomentar la inclusión en el aula y brindar oportunidades de aprendizaje equitativas para estudiantes con discapacidad auditiva. Su labor educativa se distingue por su sensibilidad, empatía y dedicación a la formación integral de sus alumnos, promoviendo una educación accesible para todos. Su vocación y preparación la convierten en una docente comprometida con la diversidad y el aprendizaje significativo.

Contenido

Capítulo 1
Ecuaciones lineales

Capítulo 2
Desigualdades

Capítulo 3
Desigualdades

Capítulo 4
Matrices

Capítulo 5
Espacios vectoriales

Introducción

Las matemáticas son fundamentales para el desarrollo intelectual del estudiante les ayuda a ser lógicos, a razonar ordenadamente y a tener una mente preparada para el pensamiento, la crítica y la abstracción.

Las matemáticas configuran actitudes y valores en los alumnos pues garantizan una solidez en sus fundamentos, seguridad en los procedimientos y confianza en los resultados obtenidos. Todo esto crea en los estudiantes una disposición consciente y favorable para emprender acciones que conducen a la solución de los problemas a los que se enfrentan cada día.

El presente trabajo consta de 5 capítulos que son la base para los estudiantes de nivel superior en los institutos superiores:

- En el capítulo 1 se habla de las ecuaciones como tema general. Resuelve necesidades que se presentan en las áreas de administración, y técnicas enfocadas a través de las funciones exponenciales y logarítmicas, permitiendo emitir un juicio de valor.

- En el capítulo 2 Usa propiedades de desigualdades para solucionar inecuaciones.

- En el capítulo 3 Interpreta gráficos y funciones aplicados a problemas empresariales en el área administrativa y técnica.

- En el capítulo 4 Integra información de variables cualitativas y cuantitativas del ámbito económico, financiero y social por medio de matrices que provienen del planteamiento de ecuaciones y sistemas de ellas y viceversa.

- En el capítulo 5 Realiza cálculos de vectores, empleando el álgebra vectorial que permitirán al estudiante fortalecer y adquirir un conocimiento sólido en vectores.

El presente libro está relacionado a los contenidos de los sílabos de matemática aplicada del Instituto Superior Bolívar,por lo que se recomienda su utilización a todos los estudiantes de nivel superior.

Capítulo 1. Ecuaciones

1.1 Ecuaciones lineales
1.2 Ecuaciones con valor absoluto / irracionales / racionales
1.3 Ecuaciones cuadráticas
1.4 Sistemas de ecuaciones

Capítulo 2. Desigualdades e inecuaciones

2.1 Desigualdades lineales
2.2 Desigualdades con valor absoluto
2.3 Inecuaciones cuadráticas
2.4 Sistema de desigualdades

Capítulo 3. Funciones, ecuaciones de la recta

3.1 Tipos de funciones
3.2 Rango y dominio de una función
3.3 Coordenadas rectangulares
3.4 Ecuación de la recta y sus aplicaciones

Capítulo 4. Matrices

4.1 Propiedades y operaciones de las matrices
4.2 Matriz Inversa
4.3 Determinantes de 2x2 y orden superior
4.4.Regla de Cramer

Capítulo 5. Espacio vectorial

5.1 Espacios vectoriales.
5.2 Operaciones básicas con vectores
5.3 Operaciones con espacios vectoriales.

CAPÍTULO 1

Ecuaciones lineales

1

Capítulo

1

Ecuaciones lineales

La primera etapa abarca el periodo de 1700 a. de C. a 1700 d. de C., Se distinguió por el progresivo dominio de los símbolos y la habilidad para resolver ecuaciones de manera efectiva. Aquí encontramos un álgebra desarrollada por los griegos (300 a. de C.), que se llama álgebra geométrica, y cuenta con algunos métodos geométricos para la resolución ecuaciones algebraicas.

La introducción de la notación simbólica asociada a Viète (1540-1603), marca el inicio de una nueva etapa en la cual Descartes (1596-1650) contribuye significativamente al desarrollo de notación mencionada. En este momento, el álgebra se convierte en la ciencia de los cálculos y ecuaciones simbólicas. Posteriormente, Euler (1707-1783) la definió más tarde como la teoría de los "cálculos con cantidades de distintas clases" (cálculos con números racionales enteros, fracciones ordinarias, raíces cuadradas y cúbicas, progresiones y todo tipo de ecuaciones).

El proceso actual de resolución de la ecuación $ax + b = c$ tenía más de 3.000 años.

Los egipcios nos dejaron en sus papiros (sobre todo en el de Rhind -1.650 a. de C- y el de Moscú -1.850 a, de C) se resolvieron numerosos problemas matemáticos. La mayoría de ellos son aritméticos y corresponden a determinadas situaciones concretas de la vida diaria; sin embargo, encontramos algunos que podemos clasificar como algebraicos, porque no hacen referencia a ningún objeto en particular. En ellos, retóricamente, obtenían la solución realizando operaciones sobre los datos de la misma manera como hoy resolvemos estas ecuaciones hoy en día.

Las ecuaciones más utilizadas por los egipcios eran de la forma:

$x + ax = b$
$x + ax + bx = c$

Una ecuación con una incógnita se llama lineal o de primer grado cuando la incógnita aparece solo elevada a la potencia 1 y no está presente en otras potencias o en denominadores, si el grado más alto en el que ocurre la incógnita es el primero. Entonces $a x + b = 0$ con a y b $\in \Re$ y $x \neq 0$ es una ecuación lineal

Ejemplo: $4x + 2 = 0$ es una ecuación lineal

Solución numérica

Resolver la ecuación: $3x + 1 = x - 2$

Resuelve la ecuación: encuentra el valor de x que, al ser sustituido en la ecuación y realizar las operaciones indicadas, se llegue a que la igualdad es cierta.

En el ejemplo podemos probar con valores:

$x = 1$, llegaríamos a $5 = -2$, luego no es cierto,
$x = -1$ llegaríamos a $-2 = -3$, tampoco.

Resolver entonces para hallar el valor de x buscado:

Numéricamente, como seguramente sabrás, se resuelve "despejando" la x, o sea ir pasando términos de un miembro a otro hasta conseguir: x =. número. Así:

$3x - x = -1 - 2;$
$2x = - 3;$
$x = -3/2$ ó $x = -1,5$.

Efectivamente: 3(-1,5) + 1 = -1,5 -2; -4,5 + 1 = -3,5.

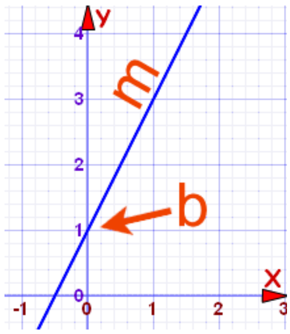
En este caso, la ecuación tiene solución.

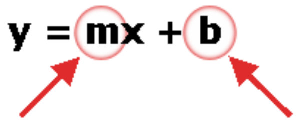
Sistemas de Ecuaciones de Primer Grado

La ecuación GENERAL de una línea recta tiene la forma:

$y = mx + b$

¿Qué significa?





Gradiente Intersección Y

y = cuánto arriba

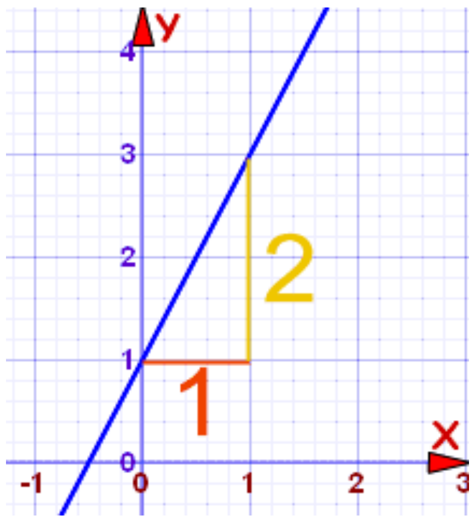
x = cuán lejos

m = gradiente o pendiente (cuán inclinada es la línea)

b = la intersección Y (donde la línea se cruza con el eje Y)

Sabiendo esto podemos encontrar la ecuación de una línea recta:

Ejemplo 1

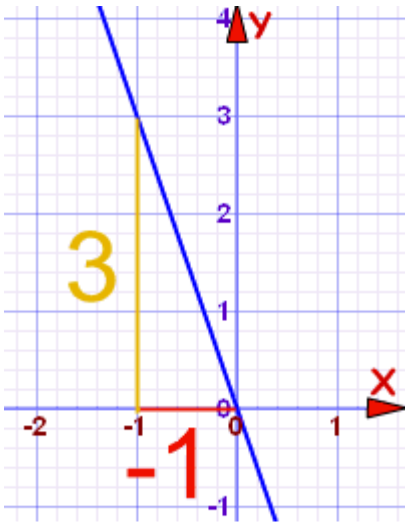


$$m = \frac{2}{1} = 2$$

b = 1

Por lo tanto y = 2x + 1

Ejemplo 2



$m = \frac{3}{-1} = -3$

b = 0

Esto nos da y = –3x + 0

¡No nos hace falta poner el cero!

Por lo tanto y = –3x

1.1. Ecuaciones con valor absoluto / irracionales / racionales

El valor absoluto o módulo de un número real a, denotado como $|a|$, está definido de la siguiente manera:

$$|a| = \begin{cases} -a, & Si\ a < 0 \\ a, & Si\ a \geq 0 \end{cases}$$

En otras palabras, si el número a es positivo o cero, entonces su valor absoluto es simplemente el propio número a. Sin embargo, si a es negativo, su valor absoluto es el opuesto de a, es decir, su negativo

Propiedades del valor absoluto

a. Propiedades fundamentales

$$|a| \geq 0$$
$$|a| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = 0$$
$$|a - b| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = b$$
$$|-a| = |a|$$
$$|a.b| = |a||b|$$
$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|} \quad \forall \quad b \neq 0$$
$$|a|^2 = a^2$$
$$|ax^2 + bx + c| = ax^2 + bx + c \quad \Leftrightarrow \quad b^2 - 4ac < 0$$
$$\sqrt[n]{a^n} = |a| \quad \forall\, n \quad par$$
$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

b. Propiedades para la resolución de ecuaciones

$$|a| = b \quad \Rightarrow \quad [\, b \geq 0 \quad \wedge \quad (a = -b \quad \vee \quad a = b\,)]$$
$$|a| = |b| \quad \Rightarrow \quad a = -b \quad \vee \quad a = b$$

1.1.1 Ecuaciones con valor absoluto

Para resolver ecuaciones con valor absoluto se deben aplicar las propiedades para la resolución de ecuaciones.

Ejemplo: Resolver la siguiente ecuación con valor absoluto $|x^2 + 1| = x + 7$

Aplicamos la propiedad $|a| = b \rightarrow [(a = -b$ Ú $a = b)]$

$\|x^2 + 1\| = x + 7$	U	$\|x^2 + 1\| = x + 7$
$x^2 - 1 = x + 5$	U	$x^2 - 1 = -(x + 5)$
$x^2 - x - 6 = 0$	U	$x^2 - 1 = - x - 5$
$(x - 3)(x+2) = 0$	U	$x^2 - x + 4 = 0$
$(x - 3) = 0$ v $(x+2) = 0$	U	$x^2 - x + 4 = 0$ no se puede factorar
$X=3$ ó $X = -2$		

Estos dos valores de x tenemos que ver si pertenecen al intervalo [- 2; + 3 [, forman parte de la solución caso contrario se excluyen los que no pertenezcan al mismo.

En este ejemplo los dos pertenecen a la solución de la ecuación.

Sol. = {-2; 3}

1.2 Ecuaciones cuadráticas

Ecuación cuadrática: Una ecuación de segundo grado es una ecuación que puede reducirse a la forma general.

Esto es una ecuación cuadrática:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

(**a**, **b**, y **c** pueden tener cualquier valor, excepto que **a** no puede ser 0.)

$ax^2 + bx + c = 0$ con $a \neq 0$

Ejemplos:

“ $3x^2 - 2x + 5 = 0$", $a = 3, b = -2, c = 5$; x^2-3x-4=0, $a = 1, b = -3, c = -4$

Las soluciones de la ecuación son los valores de X que al sustituirlos verifican la igualdad.

Ejemplo: en la ecuación $x^2 - 5x + 6 = 0$:

El valor $x = 4$ no es solución porque $4^2 - 5 \cdot 4 + 6 = 16 - 20 + 6 = 2$

El valor $x = 2$ si es solución porque $2^2 - 5 \cdot 2 + 6 = 4 - 10 + 6 = 0$

La ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$ se dice que está completa cuando todos los coeficientes son distintos de cero. En este caso las soluciones se obtienen aplicando la fórmula: $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

El valor del radicando de $\sqrt{b^2 - 4ac}$ permite saber el número de soluciones sin necesidad de hallarlas. $D = b^2 - 4ac$, se llama discriminante.

$D = b^2 - 4ac$

- Si D es positivo, tiene dos soluciones (signo +, signo -)
- Si D es cero, tiene una solución (solución doble)
- Si D es negativo, no tiene soluciones

Ejemplo: “$x^2 - 3x + 2 = 0$”, en esta ecuación $a = 1,\ b = -3,\ c = 2$ y aplicando la fórmula

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} \dfrac{3+1}{2} = \dfrac{4}{2} = 2 & \boxed{x = 2} \\[2ex] \dfrac{3-1}{2} = \dfrac{2}{2} = 1 & \boxed{x = 1} \end{cases}$$

Propiedades

I. Análisis de sus Raíces

Sea: $ax^2 + bx + c = 0$; $a \neq 0$

Se define el discriminante (Δ):

$\Delta = b^2 - 4ac$; a, b, c ∈ R

1er Caso

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow \begin{matrix} 2\ raíces\ reales\ e\ iguales \\ o\ raíces\ múltiple(SOLUCION\ UNICA) \end{matrix}$$

Ejemplo: $4x^2 - 4x + 1 = 0$

$\Delta = (-4)^2 - 4(4)(1) = 0$ → $C.S. = \left\{\frac{1}{2}\right\}$

2do Caso

$\Delta > 0 \Leftrightarrow 2\ raíces\ reales\ diferentes$

Ejemplo: $x^2 - 4x - 12 = 0$ → C.S. = {-6;2}

a=1, b=-4, c=-12

$\Delta = b^2 - 4ac$; a, b, c ∈ R

$\Delta = (4)^2 - 4(1).\ (-12) > 0$

$\Delta = 16 + 48 > 0$

$\Delta = 64 > 0$ resultan 2 raíces diferentes (-6,2)

3er Caso

$$\Delta < 0 \Leftrightarrow 2\ raíces\ complejas, imaginarias\ y\ conjugadas$$

II. Operaciones básicas con las raíces

Sea: $ax^2 + bx + c = 0$; $a \neq 0$

Suma de raíces:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

Producto de raíces:

$$x_1 \cdot x_2 = -\frac{c}{a}$$

Diferencia de raíces:

$$(x_1 + x_2)^2 - (x_1 - x_2)^2 = 4x_1x_2$$

Reconstrucción de la ecuación de 2do grado a partir de sus raíces:

$$x^2 - \underbrace{(x_1 + x_2)}_{\substack{Suma\ de \\ Raices}} x + \underbrace{x_1x_2}_{\substack{Producto \\ de\ raices}} = 0$$

Teorema

Sean las ecuaciones:

$ax^2 + bx + c = 0$ ……… (1) ; $a \neq 0$

$mx^2 + nx + p = 0$ ……. (2) ; $m \neq 0$

Estas ecuaciones serán equivalentes, tiene el mismo C.S. si se cumple:

$$\frac{a}{m} = \frac{b}{n} = \frac{c}{p}$$

1.3 Polinomios

- **Monomios:** Una expresión algebraica cuyos elementos no están separados por los signos de las operaciones suma y resta se llama una expresión algebraica sin signos de agrupación. Es un conjunto de letras y números relacionados entre sí por todas las operaciones aritméticas, excepto la suma y la resta (Lara P. Jorge, 2015). Estas expresiones pueden incluir multiplicación, división, potenciación, radicación, entre otras operaciones, y pueden estar compuestas por términos algebraicos, constantes y variables

  - ✓ ***Expresión general:*** $\boldsymbol{a \cdot x^n}$, donde **a** es un parámetro denominado coeficiente, y representa números en general, x representa la variable independiente o parte literal y n el exponente de esa parte literal, o grado del monomio.

  - ✓ ***Monomios semejantes,*** son aquellos que poseen idéntica parte literal, con los mismos exponentes.

  - ✓ ***Monomios iguales,*** además de ser semejantes tienen idéntico coeficiente.

  - ✓ ***Monomios opuestos*****,** son iguales y con el signo del coeficiente cambiado.

- **Grado de un monomio:** es igual al balance de los exponentes de su parte literal, es decir, la suma de todos los exponentes de la parte literal, estos con su signo y puesta toda la parte literal en el numerador del monomio.

- **Valor numérico de un monomio:** es el que se obtiene tras sustituir las variables por valores numéricos concretos y realizar las operaciones indicadas.

Ejemplo, sea el monomio $5x^2$, su valor numérico para x = 3 es: $5 \cdot (3)^2 = 5 \cdot 9 = 45$

- **Operaciones con monomios**

✓ *Suma y resta*: *solo se pueden sumar o restar monomios semejantes*.

> ➢ La suma o resta de dos o más monomios semejantes es otro monomio semejante a los anteriores y que tiene por coeficiente la suma o resta de los coeficientes de cada monomio.
>
> ➢ Si no son semejantes se deja la operación indicada obteniéndose una nueva expresión conocida como polinomio.
>
> - Ejemplo: monomios $4x^3$; $-3x$; $5x^2$
>
> Suma $4x^3 - 3x + 5x^2 = 4x^3 + 5x^2 - 3x$. Veremos que la ordenación en sentido decreciente es la forma más adecuada de presentar y operar con los polinomios.
>
> ➢ La operación suma o resta de monomios se conoce también como reducción de términos semejantes.
>
> - Ejemplo: $ax^n + bx^n - cx^n = (a + b - c) \cdot x^n$
> - De modo práctico:
>
> Sean los monomios $\frac{2}{3}x^3 + 5x^3 - \frac{3}{4}x^3 = \frac{59}{12}x^3$

✓ **Multiplicación**: para multiplicar monomios da igual que sean o no semejantes.

> ➢ *El producto* de dos o más monomios es otro monomio que tiene por coeficiente el producto de los coeficientes y por parte literal el producto de las mismas, el grado final será igual a la suma de los grados de cada uno de los monomios factores.
>
> - Ejemplo: $ax^p \cdot by^n \cdot \frac{c}{a} \cdot x^q = \frac{\cancel{a} \cdot b \cdot c}{\cancel{a}} \cdot x^{p+q} \cdot y^n = b \cdot c \cdot x^{p+q} \cdot y^n$
> - De modo práctico:

$$\mathbf{3x^4 \cdot \frac{1}{2}y^2 \cdot \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} = \frac{\cancel{3} \cdot \overset{2}{\cancel{4}}}{\cancel{2} \cdot \cancel{3}} \cdot x^{4+\frac{3}{2}} \cdot y^2 = 2 \cdot x^{\frac{11}{2}} \cdot y^2}$$

- ✓ **Potenciación:** para calcular la potencia de un monomio basta con aplicar las propiedades de las potencias, como son, la potencia de un producto y de un cociente y la potencia de una potencia.
  - ➢ La potencia de un monomio es otro monomio que tiene por coeficiente la potencia del coeficiente dado y por parte literal la misma elevada al producto de los exponentes.
    - Ejemplo: $ax^n \Rightarrow (ax^n)^p = a^p \cdot x^{n\cdot p}$
    - De modo práctico:

$$\boldsymbol{monomio}\ \ \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}} \cdot \boldsymbol{x}^{\mathbf{5}} \cdot \boldsymbol{y}^{\mathbf{3}} \Rightarrow \left(\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}} \cdot \boldsymbol{x}^{\mathbf{5}} \cdot \boldsymbol{y}^{\mathbf{3}}\right)^{\mathbf{3}} = \left(\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\right)^{\mathbf{3}} \cdot \left(\boldsymbol{x}^{\mathbf{5}}\right)^{\mathbf{3}} \cdot (\boldsymbol{y}^{\mathbf{3}})^{\mathbf{3}} = \frac{\mathbf{2}^{\mathbf{3}}}{\mathbf{3}^{\mathbf{3}}} \cdot \boldsymbol{x}^{\mathbf{15}} \cdot \boldsymbol{y}^{\mathbf{9}}$$

$$= \frac{\mathbf{8}}{\mathbf{27}} \cdot \boldsymbol{x}^{\mathbf{15}} \cdot \boldsymbol{y}^{\mathbf{9}}$$

- **Polinomios:** expresión algebraica formada por la suma o resta de dos o más monomios no semejantes. Cada uno de esos monomios se denomina término.

  - ✓ ***Expresión general:*** $\boldsymbol{P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots\cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}$
  - ✓ Donde n indica el grado del polinomio, luego $a_n \cdot x^n$ es el término de mayor grado, y a_0 es el término de menor grado o término independiente. a_n , a_{n-1} , etc. ... son los coeficientes de los distintos términos, y x es la variable independiente.
  - ✓ Al término a_1x se le conoce también como término lineal.

- **Grado de un polinomio:** es igual al grado del término de mayor grado.

- **Clasificación de los polinomios:**
  - ✓ **Por el grado:** pueden ser de primero, segundo, tercero, etc, según el grado del término de mayor grado.
  - ✓ **Por el número de términos:** de un término (monomio), de dos términos (binomio), de tres términos (trinomio), etc.
  - ✓ **Forma usual:** indicamos el grado y el número de términos.

- **Número de términos de un polinomio:** un polinomio se dice que es completo cuando tiene todos los términos que le corresponden, pero, ¿Cuántos términos le corresponden a cada polinomio?

  ✓ El número de términos que debe tener un polinomio es igual al grado más uno. Así:
    - Primer grado $\Rightarrow$ dos términos $a_1x + a_0$.
    - Segundo grado $\Rightarrow$ tres términos $a_2x^2 + a_1x + a_0$.
    - Tercer grado $\Rightarrow$ cuatro términos $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$.

- **Importante:** cuando se trabaje con polinomios, lo primero que hay que hacer es ordenarlos en sentido decreciente, luego reducir términos semejantes, y por último, aunque no siempre es necesario, completarlos con ceros, en el caso de que no sean completos.

  ✓ **Ordenación:** consiste en colocar los términos unos a continuación de otros guardando el orden del grado del mismo.

  ✓ **Reducción de términos semejantes:** consiste en sumar o restar todos los términos semejantes que se encuentren en la expresión.

  ✓ **Completitud:** consiste en intercalar términos con coeficiente nulo allí donde falte el término del grado que corresponda.

- **Valor numérico de un polinomio:** al igual que para los monomios, es el que se obtiene tras sustituir la variable por un valor numérico concreto y realizar las operaciones indicadas.

  ✓ **Ejemplo,** sea el polinomio $R_3(x) = 4x^3 - 2x^2 + x$, el valor numérico para x = 2 es $R(2) = 4 \cdot 2^3 - 2 \cdot 2^2 + 2 = 32 - 8 + 2 = 26$

1.3.1 Operaciones con polinomios

- ✓ ***Suma y resta:*** como un polinomio no es más que la suma o resta indicada de varios monomios no semejantes, sumar dos o más polinomios consiste en localizar los términos semejantes que hay entre todos ellos y reducirlos.
  - Para evitar confusiones lo más importante es organizar bien la suma, para ello se pueden hacer dos cosas, pero ambas requieren de un primer paso común, ordenar (en sentido decreciente) todos los polinomios que intervengan.

- ✓ ***Multiplicación:*** para multiplicar polinomios da igual que sean o no del mismo grado, que estén o no completos, que estén o no ordenados, etc.; lo verdaderamente importante es seguir el orden de la multiplicación con rigor.
  - El producto de dos o más polinomios es otro polinomio que tiene por grado final la suma de los grados de cada uno de los polinomios factores. Así, el producto de dos polinomios de grados 5 y 7 da como resultado un polinomio de grado 12.
  - ***Orden de multiplicación:***
    - Es conveniente, aunque no necesario, ordenar (en sentido decreciente) los polinomios factores.
    - Se puede multiplicar en cualquier sentido, de derecha a izquierda o de izquierda a derecha, pero siempre es más conveniente multiplicar el de menos términos por el de más términos.
    - La multiplicación se va haciendo por partes, el primer término de uno de los factores por todos los términos del otro, sumar luego el producto del segundo de los términos multiplicado por todos los términos del segundo, y así sucesivamente hasta agotar todos los términos del primer factor.
    - Por último, se reducen todos los términos semejantes y se ordena el polinomio resultante.

- ✓ **División:** Al dividir polinomios, es importante tener en cuenta que el grado del polinomio divisor debe ser igual o menor que el grado del polinomio dividendo para que la división sea posible y tenga sentido. Si el grado del divisor es mayor que el del dividendo, la división no puede realizarse de manera exacta y se necesita utilizar métodos como la división sintética o la división larga para obtener un cociente y un residuo, y se cumple siempre la máxima:

$$\textbf{Dividendo} = \textbf{divisor} \times \textbf{cociente} + \textbf{resto}$$

Se procede igual que si se tratara de números.

Así lo primero es buscar un número que multiplicado por el coeficiente del término de mayor grado del divisor, iguale este con el del dividendo.

Luego una variable elevada a un exponente adecuado para que iguale el del dividendo.

Se multiplica todo el divisor por dicho monomio y el resultado se lleva restando bajo los términos correspondientes del dividendo. Se suman y se baja el siguiente término del dividendo. Así hasta que el grado del polinomio, resultante de alguna de las operaciones intermedias, sea menor que el grado del divisor. Este será el resto de la división.
Finalmente se comprueba que:

Dividendo $=$ divisor $\times$ cociente $+$ resto

- **E1.-** Polinomio por monomio:
  - $\begin{cases} \boldsymbol{Dividendo}: \ \mathbf{3x^4 - 5x^3 + 4x^2} \\ \boldsymbol{Divisor}: \ \boldsymbol{x^2} \end{cases}$

$$
\begin{array}{l|l}
\mathbf{3x^4 - 5x^3 + 4x^2} & \underline{\ \boldsymbol{x^2}\ \ \ \ \ \ \ \ } \\
\underline{\mathbf{-3x^4}} \quad \downarrow \quad \downarrow & \mathbf{3x^2 - 5x + 4} \rightarrow \boldsymbol{Cociente} \\
\mathbf{0x^4 - 5x^3} \quad \downarrow & \\
\quad \underline{\mathbf{5x^3}} \quad \downarrow & \\
\quad \mathbf{0x^3 + 4x^2} & \\
\quad\quad \underline{\mathbf{-4x^2}} & \\
\quad\quad \mathbf{0x^2} \rightarrow \boldsymbol{Resto} \Rightarrow \boldsymbol{es\ \ exacta.} &
\end{array}
$$

- Comprobación:

$3x^4 - 5x^3 + 4x^2 = x^2 \cdot (3x^2 - 5x + 4) + 0 = 3x^4 - 5x^3 + 4x^2$
c.q.d.

- Observación: en estos casos lo que hacemos no es más que aplicar el proceso de simplificación de fracciones, ya que:
- $(3x^4 - 5x^3 + 4x^2) \div (x^2) = \frac{3x^4 - 5x^3 + 4x^2}{x^2} = \frac{3x^4}{x^2} - \frac{5x^3}{x^2} + \frac{4x^2}{x^2}$
- Simplificando: $\frac{3x^{\cancel{4}2}}{\cancel{x^2}} - \frac{5x^{\cancel{3}1}}{\cancel{x^2}} + \frac{4\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}} = 3x^2 - 5x + 4$

- **Otra forma de dividir: DIVISIÓN RUFFINI.**

✓ Cuando el divisor sea un binomio, podemos aplicar una regla muy sencilla que consiste en lo siguiente. Sea el polinomio divisor $(x - 2)$, y el polinomio dividendo $3x^4 - 8x^2 + 5x - 1$, para hacer la división por la regla de Ruffini, hay que realizar los siguientes pasos:

  - Ordenar (en sentido decreciente) y completar con ceros el dividendo: $3x^4 + 0x^3 - 8x^2 + 5x - 1$
  - Se escriben en hilera los coeficientes del polinomio dividendo, en el mismo orden en que se encuentran en el polinomio.

$$3 \quad 0 \quad -8 \quad 5 \quad -1$$

  - En el extremo izquierdo, y en segunda hilera, se escribe el opuesto del

$$\begin{array}{c|ccccc} & 3 & 0 & -8 & 5 & -1 \\ 2 & & & & & \\ \hline & & & & & \end{array}$$

  - término independiente del polinomio divisor.
  - A la siguiente hilera se baja el primer coeficiente del dividendo, tal como está.

	3	0	-8	5	-1
2					
	3				

- Se multiplica este por el opuesto del término independiente del divisor y el resultado se sitúa debajo del segundo coeficiente del dividiendo, y se suman. El resultado de la suma se sitúa en la última hilera a la derecha del primer coeficiente.

	3	0	-8	5	-1
2		6			
	3	6			

- Se multiplica, de nuevo, ese resultado por el opuesto del término independiente del divisor, y el resultado se sitúa debajo del tercer coeficiente del dividendo, y se suman. El resultado de la suma se sitúa en la última hilera a la derecha del resultado anterior, y así sucesivamente hasta completar todos los términos del polinomio.

	3	0	-8	5	-1
2		6	12	8	26
	3	6	4	13	25

- El último valor de la última fila es el resto de la división, en este caso es 25, y los números anteriores de la última fila son los coeficientes del polinomio cociente ordenados en sentido decreciente, así:
  - Cociente: $3x^3 + 6x^2 + 4x + 13$ y resto: 25.
  - Comprobación: $3x^4 - 8x^2 + 5x - 1 = (x-2) \cdot (3x^3 + 6x^2 + 4x + 13) + 25 =$

$$= 3x^4 + 6x^3 + 4x^2 + 13x - 6x^3 - 12x^2 - 8x - 26 + 25 = 3x^4 - 8x^2 + 5x - 1$$

1.4 Sistemas de Ecuaciones

Resolver un sistema de ecuaciones lineales es encontrar todas sus soluciones.

Los métodos de igualación, sustitución y reducción consisten en encontrar y resolver, para cada una de las incógnitas, una ecuación con esa incógnita y con ninguna otra (convirtiendo así un problema difícil en uno más fácil, ¿no?).

A estas ecuaciones, con solo una incógnita, se llega a través de una serie de pasos en los que las ecuaciones intermedias que se van obteniendo tienen menos incógnitas que las ecuaciones previas.

Así, es posible que en uno de estos pasos de eliminación de incógnitas se utiliza un método (el de reducción, por ejemplo) y que, en el siguiente paso, se utiliza otro método (el de igualación, por ejemplo).

Cada vez que se encuentra la solución para una incógnita, se sustituye esta incógnita por su solución para obtener así ecuaciones con menos incógnitas.

Los métodos de igualación, sustitución, reducción y Gauss se pueden utilizar para resolver sistemas de ecuaciones compatibles determinados e indeterminados.

Estos mismos métodos también pueden utilizarse para comprobar si un sistema de ecuaciones es compatible o no. La utilización de cualquiera de ellos conduciría, en el caso de que el sistema fuese incompatible, a una igualdad que es falsa, por ejemplo:

$$2 = 3$$

1.4.1 Método de Sustitución

Consiste en despejar o aislar una de las incógnitas (por ejemplo, x) y sustituir su expresión en la otra ecuación. De este modo, obtendremos una ecuación de primer grado con la otra incógnita, y. Una vez resuelta, calculamos el valor de x sustituyendo el valor de y que ya conocemos.

Ejemplo:

Resolver el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 4x + 3y = 22 \\ 2x + 5y = 18 \end{cases}$$

Despejamos una de las variables en una de las ecuaciones (en este caso elegimos y en la primera ecuación):

$$y = \frac{22 - 4x}{3}$$

Y la reemplazamos en la otra ecuación:

$$2x + 5\left(\frac{22 - 4x}{3}\right) = 18$$

Operamos para despejar la única variable existente ahora:

$$\begin{aligned} 2x + \frac{110 - 20x}{3} &= 18 \\ 2x + \frac{110}{3} - \frac{20x}{3} &= 18 \\ 2x - \frac{20x}{3} &= 18 - \frac{110}{3} \\ -\frac{14x}{3} &= -\frac{46}{3} \\ 14x &= 56 \\ x &= \frac{56}{14} \\ \mathbf{x} &= \mathbf{4} \end{aligned}$$

Reemplazamos el valor de x obtenido en alguna de las ecuaciones (elegimos arbitrariamente la primera):

$$\begin{aligned} 4(4)+3y &= 22 \\ 16+3y &= 22 \\ 3y &= 22-16 \\ 3y &= 6 \\ y &= \frac{6}{3} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{2} \end{aligned}$$

Hallamos la respuesta X=4, Y= 2, obviamente igual que en el caso anterior. No verificaremos, dado que ya sabemos que esta respuesta es correcta.

Realice este mismo ejemplo despejando x al comienzo.

1.4.2 Método de Igualación

Consiste en aislar en ambas ecuaciones la misma incógnita para poder igualar las expresiones, obteniendo así una ecuación con una sola incógnita.

Ejemplo:

Resolver el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 4x+3y=22 \\ 2x+5y=18 \end{cases}$$

Esto significa, encontrar el punto de intersección entre las rectas dadas, de las cuales se conoce su ecuación.

Despejamos una de las dos variables en las dos ecuaciones, con lo cual tenemos un sistema equivalente (en este caso elegimos y):

$$\begin{cases} y = \dfrac{22-4x}{3} \\ y = \dfrac{18-2x}{5} \end{cases}$$

Recordamos que, al tener dos ecuaciones, si los primeros miembros son iguales los segundos también lo son, por lo tanto:

$$\frac{22-4x}{3} = \frac{18-2x}{5}$$

Luego:

$$\begin{aligned} 5(22-4x) &= 3(18-2x) \\ 110-20x &= 54-6x \\ -20x+6x &= 54-110 \\ -14x &= -56 \\ x &= \frac{-56}{-14} \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Reemplazamos el valor de x obtenido en alguna de las ecuaciones (elegimos la segunda):

$$y = \frac{18-2(4)}{5}$$

Operamos para hallar el valor de y:

$$y = \frac{18-8}{5}$$

$$y = \frac{10}{5}$$

y=2

Verificamos, en ambas ecuaciones, para saber si realmente (x ; y) = (4;2):

$$4(4)+3(2)[=]22 \qquad 2(4)+5(2)[=]18$$
$$16+16[=]22 \qquad 8+10[=]18$$
$$22=22 \qquad 18=18$$

Ahora sí, podemos asegurar que x= 4 e y = 2

1.4.3 Método de reducción

Consiste en multiplicar ecuaciones por números y sumarlas para reducir el número de incógnitas hasta llegar a ecuaciones con solo una incógnita.

Multiplicar una ecuación por un número consiste en multiplicar ambos miembros de la ecuación por dicho número que no existe.

Sumar dos ecuaciones consiste en obtener una nueva ecuación cuyo miembro derecho (izquierdo) es la suma de los miembros derechos (izquierdos)

Ejemplo

Resolver el sistema:

$$\begin{cases} 4x+3y=22 \\ 2x+5y=18 \end{cases}$$

El objetivo es eliminar una de las incógnitas, dejándolas inversas aditivas, sabiendo que una igualdad no cambia si se la multiplica por un número.

También sabemos que una igualdad no se cambia si se le suma otra igualdad.

Si se quiere eliminar la x, ¿por qué número debo multiplicar a la segunda ecuación, para que al sumarla a la primera se obtenga cero?

La respuesta es -2. Veamos:

$$\begin{aligned} & 4x+3y &= 22 \\ (-2) \rightarrow \; & 2x+5y &= 18 \end{aligned}$$

Con lo que obtenemos:

$$\begin{aligned} 4x+3y &= 22 \\ -4x-10y &= -36 \end{aligned}$$

Y la sumamos la primera obteniéndose:

-7y = -14

y = 2

Reemplazar el valor obtenido de y en la primera ecuación:

$$\begin{aligned} 4x+3(2) &= 22 \\ 4x+6 &= 22 \end{aligned}$$

Y finalmente hallar el valor de x:

$$\begin{aligned} 4x &= 22-6 \\ 4x &= 16 \\ x &= \frac{16}{4} \\ x &= 4 \end{aligned}$$

1.4.4 Método gráfico

El método gráfico consiste en representar las gráficas asociadas a las ecuaciones del sistema para deducir su solución. La solución del sistema es el punto de intersección entre las gráficas. La razón de ello es que las coordenadas de dicho punto cumplen ambas ecuaciones y, por tanto, es la solución del sistema.

Como vamos a trabajar con sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas (x e y), la gráfica de cada ecuación es una recta. Como consecuencia, la intersección de las gráficas es un único punto (a, b) y la solución del sistema es x=a e y=b. Sin embargo, veremos dos ejemplos de casos especiales: un sistema sin solución (rectas paralelas) y un sistema con infinitas soluciones (rectas iguales).

Obviamente, para poder aplicar el método gráfico debemos saber representar las gráficas de las rectas. Nosotros lo haremos uniendo puntos calculados previamente.

Terminaremos con un sistema de dos inecuaciones (o desigualdades). En este caso, la solución del sistema es la intersección de dos regiones del plano.

Recordamos que la solución de un sistema de ecuaciones son los valores de las incógnitas x e y que hacen que se verifiquen todas las ecuaciones del sistema.

Ejemplo:

Resolver gráficamente el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} y - 2x = 0 \\ y + x = 3 \end{cases}$$

Lo primero que hacemos es despejar la yy en ambas ecuaciones.

Primera ecuación:

$$y - 2x = 0 \rightarrow$$
$$y = 2x$$

Segunda ecuación:

$$y + x = 3 \quad \rightarrow$$
$$y = 3 - x$$

Ahora vamos a calcular unos cuantos puntos de las dos funciones para representarlas. Utilizaremos x=0 y x=2.

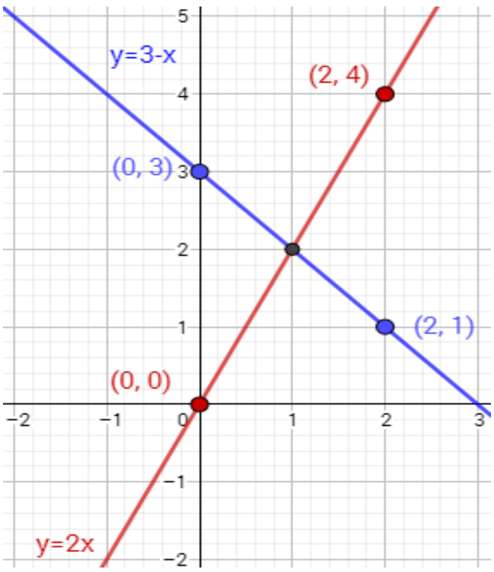
Para la primera función tenemos la tabla

x	$y = 2x$	**Punto**
0	0	(0,0)
2	4	(2,4)

Para la segunda función tenemos la tabla

x	$y = 3 - x$	**Punto**
0	3	(0,3)
2	1	(2,1)

Ahora representamos los puntos de cada tabla uniéndolos:



La solución del sistema es el punto donde las gráficas se cortan:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

CAPÍTULO 2

Desigualdades

2

Capítulo
2

Desigualdades

Una desigualdad lineal es una expresión matemática que hace que una expresión lineal sea menor o mayor que otra expresión lineal.

2.1 Desigualdades lineales

Cuando se empieza a trabajar con desigualdades debemos tener mucho cuidado de no confundir "es menor que" con simplemente “menos que”. Por ejemplo, el enunciado "8 es menor que n" significa $8< n$; por otro lado, "8 menos que n" significa $n-8$, porque n es mayor que 8.

De manera semejante, "es mayor que" tiene un significado diferente de "más que". El enunciado "8 es mayor que " significa $8 > n$; el enunciado "8 más que n" significa $n + 8$.
Antes de empezar a trabajar con desigualdades es útil examinar las siguientes palabras clave para las desigualdades:

Tabla 1.

Palabras claves para las desigualdades

Palabra clave	Símbolo
es menor que	$<$
es menor o igual que, es como mucho	$\leq$
es mayor que, es más que	$>$
es mayor o igual que, es por lo menos	$\geq$

Para convertir una oración en una desigualdad tenemos algunas palabras claves que podemos buscar.

Tabla 2.

Frases en expresiones algebraicas

Palabra clave	Símbolo
Suma, aumentado por, más que, sumado a	suma (+)
Diferencia, disminuido en, menos que, restado de	resta (–)
Producto, veces, doble	multiplicación (×)
Cociente, dividido entre	división (÷)

Necesitamos escribir una desigualdad para el siguiente enunciado.

La suma de 4 y x es por lo menos “La suma de 4 y x”

así es como escribimos “La suma de 4 y x” es: 4 + x

El símbolo para “es por lo menos” es: ≥

Por lo tanto, la manera que debemos escribir “La suma de 4 y x es por lo menos 17” es:

Respuesta: $4 + w \geq 17$

Ejemplo: Convertir una oración en una desigualdad de múltiples salidas

Diez restado del producto de 8 y un número es menor que -24. Usar x para designar el número incógnito.

Vamos a examinar la frase “Diez restado del producto de 8 y un número”; por lo tanto, “el producto de 8 y un número” lo escribimos 8x; y restamos 10 para obtener $8x - 10$. El símbolo para “es menor que” es <; y obtenemos lo siguiente $8x - 10 < -24$.

Respuesta: $8x - 10 < -24$.

Para repasar se va a formular desigualdades que representen las situaciones en situaciones reales:

a) La temperatura dentro del refrigerador de un laboratorio es como máximo 6°C.

b) Utiliza t para representar la temperatura (en grados centígrados) del refrigerador.

c) Para poder montar en la montaña rusa un visitante debe tener una altura no menor de 148 centímetros.

Utilizar h para representar la altura (en centímetros) de un visitante que se puede montar.

Para resolver nos vamos a apoyar de la tabla 1 para formular algunos enunciados en español como desigualdades.

- La temperatura dentro del refrigerador de un laboratorio es como máximo 6°C

  Respuesta: $t \leq 6$

- Para poder montar en la montaña rusa un visitante debe tener una altura no menor de 148 centímetros

Respuesta: $h \geq 148$.

En este apartado se trazará el gráfico de la desigualdad lineal en la recta numérica.
$y \leq -10$

Para trazar el gráfico de $y \leq -10$, mostramos todos los números menores o iguales que -10.

Esto es -10 y todos los números a su izquierda en la recta numérica.

Tabla 3.

Nomenclatura de Intervalos

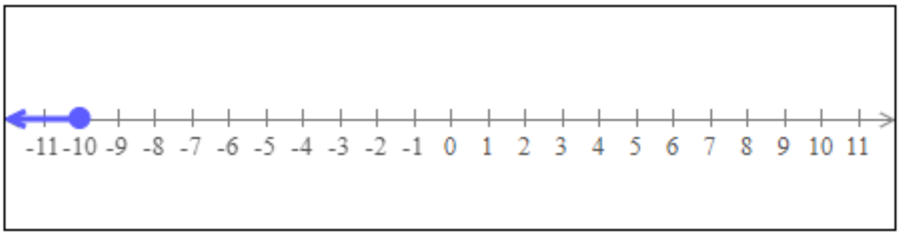
Símbolo de la desigualdad	Definición	Grafico	Símbolo	Intervalo
$<$	No incluye	○→	(	Abierto
$\leq$	Incluye	●→	[	Cerrado
$>$	No incluye	←○	)	Abierto
$\geq$	incluye	←●	]	Cerrado

Debemos incluir un número en el gráfico, eso es dado por el símbolo “$\leq$”, que significa “menores o iguales que” y el símbolo fuera “$<$”, no incluiríamos -10

Utilizamos un círculo cerrado en -10 para mostrar que está incluido en el gráfico.

Ilustración 1.

Gráfico de inclusión de una desigualdad



Respuesta: El gráfico muestra que todos los números menores o iguales que -10 son una solución de $y \leq -10$. Por ejemplo, -11 y $-12{,}5$ son soluciones.

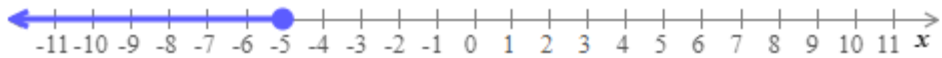
Para escribir una desigualdad dado un gráfico en la recta numérica, tenemos cuatro tipos de desigualdades y sus gráficos.

Ilustración 2.

Desigualdades y gráficos en la recta

$x \geq a$	
$x > a$	
$x \leq a$	
$x < a$	

Escribir una desigualdad para el gráfico.



Utilizar X para la variable.

En el gráfico, cada número hacia la izquierda de -5 está sombreado; el círculo cerrado en -5 significa que -5 también es sombreado o incluyente, por consiguiente, el gráfico muestra todos los valores de x menores que o igual a -5 (y sólo esos valores) y escribimos esto como una desigualdad de la siguiente manera $X \leq -5$

Para resolver una desigualdad lineal de con coeficiente fraccionario, para la siguiente desigualdad para x; simplificar su respuesta tanto como fuese posible.

$$-\frac{5x}{7} - 10 > -5$$

Comenzamos por sumar 10 a ambos lados de la desigualdad

$$-\frac{5x}{7} - 10 + 10 > -5 + 10$$

$$-\frac{5x}{7} > 5$$

A continuación, utilizamos las propiedades de la multiplicación y división de la desigualdad; cuando multiplicamos o dividimos cada lado por un número positivo, el signo de desigualdad se mantiene igual; y, cuando multiplicamos o dividimos cada lado por un número negativo "volteamos" el signo de desigualdad.

Podemos escribir esta desigualdad como sigue.

$$-\frac{5}{7}x > 5$$

Luego multiplicamos ambos lados por -7/5, que es el recíproco de -5/7.

Ya que multiplicamos por un número negativo, “volteamos” el signo de la desigualdad

$$\left(-\frac{7}{5}\right)\left(-\frac{5}{7}\right)x < \left(-\frac{7}{5}\right)5$$

Simplificamos y nos quedaría $x < -7$

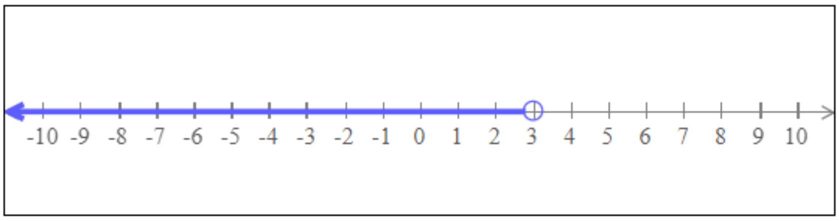
La respuesta también se puede escribir como $-7 > x$.

Tracemos el gráfico de la desigualdad compuesta en la recta numérica

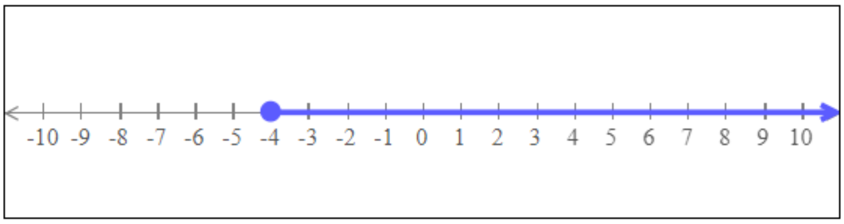
$x < 3$ y $x \geq -4$

Dos desigualdades unidas por la palabra y o la palabra o forman una desigualdad compuesta, y para trazar el gráfico de la desigualdad compuesta, primero trazamos el gráfico individual de cada desigualdad.

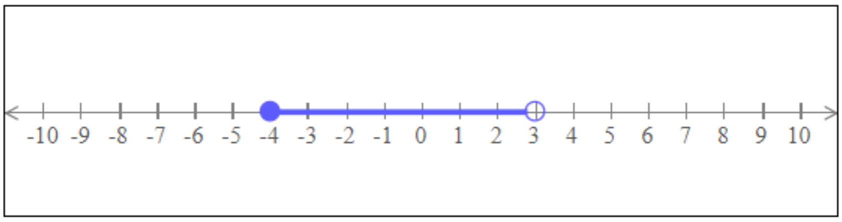
El gráfico de $x > 3$ está a continuación y cabe notar que utilizamos un círculo abierto en 3 para mostrar que 3 no es parte de la solución



El gráfico de $x \geq -4$ está a continuación y cabe notar que utilizamos un círculo cerrado en -4 para mostrar que -4 es parte de la solución



Deseamos trazar el gráfico de la solución de $x < 3$ y $x \geq -4$; por consiguiente, sombreamos los puntos que hacen ambas desigualdades verdaderas. En otras palabras, mostramos traslape de los dos gráficos arriba.



Respuesta: $(-4,3]$

Escribir una desigualdad para una situación del mundo real:

Ejemplo: Camila y Eduardo corrieron cada día como parte de un programa de ejercicios. Camila corrió 4 kilómetros cada día por x días. Eduardo corrió 6 kilómetros cada día por y días. El número total de kilómetros que Camila corrió es por lo menos el número total de kilómetros que Eduardo corrió. Escribir una desigualdad que describa esta relación.

Explicación y resolución: Camila corrió 4 kilómetros cada día por x días. Por lo tanto, Camila corrió 4x kilómetros, Eduardo corrió 6 kilómetros cada día por y días. Por lo tanto, Eduardo corrió 6y kilómetros. El número total de kilómetros que Camila corrió es por lo menos el número total de kilómetros que Eduardo corrió, por lo tanto, $4x \geq 6y$. Observe que por lo menos significa mayor o igual que.

Respuesta $4x \geq 6y$

Resolver un problema verbal con decimales por medio de una desigualdad lineal.

Ejemplo: Marcos desea alquilar un camión de carga por un día. Él puede elegir entre dos compañías, las cuales tienen los siguientes precios: La empresa A cobra una tarifa plana de \$93,00. La compañía B tiene un costo inicial de \$65,00 y cobra \$0,80 por cada kilómetro recorrido. ¿Cuál el número de kilómetros manejados por el que la empresa A cobrará una cantidad menos que la empresa B? use la variable k para identificar los kilómetros recorridos y resolver la desigualdad para k.

Debemos identificar cuando cobra la compañía A es menos que el cobro de la compañía B.

\$93,00 < Una cuota inicial de \$65,00 y un costo adicional de \$0.80, por cada kilómetro recorrido, nos piden utilizar k para el número de kilómetros recorridos y obtenemos la siguiente desigualdad.

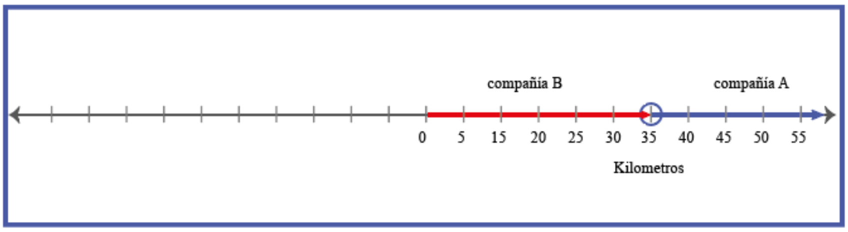
$93 < 65 + 0{,}80k$

Despejamos k

$93 - 65 < 0.8k$

$$\frac{28}{0.80} < \frac{0.80k}{0.80}$$

$35 < k$ o también se puede escribir como $k > 35$.



Respuesta. Por lo tanto, cuando el camión recorra más de 35 kilómetros, la compañía A cobrará menos que la compañía B.

2.2 Desigualdades de orden Superior.

Para tratar con Inecuaciones cuadráticas, vamos a identificar que la primera expresión deben ser ecuaciones cuadráticas, resolveremos el problema de la forma más simple, y aquí están los pasos que debemos seguir: primero factorizar la ecuación de segundo grado, paso dos encuentra los puntos críticos igualando a cero; el tercer paso graficamos y la cuarta resolvemos dando con la solución para esta desigualdad cuadrática.

$x^2 - 3x - 10 > 0$

Debemos primero mirar si la incoación es cuadrática y si está bien ordenada es decir x debe estar elevado al cuadrado, todo debe estar a un solo lado generalmente todos los términos están a la izquierda y a la derecha de la desigualdad está en cero.

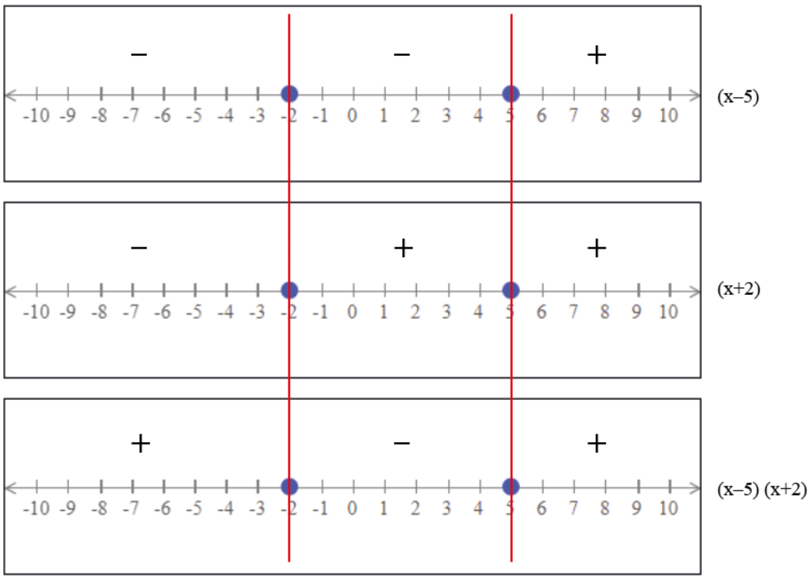
Siguiendo los pasos anotados anteriormente, primeramente, se simplifica la ecuación de segundo grado llegando a tener un trinomio de la forma $x^2 + bx + c$ y factorizamos. La raíz cuadrada de x^2 es x y colocamos este encada uno de los paréntesis; en el primer término colocamos el signo menos, la multiplicación de los signos va en el segundo paréntesis y por último buscamos dos números que multiplicados den –10 sumados o restados nos den –3, con esto encontramos los puntos críticos e igualamos a cero y despejamos

$(x-5)\,(x+2) > 0$

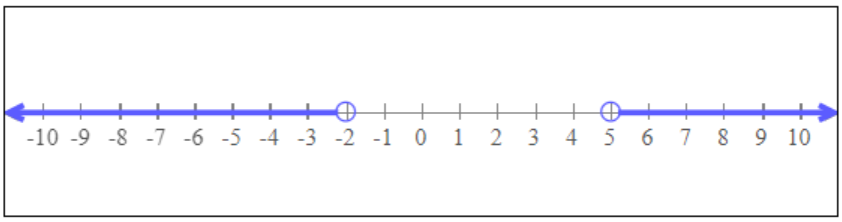
$x - 5 = 0$ $\qquad\qquad$ $x + 2 = 0$

$x = 5$ $\qquad\qquad$ $x = -2$

Para graficar debemos dibujar una recta para cada una de las expresiones, una para el primer paréntesis (x–5), otra para (x+2) y una tercera recta para toda la expresión (x–5)(x+2), nos basamos en los puntos críticos y dibujamos en cada recta dividiéndolas en 3 secciones.



Podemos observar que para la primera expresión (x–5) todos los números menores a 5 serán negativos, la segunda expresión (x+2) todos los menores a 2 serán negativos y para la tercera expresión utilizamos la ley de signos donde para el primer cuadrante menos por menos da más; en el segundo cuadrante menos por más da menos y en el tercer cuadrante más por más da más, como la ecuación inicial nos dice que $x^2 - 3x - 10$ {es positivo} entonces la respuesta sería todos los valores menores a –2 siendo este no incluido y todos los número mayores a 5 no incluido.



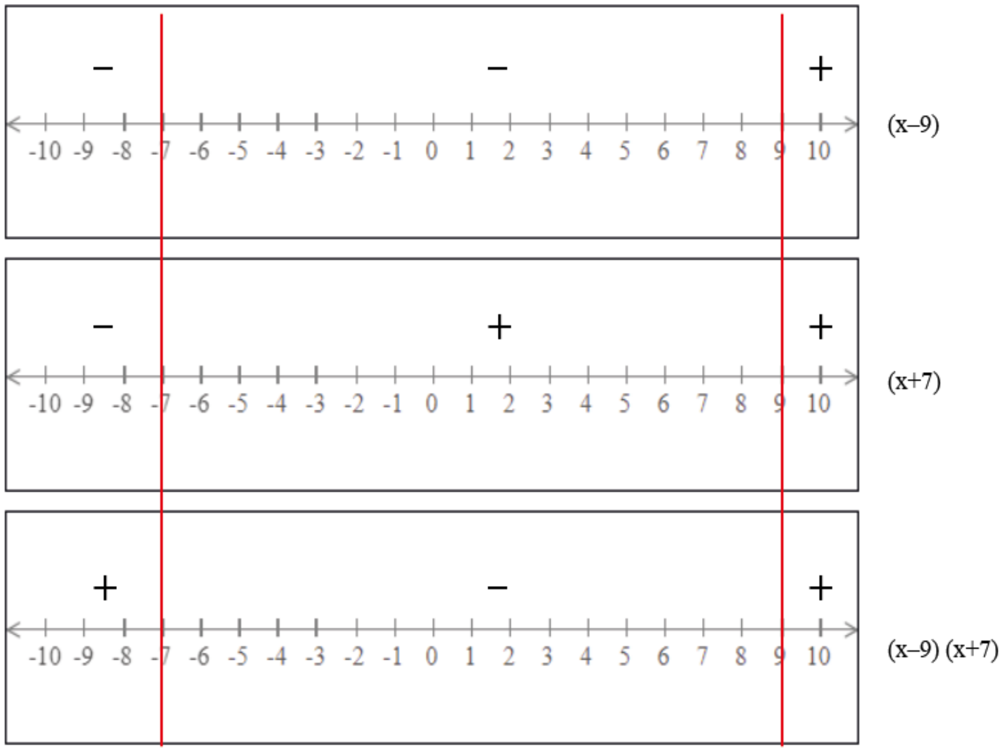
Respuesta: $(-\infty, -2) \cup (5, \infty)$

Ejercicio de práctica, resolver la siguiente desigualdad cuadrática: $x^2 - 2x - 63 < 0$

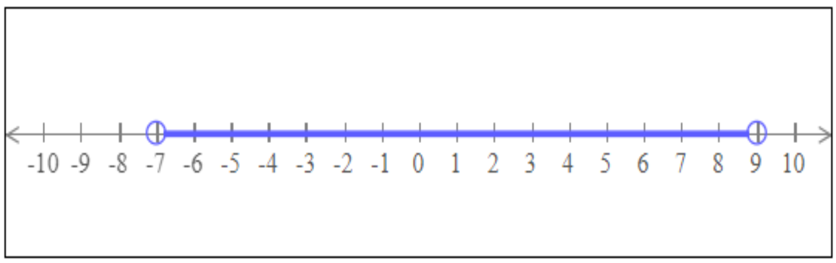
$(x - 9)(x + 7) < 0$

$x - 9 = 0$ $\qquad\qquad$ $x + 7 = 0$

$x = 9$ $\qquad\qquad$ $x = -7$



Como la ecuación inicial nos dice que $x^2 - 2x - 63$ {es negativa} su respuesta sería:

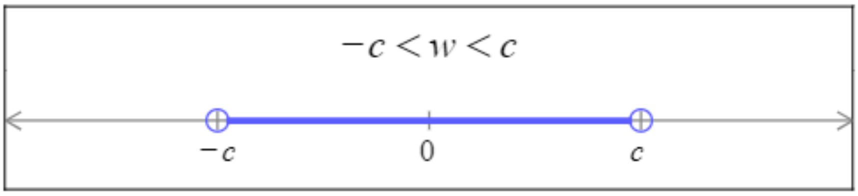


Respuesta: $(-7, 9)$

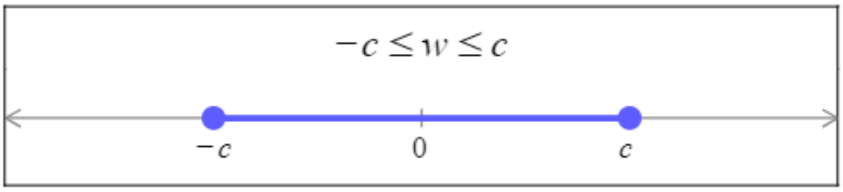
2.3 Desigualdades con Valor Absoluto.

Para entender las desigualdades se debe recordar que el valor absoluto de un número es su distancia desde 0 en la recta numérica. Aquí tenemos algunas desigualdades con valor absoluto y sus soluciones. (Suponer $c > 0$).

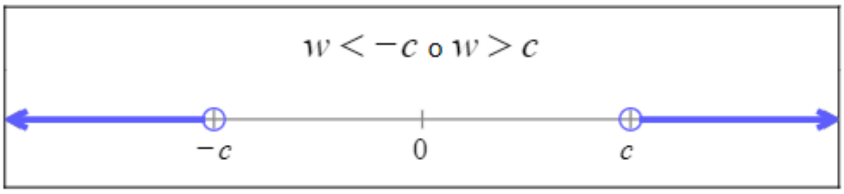
- $|x| < c$: La distancia de x a 0 es menor que c.



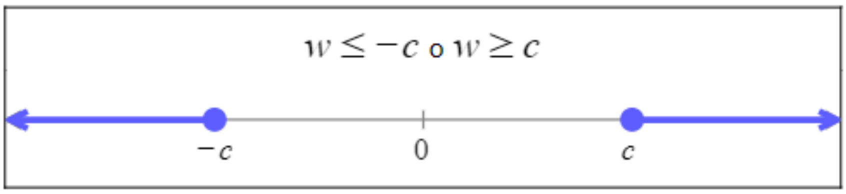
- $|x| \leq c$: La distancia de x a 0 es menor que o igual a “c”.



- $|x| > c$: La distancia de x a 0 es mayor que “c”.



- $|x| \geq c$: La distancia de x a 0 es mayor que o igual a c



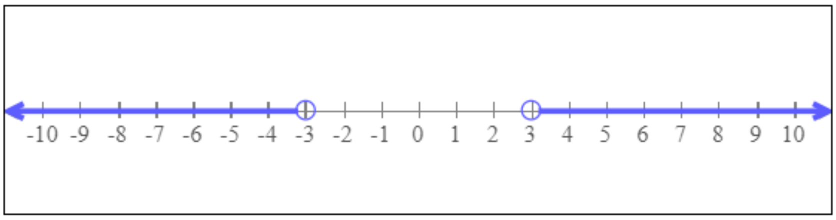
Cuando $c < 0$, tenemos lo siguiente

- $| x | < c$ y $| x | \leq c$ no tienen soluciones.
- $| x | > c$ y $| x | \geq c$ son verdaderos para todos los valores de x

Trazar la solución de la desigualdad: $| x | > 3$

La solución consiste de todos los números x cuyo valor absoluto es mayor que 3; por lo tanto, sombreamos todos aquellos números cuya distancia a 0 es mayor que 3.

Utilizamos círculos abiertos en –3 y 3 para mostrar que estos números no están incluidos.



Respuesta: $(-\infty, -3) \cup (3, \infty)$

Resolver una desigualdad de valor absoluto

$| 3x | -22 \geq -17$

Si todos los números reales son soluciones, haga clic en "Todos los números reales".
Si no tiene solución, haga clic en "No tiene solución".

Comenzamos aislando el valor absoluto. Para hacer esto, sumamos 22 a ambos lados,

$| 3x | -22+22 \geq -17+22$

$| 3x | \geq 5.$

El valor absoluto de una cantidad es su distancia desde 0 en la recta numérica. Esto nos da la siguiente regla cuando resolvemos desigualdades de valor absoluto, suponiendo que $c > 0$.

$|A| < c$ es equivalente a $-c < A < c$.
$|A| \leq c$ es equivalente a $-c \leq A \leq c$.

$|A| > c$ es equivalente a $A < -c$ o $A > c$.
$|A| \geq c$ es equivalente a $A \leq -c$ o $A \geq c$.

Puesto que el valor absoluto representa una distancia, jamás puede ser menor que 0. Por lo que cuando c < 0, tenemos lo siguiente:

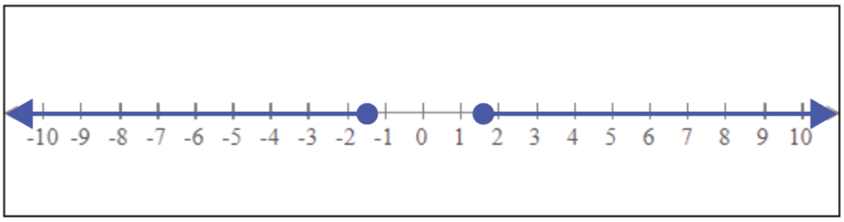
Ilustración 4.

Valor absoluto cuando c<0

Volviendo $|A| < c$ y $|A| \leq c$ no tienen soluciones. 3x | ≥ 5 tiene la forma | A | $|A| > c$ y $|A| \geq c$ son verdaderos para todos los valores de A. :quivalente a lo siguiente.

3x ≤ –5 o 3x ≥ 5

Obtenemos



Respuesta: $x \leq -\frac{5}{3}$ o $x \geq \frac{5}{3}$

[–∞,–5/3] U [5/3,∞]

2.4 Desigualdades irracionales / racionales

2.4.1. Desigualdades irracionales.

Las desigualdades irracionales son desigualdades que involucran raíces (cuadradas, cúbicas, etc.) y fracciones, y que a menudo no pueden resolverse mediante métodos algebraicos simples. Para resolverlas, generalmente se emplean técnicas como el análisis de dominios, la elevación de ambos lados de la desigualdad al cuadrado (u otra potencia adecuada) y el estudio de los signos de las expresiones involucradas. Aquí te muestro un ejemplo y los pasos básicos para resolver una desigualdad irracional:
Resolver la desigualdad:

$$\sqrt{2x+3} < x+1$$

Primeramente, vamos a determinar el dominio de la expresión dentro de la raíz debe ser no negativa.

$$2x + 3 \geq 0$$

$$x \geq -\frac{3}{2}$$

Teniendo en cuenta la validez de la operación elevamos ambos lados al cuadrado, asegúrate de que el lado derecho sea no negativo, pues la raíz cuadrada es siempre no negativa. En este caso,

$$x + 1 \geq 0$$

$$x \geq -1$$

Dado que $x \geq -3/2$ ya es parte del dominio, $x \geq -1$ también es necesario considerar la desigualdad, es válida para: $x \geq -1$; resolver la desigualdad cuadrática resultante elevando ambos lados al cuadrado,

$$\left(\sqrt{2x+3}\right)^2 < (x+1)^2$$

$$2x + 3 < x^2 + 2x + 1$$

A continuación, se simplifica y se resuelve la desigualdad cuadrática,

$$0 < x^2 - 2$$

$x^2 > 2$

Utilizando la propiedad de la desigualdad cuadrática donde,

$x < -\sqrt{2}$ o $x > \sqrt{2}$

Combinamos resultados con el dominio original: que es $x > -3/2$ y el resultado de la desigualdad cuadrática es $x < -\sqrt{2}$ o $x > \sqrt{2}$; entonces nos quedaría:

$-3/2 \leq x < -\sqrt{2}$ o $x > \sqrt{2}$

La solución de la desigualdad irracional es:

$$x \in [-\frac{3}{2}, -\sqrt{2}) \cup \left(\sqrt{2, \infty}\right)$$

Aquí tienes un ejercicio resuelto de una desigualdad irracional:

Ejemplo: resolver la desigualdad $\sqrt{x+1} \geq x - 1$

Debemos determinar el dominio de la expresión dentro de la raíz para que esta no debe ser negativa: $x + 1 \geq 0$; $x \geq -1$ y dado que estamos trabajando con una desigualdad, vamos a resolver los dos casos por separado para asegurar que estamos considerando todas las soluciones posibles.

La desigualdad dada es $\sqrt{x+1} \geq x - 1$ y antes de elevar al cuadrado, debemos asegurarnos de que ambos lados son no negativos. En este caso, dado que $\sqrt{x+1} \geq 0$ siempre es no negativa para $x \geq -1$, consideremos el lado derecho $x \geq 0$; y esto nos lleva a resolver dos casos: uno donde $x \geq -1$ y otro donde $-1 \leq x < 1$,

- Para el caso 1: $x \geq 1$

Elevamos al cuadrado ambos lados de la desigualdad original,

$$\left(\sqrt{x+1}\right)^2 \geq (x-1)^2$$

$x + 1 \geq x^2 - 2x + 1$

$0 \geq x^2 - 3x$

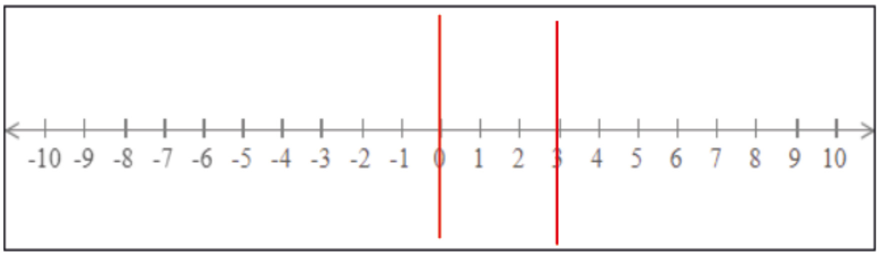
$0 \geq x\,(x - 3)$

Resolver esta desigualdad cuadrática:

$x\,(x - 3) \leq 0$

Punto crítico	Punto crítico
$x = 0$	$x - 3 = 0$
	$x = 3$

Los valores críticos son x=0 y x= 3 y considerando los intervalos $(-\infty, 0)$; $(0, 3)$: y, $(3, \infty)$



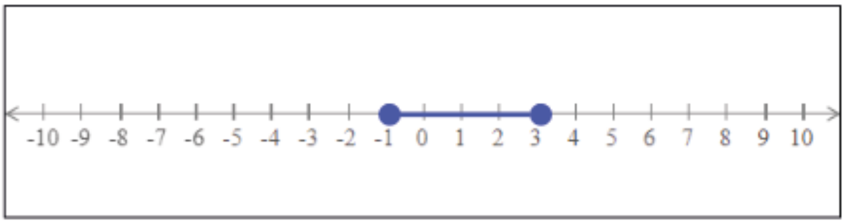
- Para $x \in (0, 3)$; $x\,(x - 3) \leq 0$ es cierto.
- Para $x \geq 3$: $x\,(x - 3) \leq 0$ no es cierto.

En este caso, la solución es $1 \leq x \leq 3$

- Para el caso 2: $-1 \leq x \leq 1$

En este intervalo, el valor de x – 1 es negativo o cero, considerando que $\sqrt{x+1} \geq x-1$; cómo x – 1 es negativo en este rango y la raíz cuadrada siempre es no negativa, esta desigualdad es siempre cierta en este intervalo, por lo tanto la solución en este intervalo es $-1 \leq x \leq 1$; ahora si comparamos resultados la solución final es la unión de los intervalos válidos.

– ≤ x ≤ 1 U 1 1 ≤ x ≤ 3



Respuesta: $x \in [-1,3]$

2.4.2. Desigualdades Racionales.

Las desigualdades racionales involucran fracciones donde el numerador y el denominador son polinomios. Para resolver estas desigualdades, es útil seguir un enfoque sistemático. Aquí te muestro un ejemplo y los pasos básicos para resolver una desigualdad racional. Resolver la desigualdad

$$\frac{x-2}{x+1} \leq 0$$

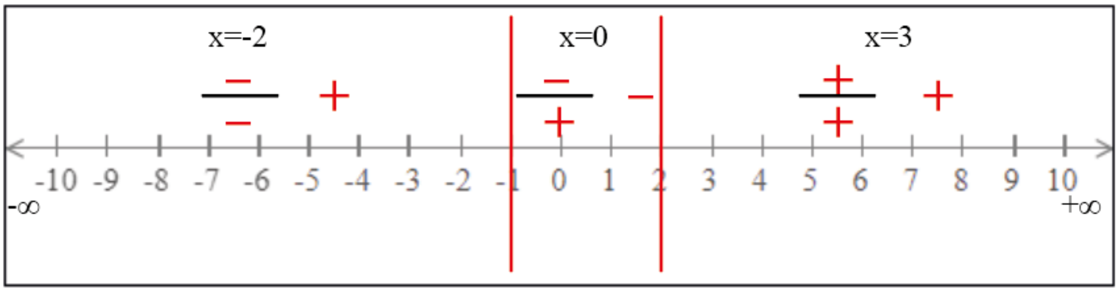
Se debe determinar el dominio de la fracción esté definida cuando el denominador no es cero. Entonces $x + 1 \neq 0$ siendo x diferente a menos uno $x \neq -1$ y encontramos los puntos críticos donde el numerados es cero y donde el denominador es cero:

$x - 2 = 0$	$x + 1 = 0$
$x = 2$	$x = -1$

Los puntos críticos son $x = 2$ y $x = -1$ y decidir si los puntos críticos son partes de la solución es decir si incluyen o no se incluyen; el valor del denominador no debe incluirse por cuanto x – 1 dará cero y en el numerador si se puede incluir para $x = 2$ y determinamos estos puntos que dividen la recta numérica en intervalos como se muestra en la siguiente figura.

Ilustración 5.

Análisis del signo en la recta numérica



En la figura que antecede se determinan los intervalos dividiendo estos puntos la recta numérica siendo sus intervalos: (–∞, –1); (–1,2); y, (2, ∞); probamos los signos en cada intervalo escogiendo un valor en cada uno y verificando el signo de la expresión en ese intervalo

- Para (–∞, –1), se elige x = –2

$$\frac{x-2}{x+1}=\frac{-2-2}{-2+1}=\frac{-4}{-1}=4$$

El signo es positivo +.

- Para (–1,2), se elige x = 0

$$\frac{x-2}{x+1}=\frac{0-2}{0+1}=\frac{-2}{1}=-2$$

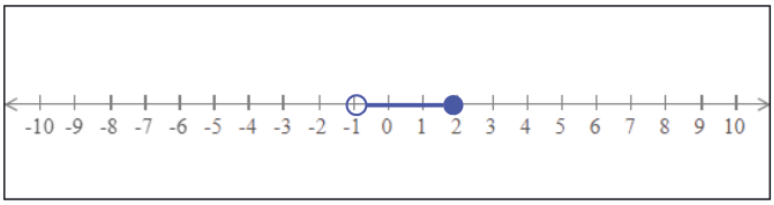
El signo es negativo –.

- Para (2, ∞), se elige x = 3

$$\frac{x-2}{x+1}=\frac{3-2}{3+1}=\frac{1}{4}$$

El signo es positivo +.

Al analizar el signo de $\frac{x-2}{x+1}$ sean solo los números de los intervalos negativos donde la fracción es menor o igual a cero, lo que incluye los puntos donde la fracción es cero. x = 2, entonces la expresión (–1,2] siento la solución de la desigualdad.



Respuesta: x ∈ (–1, 2]

Vamos a resolver la siguiente desigualdad o inecuación racional:

$$\frac{x+4}{x-2}\geq 3$$

Primero debemos dejar el 0 de este lado, es decir, debemos mover el 3 hacia la izquierda, dejándonos

$$\frac{x+4}{x-2}-3\geq 0$$

Podemos hacer resta parcial completando este 3 con el denominador 1

$$\frac{x+4}{x-2}-\frac{3}{1}\geq 0$$

Escribimos el denominador común

$$\frac{x+4-3(x-2)}{x-2}\geq 0$$

Hacemos distributiva con el menos tres menos tres por equis nos queda menos 3x y menos tres por menos dos nos quedan más seis todo esto sobre X^2 y mayor o igual a cero en el numerador.

$$\frac{x+4-3(x-2)}{x-2} \geq 0$$

Podemos operar términos semejantes por ejemplo x menos 3 x nos da menos 2 x 4 + 6 nos da 10 positivo y todo esto lo dividimos entre x menos 2 y todo esto mayor o igual a cero entonces hemos llevado el ejercicio al punto de dejar cero en el lado derecho y en el lado izquierdo una sola fracción.

$$\frac{-2x+10}{x-2} \geq 0$$

A continuación, encontraremos los llamados puntos críticos de la desigualdad, que son el numerador y el denominador, para igualar cada componente de la fracción a 0, usamos un numerador que igualamos a 0 y luego resolvemos paso a paso para x y despejamos.

Punto crítico del numerador

$-2x+10 = 0$

$-2x = -10$

$$x = \frac{-10}{-2}$$

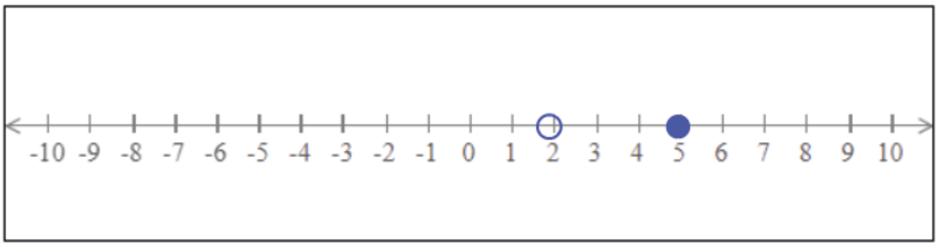
$x = 5$

Punto crítico del denominador

$x - 2 = 0$

$x = 2$

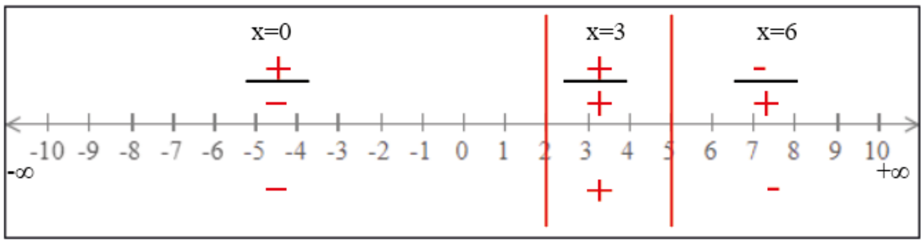
Debemos decidir si los puntos críticos van a tomarse o no como parte de la solución es decir si van abiertos o van cerrados veamos los puntos críticos del denominador jamás se van a tomar es decir que siempre van abiertos por qué razón porque dos no puede reemplazarse aquí dos no puede ser parte de la solución ya que volvería a cero el denominador. El numerador en este caso el 5 únicamente se tomarán si la desigualdad trae el signo mayor o igual o menor o igual como en este caso entonces para esta situación el 5 si se va a tomar porque si se reemplaza la equis por el 5 arriba nos da 0 y aquí se está contemplando la posibilidad de que esto sea igual a 0 por lo tanto el 5 si se incluye.



Ahora vamos a realizar el análisis del signo de esta expresión

$$\frac{-2x+10}{x-2} \geq 0$$

Es decir que esto debe ser positivo entonces vamos a hacer una recta donde marcamos los puntos críticos y empezamos a hacer el análisis en los diferentes intervalos



En la figura que antecede se determinan los intervalos dividiendo estos puntos la recta numérica siendo sus intervalos: (–∞, 2); (2, 5); y, (5, ∞); probamos los signos en cada intervalo escogiendo un valor en cada uno y verificando el signo de la expresión en ese intervalo,

- Para (–∞, 2), se elige x = 0

$$\frac{-2x+10}{x-2} = \frac{-2(0)+10}{-(0)-2} = \frac{10}{-2} = -5$$

El signo es negativo +.

- Para (2, 5), se elige x = 3

$$\frac{-2x+10}{x-2} = \frac{-2(3)+10}{3-2} = \frac{4}{1} = 4$$

El signo es positivo +.

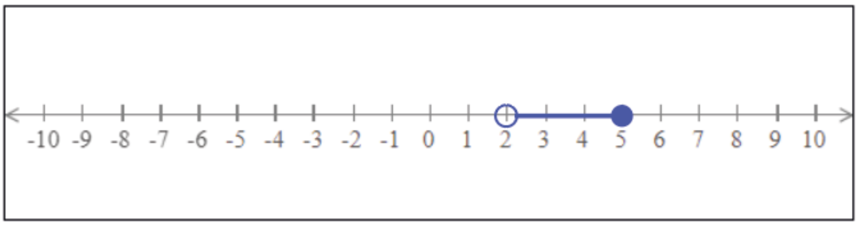
- Para (5, ∞), se elige x = 6

$$\frac{-2x+10}{x-2} = \frac{-2(6)+10}{6-2} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

El signo es negativo –.

Al analizar el signo de $\frac{-2x+10}{x-2}$ sean solo los números de los intervalos positivos donde la fracción es mayor o igual a cero, lo que incluye los puntos donde la fracción es cero. x = 5, entonces la expresión (2,5] o $2 < x \leq 5$ siento la solución de la desigualdad.

Respuesta: $x \in (2, 5]$



CAPÍTULO 3

Funciones

3

Capítulo

3

Funciones

¿Qué son las funciones?

En matemáticas, una función es una relación entre dos conjuntos, llamada dominio y rango, que asigna a cada elemento del dominio un único elemento del rango. En otras palabras, una función es una regla que establece cómo se transforma un valor de entrada (dominio) en un valor de salida (rango). (ACEVEDO FRIAS)

3.1 Representación de funciones

Las funciones se pueden representar de diversas maneras, incluyendo:

- **Notación matemática:** La forma más común de representar una función es mediante una ecuación matemática. Por ejemplo, la ecuación $f(x) = 2x + 1$ representa una función lineal que asigna a cada valor de x (dominio) un valor de $2x + 1$ (rango).
- **Tablas de valores:** Una tabla de valores muestra pares ordenados de (entrada, salida) que corresponden a la función. Por ejemplo, la función $f(x) = x^2$ se puede representar en una tabla de valores como:

Tabla 3.1

Tabulación de datos de la función

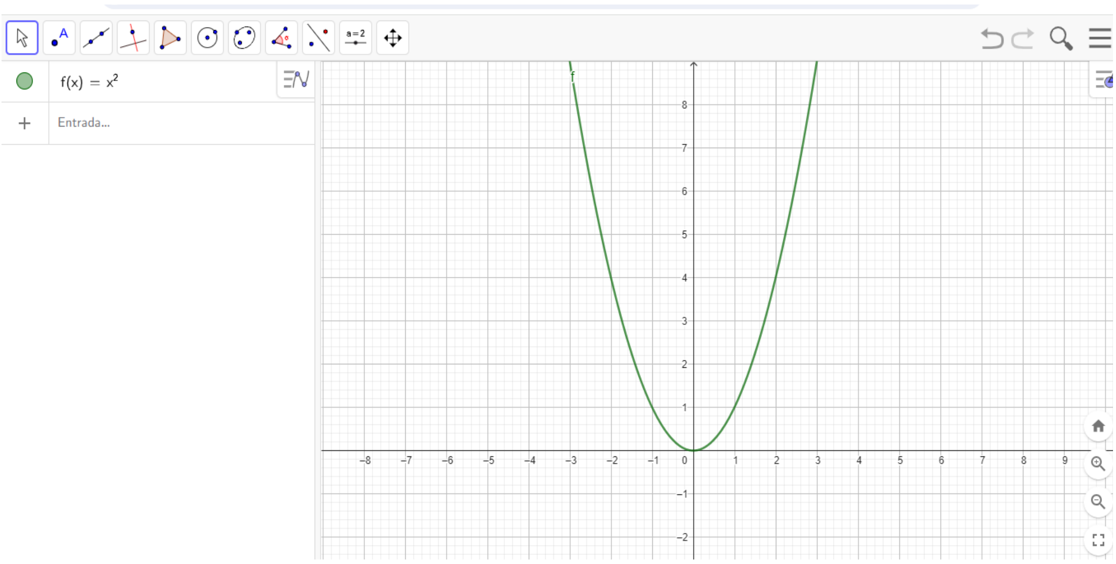
x	**f(x)**
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4

Nota. Tabulación de datos. (López,2024)

- **Gráficas:** La representación gráfica de una función es una curva que muestra la relación entre la variable independiente (dominio) y la variable dependiente (rango). La forma de la gráfica depende de la ecuación de la función.

Figura 3.1

Gráfica de la función



Nota. Gráfica de la Función en Geogebra. (Lara P. Jorge, 2015)

3.2 Elementos de una función

- **Dominio:** El conjunto de todos los valores válidos de la variable independiente (x) para los cuales la función está definida.

- **Rango:** El conjunto de todos los valores posibles de la variable dependiente (y) que la función puede tomar.

- **Imagen:** El subconjunto del rango que efectivamente se alcanza por la función.

- **Contraimagen:** El subconjunto del dominio para el cual cada elemento tiene un valor correspondiente en el rango.

Tipos de funciones

Existen diversos tipos de funciones, cada una con sus propias características y aplicaciones. Algunos ejemplos comunes son:

- **Funciones lineales:** Funciones cuya ecuación es de la forma $f(x) = mx + b$, donde m y b son constantes. Las gráficas de las funciones lineales son rectas.

- **Funciones cuadráticas:** Funciones cuya ecuación es de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, donde a, b y c son constantes. Las gráficas de las funciones cuadráticas son parábolas.

- **Funciones racionales:** Funciones cuya ecuación es de la forma $f(x) = p(x)/q(x)$ donde p(x) y q(x) son polinomios y q(x) ≠ 0. Las gráficas de las funciones racionales pueden tener asíntotas horizontales y verticales.

- **Funciones exponenciales:** Funciones cuya ecuación es de la forma $f(x) = a^x$, donde a es una constante positiva y a ≠ 1. Las gráficas de las funciones exponenciales crecen o decrecen exponencialmente.

- **Funciones logarítmicas:** Funciones cuya ecuación es de la forma $f(x) = log\ a(x)$ donde a es una constante positiva y a ≠ 1. Las gráficas de las funciones logarítmicas son inversas de las funciones exponenciales.

3.2.1 Dominio de una función

Definición

El dominio de una función es el conjunto de todos los valores válidos de la variable independiente (x) para los cuales la función está definida. En otras palabras, es el conjunto de todos los valores de x que podemos sustituir en la ecuación de la función para obtener un valor de y (variable dependiente) finito y real.

Representación del dominio

El dominio de una función se puede representar de diversas maneras, incluyendo:

- **Notación matemática:** El dominio se suele representar utilizando la notación D = {x |... }, donde las llaves indican un conjunto y los puntos suspensivos indican la condición que debe cumplir x para pertenecer al dominio. Por ejemplo, el dominio de la función $f(x) = 1/(x - 1)$ es D = {x | x ≠ 1}.

- **Gráfica:** La gráfica de una función puede mostrar visualmente el dominio. Las partes de la gráfica donde la función no está definida se representan con espacios o agujeros.

Restricciones del dominio

El dominio de una función puede estar restringido por diversas razones, como:

- **Denominadores cero:** Las funciones que contienen divisiones no pueden tener en el denominador valores que hagan que la división sea por cero. Por ejemplo, la función $f(x) = 1/(x - 1)$ no está definida para x = 1.

- **Raíces cuadradas:** Las funciones que contienen raíces cuadradas no pueden tener en el argumento valores menores que cero. Por ejemplo, la función $g(x) = \sqrt{(x)}$ no está definida para x < 0.

- **Logaritmos:** Las funciones que contienen logaritmos no pueden tener en el argumento valores menores o iguales que cero. Por ejemplo, la función $h(x) = \log(x)$ no está definida para $x \leq 0$.

Dominio de funciones comunes

- **Funciones lineales:** El dominio de una función lineal $f(x) = \mathrm{m}x$ es el conjunto de todos los números reales, es decir, D = R.

- **Funciones cuadráticas:** El dominio de una función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ es el conjunto de todos los números reales, es decir, D = R.

- **Funciones racionales:** El dominio de una función racional $f(x) = \mathrm{p(x)}/q(x)$, donde p(x) y q(x) son polinomios y q(x) ≠ 0, es el conjunto de todos los números reales excepto aquellos que hacen que el denominador sea cero. En otras palabras, D = {x | x ≠ r_1, x ≠ r_2, ..., x ≠ r_n}, donde r_1, r_2, ..., r_n son las raíces del polinomio q(x).

- **Funciones exponenciales:** El dominio de una función exponencial $f(x) = a^x$ donde a es una constante positiva y a ≠ 1, es el conjunto de todos los números reales, es decir, D = R.

- **Funciones logarítmicas:** El dominio de una función logarítmica $f(x) = loga(x)$ donde a es una constante positiva y a ≠ 1, es el conjunto de todos los números reales mayores que cero, es decir, D = {x | x > 0}.

Ejercicios para determinar el dominio

1. $f(x) = \frac{2\mathrm{x}}{\mathrm{x}-1}$

Análisis: La función tiene una división por x - 1, por lo que x - 1 ≠ 0. Esto significa que x ≠ 1.

Dominio: D = {x | x ∈ R, x ≠ 1}

Explicación:

- La función está definida para todos los números reales excepto 1.
- Se excluye el valor 1 porque la división por cero no está definida en los números reales.

2. $g(x) = \sqrt{}(x - 2)$

Análisis: La raíz cuadrada solo está definida para números no negativos. Por lo tanto, x - 2 ≥ 0. Esto significa que x ≥ 2.

Dominio: D = {x | x ∈ R, x ≥ 2}

Explicación:

- La función está definida para todos los números reales mayores o iguales que 2.
- Se excluyen los valores menores que 2 porque la raíz cuadrada de un número negativo no es un número real.

3. $h(x) = \log{(x + 1)}$

Análisis: El logaritmo solo está definido para números positivos. Por lo tanto, x + 1 > 0. Esto significa que x > -1.

Dominio: D = {x | x ∈ R, x > -1}

Explicación:

- La función está definida para todos los números reales mayores que -1.
- Se excluye el valor -1 porque el logaritmo de cero no está definido.

4. $i(x) = x^2 + 3x + 2$

Análisis: Esta es una función cuadrática, por lo que su dominio es todo el conjunto de números reales.

Dominio: D = R

Explicación:

- Las funciones cuadráticas no tienen restricciones de dominio en los números reales.
- Cualquier valor de x se puede sustituir en la ecuación sin problemas.

5. $j(x) = (x + 1)/(x^2 - 4x + 3$

Análisis: La función tiene una división por x^2 - 4x + 3, por lo que x^2 - 4x + 3 ≠ 0. Factorizando el polinomio, obtenemos (x - 1)(x - 3) ≠ 0. Esto significa que x ≠ 1 y x ≠ 3.

Dominio: D = {x | x ∈ R, x ≠ 1, x ≠ 3}

Explicación:

- La función está definida para todos los números reales excepto 1 y 3.
- Se excluyen los valores 1 y 3 porque la división por cero no está definida en los números reales.

3.2.2 Rango de una función

Definición

El rango de una función es el conjunto de todos los valores posibles que la función puede tomar. En otras palabras, es el conjunto de todos los valores de y (variable dependiente) que se obtienen al sustituir cualquier valor válido del dominio (x) en la ecuación de la función.

Representación del rango

El rango de una función se puede representar de diversas maneras, incluyendo:

- **Notación matemática:** El rango se suele representar utilizando la notación R = {y | ... }, donde las llaves indican un conjunto y los puntos suspensivos indican la condición que debe cumplir y para pertenecer al rango. Por ejemplo, el rango de la función $f(x) = x^2$ R = {y | y ≥ 0}.
- **Gráfica:** La gráfica de una función puede mostrar visualmente el rango. Los puntos que pertenecen a la gráfica representan valores que la función puede tomar.

Propiedades del rango

El rango de una función tiene algunas propiedades importantes:

- El rango puede ser vacío, finito o infinito.
- El rango no siempre es continuo.
- El rango depende de la ecuación de la función y del dominio.

Rango de funciones comunes

- **Funciones lineales:** El rango de una función lineal $f(x) = \mathrm{mx} + \mathrm{b}$ es el conjunto de todos los números reales, es decir, R = R.
- **Funciones cuadráticas:** El rango de una función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ depende del valor de la discriminante Δ = b^2 - 4ac. Si Δ > 0, el rango es R = R. Si Δ = 0, el rango es R = {y | y = f(v)}, donde v es el vértice de la parábola. Si Δ < 0, el rango es R = {y | y > f(v)}.
- **Funciones racionales:** El rango de una función racional $f(x) = p(x)/q(x)$, donde p(x) y q(x) son polinomios y q(x) ≠ 0, depende de los factores del polinomio q(x). En general, el rango es R = R \ {y | y = r_1, y = r_2, ..., y = r_n}, donde r_1, r_2, ..., r_n son las raíces del polinomio q(x).

- **Funciones exponenciales:** El rango de una función exponencial $f(x) = a^x$ donde a es una constante positiva y a ≠ 1, es el conjunto de todos los números reales positivos, es decir, R = {y | y > 0}.
- **Funciones logarítmicas:** El rango de una función logarítmica f(x) = log a (x), donde a es una constante positiva y a ≠ 1, es el conjunto de todos los números reales, es decir, R = R.

Ejercicios para determinar el rango

Rango de las funciones:

1. $f(x) = 2\text{x} + 1$

Análisis: La función f(x) = 2x + 1 es una función lineal. Las funciones lineales tienen un rango infinito.

Rango: R = R

Explicación:

- Para cualquier valor de x, la función f(x) puede tomar cualquier valor real.
- No hay valores que la función no pueda alcanzar.
- La gráfica de la función es una línea recta que se extiende infinitamente en ambas direcciones.

2. $g(x) = x^2 - 4x + 3$

Análisis: La función $g(x) = x^2 - 4x + 3$ es una función cuadrática. El rango de las funciones cuadráticas depende de la forma de la parábola.

Completar el cuadrado: Completando el cuadrado, podemos reescribir la función como $g(x) = (x - 2)^2 - 1$

Análisis del rango:

- La función $g(x) = (x-2)^2 - 1$ es una parábola con vértice en (2, -1).
- El valor mínimo de la parábola es -1, que se alcanza en el vértice.
- A medida que x se aleja del vértice en cualquier dirección, el valor de la función aumenta sin límite.
- Por lo tanto, el rango de la función es R = {y | y ≥ -1}.

Rango: R = {y | y ≥ -1}

Explicación:

- La función g(x) puede tomar cualquier valor real mayor o igual que -1.
- No hay valores menores que -1 que la función pueda alcanzar.
- La gráfica de la función es una parábola que se abre hacia arriba y tiene un vértice en (2, -1).

3. $h(x) = 1/(x-2)$

Análisis: La función $h(x) = 1/(x-2)$ es una función racional. El rango de las funciones racionales depende de los factores del denominador.

Factores del denominador: El denominador de la función es x - 2, que no tiene factores.

Análisis del rango:

- La función h(x) está definida para todos los números reales excepto 2, ya que la división por cero no está definida.
- A medida que x se acerca a 2 desde cualquier dirección, el valor de la función aumenta o disminuye sin límite.
- Por lo tanto, el rango de la función es R \ {y | y = 0}.

Rango: R \ {y | y = 0}

Explicación:

- La función h(x) puede tomar cualquier valor real excepto 0.
- No puede alcanzar el valor 0 porque la división por cero no está definida.
- La gráfica de la función es una hipérbola que tiene dos asíntotas horizontales en y = 0 y y = ∞.

4. $i(x) = \sqrt{}(x)$

Análisis: La función $i(x) = \sqrt{}(x)$es una función radical. El rango de las funciones radicales depende de la restricción de la raíz cuadrada.

Restricción de la raíz cuadrada: La raíz cuadrada solo está definida para números no negativos.

Análisis del rango:

- La función i(x) está definida para todos los números reales mayores o iguales a 0.
- A medida que x aumenta desde 0, el valor de la función aumenta sin límite.
- Por lo tanto, el rango de la función es R = {y | y ≥ 0}.

Rango: R = {y | y ≥ 0}

Explicación:

- La función i(x) puede tomar cualquier valor real mayor o igual que 0.
- No puede alcanzar valores negativos porque la raíz cuadrada de un número negativo no es un número real.
- La gráfica de la función es una curva que se extiende infinitamente hacia la derecha desde el origen (0, 0).

5. $j(x) = log(x + 2)$

Análisis: La función j(x) = log(x + 2) es una función logarítmica. El rango de las funciones logarítmicas depende de la restricción del logaritmo.

Restricción del logaritmo: El logaritmo solo está definido para números positivos.

Análisis del rango:

- La función j(x) está definida para todos los números reales mayores que -2.
- A medida que x aumenta desde -2, el valor de la función aumenta sin límite.
- Por lo tanto, el rango de la función es R =(-2, ∞)

Coordenadas rectangulares

Las coordenadas rectangulares, también conocidas como sistema cartesiano, son un método para ubicar puntos en un plano bidimensional utilizando dos ejes perpendiculares: el eje horizontal (x) y el eje vertical (y). Este sistema fue desarrollado por René Descartes en el siglo XVII y se ha convertido en una herramienta fundamental en matemáticas, física, ingeniería y otras áreas.

Componentes clave:

- **Ejes:** El sistema cartesiano se compone de dos líneas rectas perpendiculares que se cruzan en un punto llamado origen (0, 0). El eje horizontal se extiende hacia la derecha y hacia la izquierda del origen, y se representa con la letra x. El eje vertical se extiende hacia arriba y hacia abajo del origen, y se representa con la letra y.

- **Cuadrantes:** Los ejes dividen el plano en cuatro regiones llamadas cuadrantes, numerados del I al IV en sentido contrario a las agujas del reloj. Cada cuadrante tiene una combinación específica de signos para las coordenadas x e y:
    - **Cuadrante I:** $x > 0, y > 0$
    - **Cuadrante II:** $x < 0, y > 0$

    - **Cuadrante III:** $x < 0$, $y < 0$
    - **Cuadrante IV:** $x > 0$, $y < 0$

- **Pares ordenados:** La ubicación de un punto en el plano se define por un par ordenado de números reales (x, y), donde x representa la distancia horizontal desde el origen al punto sobre el eje x, y y representa la distancia vertical desde el origen al punto sobre el eje y.
-

3.2.3 Representación gráfica

Para representar un punto en el plano usando coordenadas rectangulares, se siguen estos pasos:

1. **Ubicar el cuadrante:** Determine el signo de las coordenadas x e y para identificar el cuadrante correspondiente.

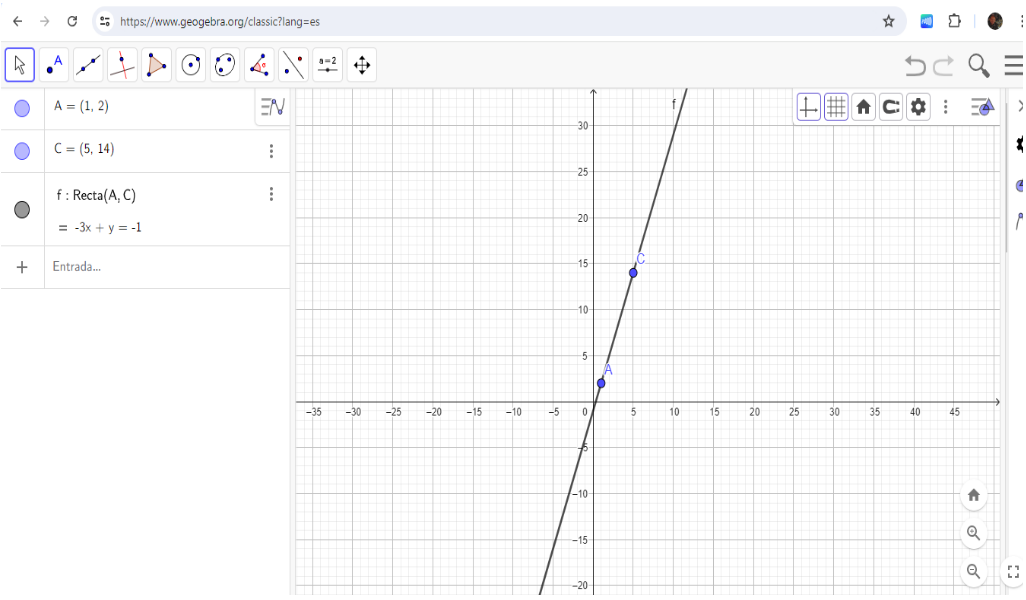
2. **Mover horizontalmente:** Desplace la distancia $|x|$ unidades a la derecha (si $x > 0$) o a la izquierda (si $x < 0$) desde el origen sobre el eje x.

3. **Mover verticalmente:** Desplace la distancia $|y|$ unidades hacia arriba (si $y > 0$) o hacia abajo (si $y < 0$) desde el punto ubicado en el paso 2 sobre el eje y.

4. **Marcar el punto:** La intersección de los dos desplazamientos marca la ubicación del punto con las coordenadas (x, y).

Figura 3.2

Coordenadas rectangulares



Nota: Gráfica de Coordenadas Rectangulares (López, 2024)

Ecuación de la recta en el espacio tridimensional (x, y, z)

En el espacio tridimensional, la ecuación de una recta puede expresarse de diversas maneras, cada una con sus propias características y aplicaciones. A continuación, se presentan las dos formas más comunes para representar la ecuación de una recta en 3D:

Ecuación vectorial

La ecuación vectorial de una recta describe la posición de cualquier punto sobre la recta como una combinación lineal de un vector director y un vector de posición de un punto conocido sobre la recta. Se representa de la siguiente manera:

$r = r_0 + t \cdot d$

Donde:

- **r:** Representa la posición vectorial de un punto genérico sobre la recta.

- $\mathbf{r_0}$**:** Representa el vector de posición de un punto conocido sobre la recta, llamado "punto de referencia".

- **t:** Es un parámetro escalar que varía desde $-\infty$ hasta ∞ y determina la posición del punto sobre la recta respecto al punto de referencia.

- **d:** Representa el vector director de la recta, que indica la dirección en la que se extiende la recta.

Ejemplo:

Una recta que pasa por el punto P(1, 2, 3) y tiene una dirección dada por el vector d = (2, -1, 1) puede representarse con la siguiente ecuación vectorial:

r = (1, 2, 3) + t·(2, -1, 1)

3.3 Funciones cuadráticas y ecuación general

Las funciones cuadráticas, también conocidas como funciones de segundo grado, son un tipo fundamental de función que se caracteriza por su comportamiento parabólico y su amplia aplicabilidad en diversos campos. A diferencia de las funciones lineales, las funciones cuadráticas involucran el cuadrado de la variable independiente, lo que les otorga una forma única y propiedades interesantes.

Elementos clave

La ecuación general de una función cuadrática se expresa como:

$$f(x) = ax^x + bx + c$$

Donde:

- **a** es el coeficiente cuadrático, que determina la orientación y la forma general de la parábola. Si $a > 0$, la parábola abre hacia arriba. Si $a < 0$, la parábola abre hacia abajo. Si $a = 0$, la función no es cuadrática.

- **b** es el coeficiente lineal, que afecta la posición del vértice de la parábola en el eje x.

- **c** es el término independiente, que determina el punto de intersección de la parábola con el eje y.

Vértice, raíces y gráfica

El vértice de la parábola representa el punto máximo o mínimo de la función, dependiendo de la orientación de la parábola. Se puede calcular utilizando la fórmula:

Vértice = (h, k) = (-b / 2a, f(-b / 2a))

Las raíces de la función cuadrática son los valores de x para los cuales la función vale cero. Se pueden encontrar utilizando la fórmula cuadrática:

$$\boldsymbol{x} = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}/2a$$

La gráfica de una función cuadrática es una parábola, una curva en forma de "U" que se abre hacia arriba o hacia abajo. La forma y la posición de la parábola dependen de los valores de a, b y c.

Propiedades importantes

Las funciones cuadráticas tienen algunas propiedades importantes que las distinguen de otros tipos de funciones:

- **Monotonicidad:** Las funciones cuadráticas son monótonas crecientes o decrecientes en intervalos específicos, dependiendo de la orientación de la parábola.

- **Asimetría:** Las funciones cuadráticas no son simétricas con respecto al eje y, pero sí pueden ser simétricas con respecto al eje vertical que pasa por el vértice.

- **Puntos máximos y mínimos:** Las funciones cuadráticas tienen un único punto máximo o mínimo, dependiendo del valor del coeficiente cuadrático.

Ecuación general de la función cuadrática

Para encontrar la ecuación general de la función cuadrática que pasa por los puntos (1, 2), (3, 7) y (5, 14), podemos utilizar el siguiente sistema de ecuaciones:

$f(1) = 1$
$f(3) = 7$
$f(5) = 14$

Sustituyendo la ecuación general de la función cuadrática en cada ecuación del sistema, obtenemos:

$a + b + c = 2$

$9a + 3b + c = 7$

$25a + 5b + c = 14$

Resolviendo este sistema de ecuaciones, se encuentran los valores de a, b y c:
$a = 1$
$b = -3$
$c = 4$

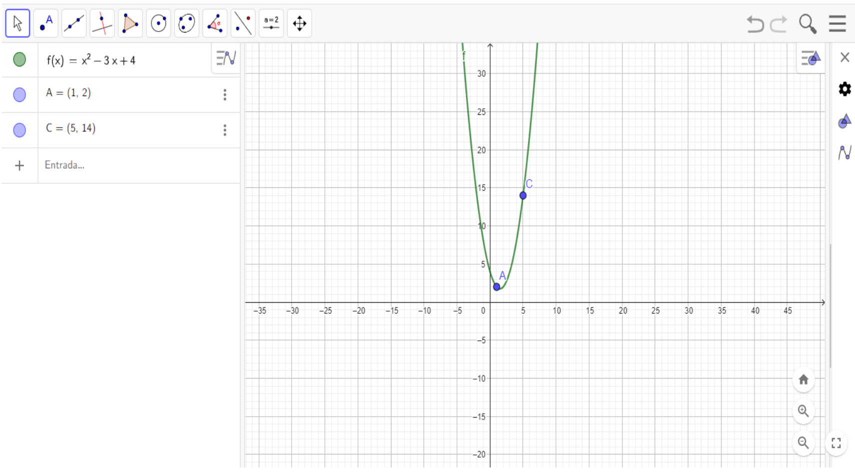
Reemplazando estos valores en la ecuación general, se obtiene la ecuación de la función cuadrática:

$$\boldsymbol{f(x)} = x^2 - 3x + 4$$

Gráfica

Ilustración 3.3

Gráfica de la función cuadrática



Nota. Gráfica de la Función (Lara P. Jorge, 2015)

Aplicaciones de las funciones

Las funciones tienen una amplia gama de aplicaciones en diversos campos, como:

- **Física:** Las funciones se utilizan para modelar fenómenos físicos como el movimiento, la fuerza, la energía y la temperatura.
- **Ingeniería:** Las funciones se utilizan para diseñar y analizar sistemas, estructuras y dispositivos.
- **Economía:** Las funciones se utilizan para modelar relaciones económicas como la oferta, la demanda, el precio y el beneficio.
- **Ciencias sociales:** Las funciones se utilizan para analizar datos y modelar comportamientos sociales.

Biología: Las funciones se utilizan para modelar procesos biológicos como el crecimiento de la población, la propagación de enfermedades y la evolución

CAPÍTULO 4

Matrices

4

Capítulo

4

Matrices

Introducción

Las matrices son una herramienta fundamental en el álgebra lineal, las mismas tienen numerosas aplicaciones en diversas áreas de las matemáticas, ciencias e ingeniería. Este capítulo explora las propiedades y operaciones de las matrices, así como conceptos avanzados como la matriz inversa, determinantes y la regla de Cramer para resolver sistemas de ecuaciones lineales.

Las matrices son estructuras matemáticas fundamentales, los cuales permiten organizar y manipular datos de manera eficiente. Su estudio es crucial en el álgebra lineal y tiene numerosas aplicaciones en diversas áreas de la ciencia, la ingeniería y la economía. Esta sección introduce el concepto de matrices y destaca su importancia a través de ejemplos concretos de aplicaciones.

Definición básica

Una matriz es un arreglo rectangular de números o símbolos, organizados en filas y columnas. Formalmente, una matriz A de tamaño $m \times n$ se representa como:

$$A = [aij] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

1. donde a_{ij} representa el elemento en la i-ésima fila y j-ésima columna.

Ejemplos de aplicaciones:

Sistemas de ecuaciones lineales

Las matrices son fundamentales para representar y resolver sistemas de ecuaciones lineales. Por ejemplo, el sistema:

$$2x + 3y = 8$$
$$4x - y = 1$$

puede representarse matricialmente como:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Transformaciones geométricas

Las matrices también son utilizadas para representar transformaciones como rotaciones, escalados y traslaciones. Por ejemplo, una rotación de θ grados en el plano xy se puede representar como:

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -sen\ \theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Análisis de redes sociales

Las matrices de adyacencia se utilizan para representar relaciones en redes sociales. Por ejemplo, en una red de 4 personas, donde 1 indica una conexión y 0 la ausencia de esta:

$A\ B\ C\ D$

$A \begin{bmatrix} 0\ 1\ 0\ 1 \end{bmatrix}$

$B \,|1\ 0\ 1\ 0|$

$C \,|0\ 1\ 0\ 1|$

$D \,\lfloor 1\ 0\ 1\ 0 \rfloor$

Modelos económicos

En economía, las matrices se usan en modelos de insumo-producto para analizar las relaciones entre diferentes sectores de la economía. Por ejemplo, una matriz simplificada de 3 sectores:

4.1 Propiedades y operaciones de las matrices

Una matriz es una disposición rectangular de números o símbolos organizados en filas y columnas. Las matrices se utilizan para representar sistemas de ecuaciones lineales, transformaciones lineales y datos estructurados (Lay et al., 2016).

Definición: Una matriz A de tamaño m × n es un arreglo rectangular de mn elementos aij dispuestos en m filas y n columnas:

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Donde a_{ij} representa el elemento en la i-ésima fila y j-ésima columna.

4.1.1 Tipos de matrices

Matriz cuadrada: Una matriz con igual número de filas y columnas.

Matriz rectangular: Una matriz con diferente número de filas y columnas.

Matriz nula: Una matriz cuyos elementos son todos cero.

Matriz identidad: Una matriz cuadrada con unos en la diagonal principal y ceros en el resto.

Matriz diagonal: Una matriz cuadrada con elementos no nulos solo en la diagonal principal.

Matriz triangular: Una matriz cuadrada con todos los elementos por encima (superior) o por debajo (inferior) de la diagonal principal iguales a cero.

4.1.2 Operaciones con matrices

Suma de matrices

La suma de dos matrices A y B de igual tamaño $m \times n$ se define como:

$$(A + B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 2+3 & 1+0 \\ 3+1 & 4+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$$

Multiplicación por escalar

Para un escalar k y una matriz A, la multiplicación por escalar se define como:

$$(kA)_{ij} = k \cdot a_{ij}$$

Ejemplo:

$$k = 2, \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$2A = \begin{bmatrix} 2*2 & 2*1 \\ 2*3 & 2*4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$$

Multiplicación de matrices

El producto de dos matrices $A_{(m\times n)}$ y $B_{(n\times p)}$ resulta en una matriz $C_{(m\times p)}$:

$$c_{ij} = \Sigma(k = 1\ to\ n)\ a_{ik} \cdot b_{kj}$$

Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A * B = \begin{bmatrix} 1*0+2*2 & 1*1+2*3 \\ 3*0+4*2 & 3*1+4*3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 8 & 15 \end{bmatrix}$$

4.1.3 Propiedades de las operaciones matriciales

Conmutatividad de la suma: $A + B = B + A$

Asociatividad de la suma: $(A + B) + C = A + (B + C)$

Distributividad de la multiplicación escalar: $k(A + B) = kA + kB$

Asociatividad de la multiplicación: $(AB)C = A(BC)$

Distributividad de la multiplicación: $A(B + C) = AB + AC$

No conmutatividad de la multiplicación: En general, $AB \neq BA$

Ejemplo de no conmutatividad

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A * B = \begin{bmatrix} 1*0+2*2 & 1*1+2*3 \\ 3*0+4*2 & 3*1+4*3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 8 & 15 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}; \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B * A = \begin{bmatrix} 0*1+1*3 & 0*2+1*4 \\ 2*1+3*3 & 2*2+4*3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 11 & 16 \end{bmatrix}$$

Como se puede observar, $AB \neq BA$.

4.1.4 Transposición de matrices

La transpuesta de una matriz A, denotada como A^T, se obtiene intercambiando las filas y columnas de A.

Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Propiedades de la transposición:

$$(A^T)^T = A$$

$$(A + B)^T = A^T + B^T$$

$$(kA)^T = kA^T$$

$$(AB)^T = B^T * A^T$$

Esta sección proporciona una base sólida para comprender las operaciones fundamentales con matrices. En las siguientes secciones, exploraremos conceptos más avanzados como la matriz inversa, determinantes y la regla de Cramer.

4.2 Matriz inversa

La matriz inversa es un concepto fundamental en álgebra lineal que tiene aplicaciones importantes en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales y en diversas áreas de las matemáticas aplicadas.

4.2.1 Definición de matriz inversa

Para una matriz cuadrada A, su inversa $A^{(-1)}$ es aquella matriz que, al multiplicarse por la A, produce la matriz identidad I:

$$A * A^{(-1)} = A^{(-1)} * A = I$$

Es importante notar que no todas las matrices cuadradas tienen inversa. Aquellas que sí la tienen se denominan matrices invertibles o no singulares.

4.2.2 Propiedades de la matriz inversa

Unicidad: Si existe, la inversa de una matriz es única.

$$(A^{(-1)})^{(-1)} = A$$

$$(kA)^{-1} = \left(\frac{1}{k}\right)A^{-1}, \qquad para\ k \neq 0$$

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1} * A^{-1}$$

4.2.3 Cálculo de la matriz inversa para matrices 2x2

Para una matriz 2x2:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Su inversa, si existe, se calcula como:

$$A^{-1} = \left(\frac{1}{(ad - bc)}\right) \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Donde (ad – b c) es el determinante de A y debe ser diferente de cero para que A sea invertible.

Ejemplo:

Calcular la inversa de $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

Paso 1: Calcular el determinante

$$det(A) = (2)(3) - (1)(1) = 6 - 1 = 5$$

Paso 2: Aplicar la fórmula

$$A^{-1} = (1/5) \cdot \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Paso 3: Simplificar

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3/5 & -1/5 \\ -1/5 & 2/5 \end{bmatrix}$$

Verificación:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 3/5 & -1/5 \\ -1/5 & 2/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4.2.4 Método de Gauss-Jordan para matrices de orden superior

Para matrices de orden superior a $2x2$, se puede utilizar el método de Gauss-Jordan para encontrar la inversa. Este método consiste en aplicar operaciones elementales de fila a la matriz aumentada $[A|I]$ hasta obtener $[I|A^{-1}]$.

Ejemplo:

Encontrar la inversa de $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

Paso 1: Formar la matriz aumentada $[A|I] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Paso 2: Aplicar operaciones elementales de fila

$R1 \rightarrow R1$

$R2 \rightarrow R2$

$R3 \rightarrow R3 - R1$

$$[A|I] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & | & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$R1 \rightarrow R1 - 2R2$

$R2 \rightarrow R2$

$R3 \rightarrow R3 + 2R2$

$$[A|I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & | & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & | & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$R1 \rightarrow R1 + (1/2)R3$

$R2 \rightarrow R2 - (1/4)R3$

$R3 \rightarrow (1/4)R3$

$$[A|I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & -1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/4 & 1/2 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 & -1/4 & 1/2 & 1/4 \end{array}\right]$$

Por lo tanto, la matriz inversa es:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1 & 1/2 \\ 1/4 & 1/2 & -1/4 \\ -1/4 & 1/2 & 1/4 \end{bmatrix}$$

4.2.5 Aplicaciones de la matriz inversa

La matriz inversa tiene numerosas aplicaciones, incluyendo:

Resolución de sistemas de ecuaciones lineales: $Ax = b \rightarrow x = A^{-1} * b$

Cálculo de la matriz de transformación inversa en gráficos por computadora

Análisis de circuitos eléctricos

Modelos económicos de insumo-producto

La comprensión de la matriz inversa es crucial para abordar problemas más complejos en álgebra lineal y sus aplicaciones en diversas disciplinas.

4.3 Determinantes de $2x2$ y orden superior

Los determinantes son valores escalares asociados a matrices cuadradas que tienen importantes aplicaciones en álgebra lineal y geometría.

4.3.1 Definición y propiedades básicas

El determinante de una matriz cuadrada A se denota como $det(A)$ o $|A|$. Para matrices $2x2$, el determinante se calcula de manera sencilla, mientras que para matrices de orden superior se utilizan métodos más complejos.

Propiedades fundamentales de los determinantes:

$det(I) = 1$, donde I es la matriz identidad

$det(AB) = det(A) \cdot det(B)$

$det(A^T) = det(A)$

Si A es invertible, $det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)}$

El determinante de una matriz triangular es el producto de sus elementos diagonales

4.3.2 Cálculo de determinantes $2x2$

Para una matriz $2x2$:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

El determinante se calcula como:

$$det(A) = ad - bc$$

Ejemplo:

Calcular el determinante de $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

$$det(A) = (3)(4) - (2)(1) = 12 - 2 = 10$$

4.3.3 Determinantes de orden superior

Para matrices de orden superior a $2x2$, existen varios métodos para calcular el determinante:

Expansión por cofactores (o desarrollo de Laplace)

Método de Gauss (triangularización)

Regla de Sarrus (solo para matrices $3x3$)

Nos enfocaremos en la expansión por cofactores, siendo un método general aplicable a matrices de cualquier orden.

Expansión por cofactores:

Para una matriz A de orden n, el determinante se puede calcular expandiendo a lo largo de cualquier fila o columna:

$$det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot M_{ij}$$

donde a_{ij} es el elemento en la fila i, columna j, y M_{ij} es el menor correspondiente (determinante de la submatriz que resulta de eliminar la fila i y la columna j de A).

Ejemplo:

Calcular el determinante de $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & -4 \end{bmatrix}$

Expandiendo por la primera fila:

$$det(A) = 2 \cdot \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} + (-1) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} + 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$det(A) = 2 \cdot (5 \cdot (-4) - 0 \cdot 2) + (-1) \cdot (1 \cdot (-4) - 0 \cdot 0) + 3 \cdot (1 \cdot 2 - 5 \cdot 0)$$

$$det(A) = 2 \cdot (-20) + (-1) \cdot (-4) + 3 \cdot 2 = -40 + 4 + 6 = -30$$

4.3.4 Propiedades adicionales de los determinantes

Si una matriz tiene una fila o columna de ceros, su determinante es cero.

Si se intercambian dos filas o columnas de una matriz, el signo del determinante cambia.

Si una matriz tiene dos filas o columnas iguales, su determinante es cero.

El determinante de una matriz es igual al determinante de su transpuesta.

Si se multiplica una fila o columna por un escalar k, el determinante se multiplica por k.

4.3.5 Aplicaciones de los determinantes

Los determinantes tienen numerosas aplicaciones en matemáticas y física, incluyendo: Determinar si una matriz es invertible $(det(A) \neq 0)$

Calcular el área de un paralelogramo y el volumen de un paralelepípedo

Resolver sistemas de ecuaciones lineales mediante la regla de Cramer

Cambios de variables en integrales múltiples (Jacobiano)

Análisis de circuitos eléctricos

Ejemplo de aplicación:

Calcular el área del paralelogramo formado por los vectores $u = (3,1)$ y $v = (2,4)$. El área se puede calcular como el valor absoluto del determinante de la matriz formada por los vectores:

$$A = \left| det\left(\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\right) \right|$$

$$A = |3 \cdot 4 - 2 \cdot 1| = |12 - 2| = 10$$

Por lo tanto, el área del paralelogramo es 10 unidades cuadradas.

La comprensión de los determinantes es fundamental para abordar temas más avanzados en álgebra lineal y sus aplicaciones en diversas áreas de las matemáticas y la física.

4.4 Regla de Cramer

La Regla de Cramer es un método para resolver sistemas de ecuaciones lineales utilizando determinantes. Aunque no es el método más eficiente para sistemas grandes, es una herramienta valiosa para sistemas pequeños y tiene importantes aplicaciones teóricas.

4.4.1 Definición y aplicabilidad

La Regla de Cramer se aplica a sistemas de ecuaciones lineales con el mismo número de ecuaciones que de incógnitas, y solo cuando el determinante de la matriz de coeficientes es diferente de cero.

Consideremos el sistema de ecuaciones lineales $Ax = b$, donde A es una matriz cuadrada $n \times n$, x es el vector de incógnitas, y b es el vector de términos independientes.

4.4.2 Formulación de la Regla de Cramer

Para un sistema de n ecuaciones con n incógnitas, la solución para la i-ésima variable x_i está dada por:

$$x_i = \frac{det\ (\mathrm{A}_i)}{det\ (\mathrm{A})}$$

Donde A_i es la matriz resultante al reemplazar la i-ésima columna de A por el vector b.

4.4.3 Ejemplo detallado

Resolvamos el siguiente sistema de ecuaciones usando la Regla de Cramer:

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 8 \\ -3x - y + 2z = -11 \\ -2x + y + 2z = -3 \end{cases}$$

Paso 1: Escribir la matriz de coeficientes A y el vector b

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -3 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}; \quad b = \begin{bmatrix} 8 \\ -11 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Paso 2: Calcular $det(A)$

$$det(A) = 2 \cdot (-1 \cdot 2 - 1 \cdot 2) - 1 \cdot (-3 \cdot 2 - (-2) \cdot 2) + (-1) \cdot (-3 \cdot 1 - (-2) \cdot (-1))$$

$$det(A) = 2 \cdot (-4) - 1 \cdot (-2) + (-1) \cdot (-1)$$

$$det(A) = -8 + 2 - 1$$

$$det(A) = -7$$

Paso 3: Calcular $det(A_1)$, $det(A_2)$, $det(A_3)$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 8 & 1 & -1 \\ -11 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 8 & -1 \\ -3 & -11 & 2 \\ -2 & -3 & 2 \end{bmatrix} \quad A_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 8 \\ -3 & -1 & -11 \\ -2 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$det(A1) = 8 \cdot (-1 \cdot 2 - 1 \cdot 2) - 1 \cdot (-11 \cdot 2 - (-3) \cdot 2) + (-1) \cdot (-11 \cdot 1 - (-3) \cdot (-1))$$

$$det(A1) = 8 \cdot (-4) - 1 \cdot (-16) + (-1) \cdot (-8)$$

$$det(A1) = -32 + 16 + 8$$

$$det(A1) = -8$$

$$det(A2) = 2 \cdot (-11 \cdot 2 - (-3) \cdot 8) - 8 \cdot (-3 \cdot 2 - (-2) \cdot 8) + (-1) \cdot (-3 \cdot (-3) - (-2) \cdot (-11))$$

$$det(A2) = 2 \cdot (-22 + 24) - 8 \cdot (-6 + 16) + (-1) \cdot (9 - 22)$$

$$det(A2) = 2 \cdot 2 - 8 \cdot 10 + 13$$

$$det(A2) = 4 - 80 + 13$$

$det(A2) = -63$

$$det(A3) = 2 \cdot (-1 \cdot (-3) - 1 \cdot (-11)) - 1 \cdot (-3 \cdot (-3) - (-2) \cdot (-11)) + 8 \cdot (-3 \cdot 1 - (-2) \cdot (-1))$$

$det(A3) = 2 \cdot (3 + 11) - 1 \cdot (9 - 22) + 8 \cdot (-3 + 2)$

$det(A3) = 2 \cdot 14 - 1 \cdot (-13) + 8 \cdot (-1)$

$det(A3) = 28 + 13 - 8$

$det(A3) = 33$

Paso 4: Aplicar la regla de Cramer,

$$x = \frac{det(A_1)}{det(A)} = \frac{-8}{-7} = \frac{8}{7}$$

$$y = \frac{det(A_2)}{det(A)} = \frac{-63}{-7} = 9$$

$$z = \frac{det(A_3)}{det(A)} = \frac{33}{-7} = -\frac{33}{7}$$

Por lo tanto, la solución del sistema es:

$$x = \frac{8}{7}, \quad y = 9, \quad z = -\frac{33}{7}$$

4.4.4 Ventajas y limitaciones de la Regla de Cramer

Ventajas

Proporciona una fórmula explícita para la solución.

Es útil para sistemas pequeños (2×2 o 3×3).

Tiene importancia teórica en álgebra lineal.

Limitaciones:

Ineficiente para sistemas grandes debido al costo computacional de calcular determinantes.

No aplicable a sistemas con infinitas soluciones o sin solución.

Puede ser numéricamente inestable para ciertos tipos de matrices.

4.4.5 Aplicaciones de la regla de Cramer

La Regla de Cramer encuentra aplicaciones en diversos campos:

Resolución de circuitos eléctricos simples.

Análisis de estructuras en ingeniería civil.

Problemas de optimización en economía.

Cálculos en geometría analítica.

Conclusión:

La Regla de Cramer es una herramienta valiosa en el arsenal del álgebra lineal. Aunque no es el método más eficiente para resolver sistemas grandes, proporciona una conexión importante entre determinantes y sistemas de ecuaciones lineales, y sigue siendo útil en aplicaciones prácticas para sistemas pequeños.

CAPÍTULO 5

Espacios vectoriales

5

Capítulo

5

Espacios vectoriales

5.1 Espacios vectoriales definiciones básicas

Magnitudes vectoriales. Son aquellas que poseen módulo, dirección y sentido. Ejemplos: La posición, la velocidad, la aceleración, la fuerza, etc.

Magnitudes escalares. Son aquellas que poseen solo módulo. Ejemplos: La distancia, el trabajo o energía, la potencia, la temperatura, etc.

Sistemas de referencia. Es un marco de referencia utilizado para describir la posición y el movimiento de los objetos en el espacio. Un observador imaginario o real, realiza la medición de una magnitud física. Los sistemas de referencia pueden ser:

Sistema de referencia fijo. Es un sistema que se mantiene fijo o sin movimiento en referencia a o respecto a otro sistema, que también puede a su vez estar fijo o en movimiento. El más conocido de este tipo de sistemas es: tierra, la misma que para nosotros se supone que está fija y que no se mueve.

Sistemas de referencia matemáticos. Los más utilizados son:

- Plano cartesiano o eje de coordenadas cartesianas.
- Eje de coordenadas polares.

Vector

Según (STEWART, 2015) los científicos utilizan el término **vector** para indicar una cantidad (como desplazamiento, velocidad o fuerza) que posee tanto magnitud como dirección.

Un vector se puede expresar de varias formas, dependiendo del contexto en el que se esté trabajando.

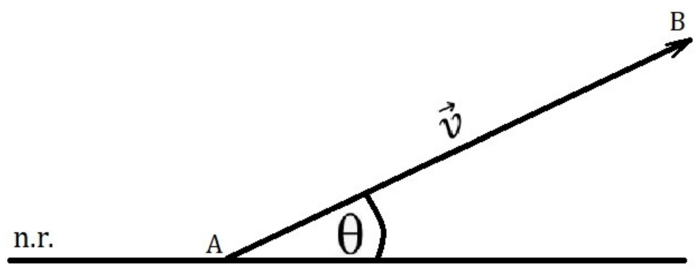
Representamos a un vector con una flecha o un segmento de recta dirigido, la longitud de la flecha representa la magnitud del vector, y la flecha apunta en la dirección del vector.

En la Notación Algebraica General, en contextos más generales, especialmente en el ámbito abstracto de los espacios vectoriales, representamos un vector colocando una letra en negritas (**v**) o también colocando una pequeña flecha sobre la letra así: $(\vec{v})$.

Vectores. Una magnitud vectorial se representa con un vector. Esto es:

Figura 1

Representación de un vector



Donde:

n.r.: nivel o sistema de referencia

A: punto inicial

B. punto final

$\vec{v}$ o $\overrightarrow{AB}$: vector v o vector AB

v o AB: módulo o longitud del vector $\vec{V}$

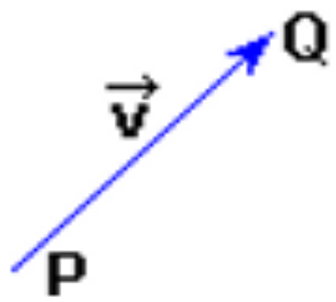
θ: dirección del vector $\vec{v}$.

Un vector no tiene una ubicación definida; puede trasladarse a cualquier lugar del plano sin modificar ni su módulo, ni su orientación (dirección y sentido). Por esta razón se dice que los vectores son libres (ACEVEDO FRIAS).

Los vectores se expresan con una letra minúscula o con dos letras mayúsculas, su origen y su extremo respectivos. Por ejemplo, $\vec{v} = \overrightarrow{PQ}$ indica el vector que tiene origen en el punto P y su extremo en el punto Q (Khan Academy, 2022).

Figura 2

Origen y extremo de un vector



Siempre que sea posible, pondremos una flecha encima para indicar que se trata de un vector.

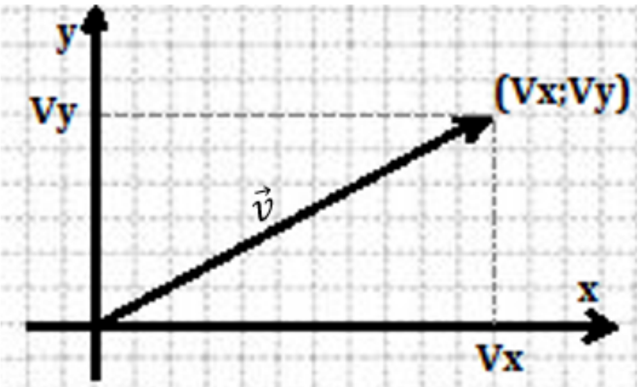
Módulo de un vector. También denominado norma o distancia.

Es la longitud de un vector y se calcula con la fórmula de la distancia entre dos puntos (teorema de Pitágoras). El módulo de un vector se lo denota con || v ||. Para su cálculo tenemos dos casos:

Caso 1. Cuando el punto de inicio del vector coincide con el origen del plano cartesiano.

Figura 3

Módulo de un vector que parte del origen

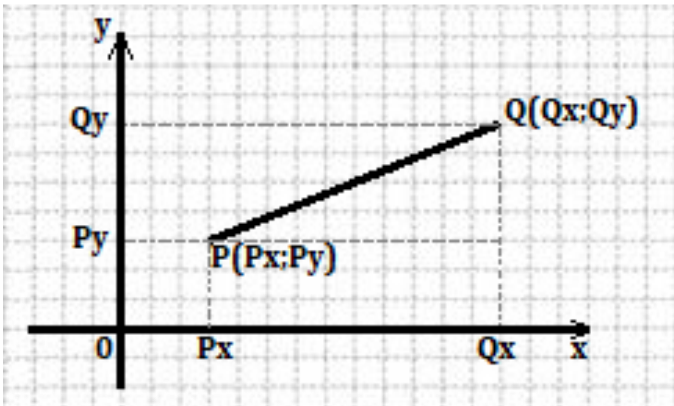


Su fórmula es: $\|v\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$

Caso 2. Cuando el punto de inicio del vector es otro diferente al origen del plano cartesiano.

Gráfico 4

Módulo de un vector que no parte del origen



Su fórmula es: $\|PQ\| = \sqrt{(Qx - Px)^2 + (Qy - Py)^2}$

Tipos de vectores

- **Vector fijo**. Es aquel cuyo efecto se fija en un solo punto de acción. Ej.: el peso que ejerce un objeto sobre una superficie plana.
- **Vectores iguales**. Dos o más vectores son iguales si poseen le mismo módulo dirección y sentido.
- **Vector negativo**. Un vector es negativo o equilibrante de otro si los dos poseen el mismo módulo y dirección, pero sentido contrario el uno del otro.
- **Vector unitario**. Es aquel cuyo módulo es igual a la unidad [1].
- **Vector nulo**. Es aquel cuyo módulo es igual a cero [0].

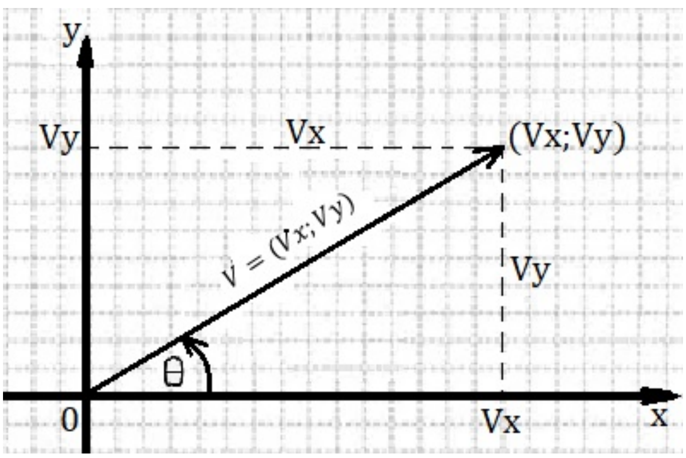
Formas de representar un vector

Entre las principales formas de representar un vector tenemos:

Forma rectangular. Se escribe un vector en la forma rectangular cuando tiene forma de un par ordenado; donde que el primer elemento, corresponde a la componente rectangular X; mientras que el segundo, corresponde a la componente rectangular Y. Esto es:

$$\vec{\boldsymbol{v}} = (Vx; Vy)$$

Figura 5
Forma rectangular de un vector



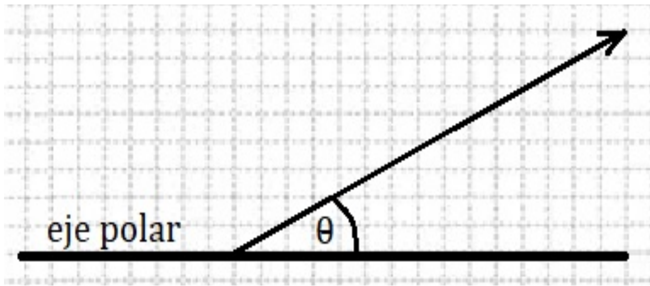
En la representación gráfica, el vector inicia desde el origen hasta el punto dado.

Forma polar. Es un par cuya primera componente es el módulo V del vector $\vec{\boldsymbol{v}}$ y la segunda componente es el ángulo θ. Esto es:

$$\vec{\boldsymbol{v}} = (V; \theta)$$

Figura 6

Forma polar de un vector



Forma de vectores base. Es una forma de vector escrito de modo que si tomamos los valores de las componentes rectangulares del mismo y les multiplicamos por los vectores unitarios base; esto es: $\vec{\imath}$ para la componente Vx, y $\vec{\jmath}$ para la componente Vy. De este modo el vector completo queda expresado de la siguiente manera:

$$\vec{v} = V_x\,\vec{\imath} + V_y\,\vec{\jmath}$$

Transformación entre las formas de expresar los vectores

Conversión de la forma rectangular a la forma polar

Dado un vector en la forma rectangular se puede transformar a forma polar, de la siguiente manera:

Dado el vector: $\vec{V}$ = (Vx ; Vy).

Se calcula su módulo aplicando el teorema de Pitágoras a sus componentes rectangulares. Esto es:

$$V = \sqrt{V_x^{\,2} + V_y^{\,2}}$$

Se determina la dirección θ del vector aplicando la tangente a las componentes sus rectangulares. Esto es:

$\tan\theta = \frac{V_y}{V_x}$; y $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{V_y}{V_x}\right)$

Con estos valores calculados, se escribe el vector en forma del par:

$\vec{v}$ = (v ; θ)

Ejemplo: Escribir en la forma polar el vector $\vec{v}$ = (3 ; –4) kgf.

$$v = \sqrt{vx^2 + vy^2}$$
$$v = \sqrt{(3)^2 + (-4)^2}$$
$$v = \sqrt{9 + 16}$$
$$v = \sqrt{25}$$
$$v = 5$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{-4}{3}\right)$$

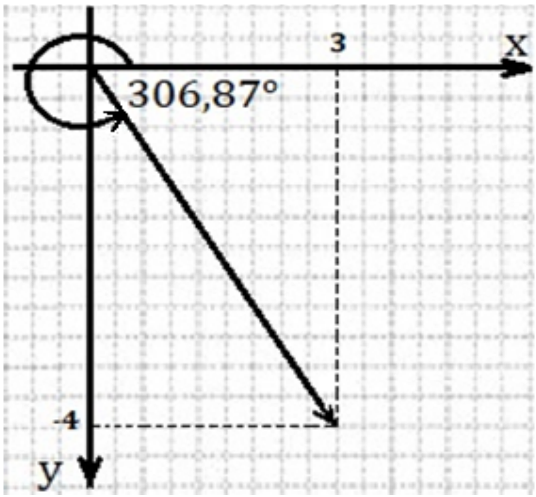
$$\theta = \tan^{-1}(-0.75)$$
$$\theta' = -36,87$$
$$\theta = 180 - 36,87$$
$$\theta = 143,13°$$

$\vec{v}$ = (5 ; 143,13°) kgf. //

$$\vec{V} = (5\ Kgf; 306,87^{o})$$

Figura 7

Forma Polar de un vector



Conversión de la forma polar a la forma rectangular.

Para esta transformación, se sutilizan las siguientes expresiones:

V.x = $V.Cos\ \theta$ Λ $\mathrm{V.y}\ =\ \mathrm{V.sen}\ \theta$

Ejemplo:

Dado el vector: $\vec{V}$ = (120 kgf ; 115°); escribirlo en la forma rectangular.

Vx = 120 cos 115°

Vx = 120 (– 0,4226)

Vx = – 50,71 kgf

Vy = 120 sen 115°

Vy = 120 (0,9063)

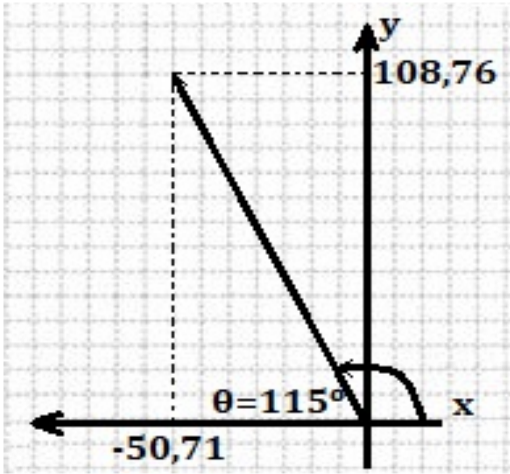
Vy = 108,76 kgf

$\vec{V}$ = (–50,71 ; 108,76) kgf //

$\vec{V} = (120\ Kgf; 115^{o})$

Figura 8

Forma rectangular de un vector



Conversión de la forma polar a la forma de vectores base. El proceso es exactamente el mismo que se realizó para convertir de la forma polar a la forma rectangular. La única diferencia es la escritura final del vector; es decir añadiendo los vectores unitarios base, $\vec{\imath}$ para la componente Vx y $\vec{\jmath}$ para la componente Vy.

Ejemplo: Dado el vector: $\vec{V}$ = (120 kgf ; 115°); escribirlo en la forma de vectores base.

Sabemos que:

Vx = – 50,71 kgf.
Vy = 108,76 kgf.

Entonces su escritura final será:

$\vec{V} = (-50{,}71\,\vec{\imath} + 108{,}76\,\vec{\jmath})$ kgf //

Conversión de la forma rectangular a la forma de vectores base

Aquí el proceso consiste en añadir los vectores unitarios base, $\vec{\imath}$ para la componente Vx y $\vec{\jmath}$ para la componente Vy; y por último escribir el vector con $\vec{\imath}$. Y con $\vec{\jmath}$. El ejemplo es exactamente el mismo del caso anterior.

5.2. Operaciones básicas con vectores

5.2.1 Operación suma

Forma analítica. Dados dos vectores sumandos $\vec{A}$ y $\vec{B}$, la resultante $\vec{R}$ de la adición o suma se define como:

$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$$
$$\vec{R} = (A_x; A_y) + (B_x; B_y)$$
$$\vec{R} = (A_x + B_x; A_y + B_y)$$

Ejemplo: Hallar la resultante de sumar: $\vec{A} = (5\ ;-2)$ y $\vec{B} = (-3\ ;4)$.

$$\vec{R} = (5\ ;-2) + (-3\ ;4)$$
$$\vec{R} = [5 + (-3)\ ;(-2) + 4]$$
$$\vec{R} = (2\ ;2)$$

Forma gráfica. En este caso los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ constituyen las componentes del vector resultante $\vec{R}$, la suma gráfica se delinea con las flechas de cada uno de estos dos vectores componentes, trazados a una escala gráfica conveniente. Para obtener esto, se cuenta con los dos siguientes métodos:

- **Método del paralelogramo**. Se construye un paralelogramo con los vectores componentes donde que la diagonal principal del paralelogramo constituye la resultante $\vec{R}$ de la suma vectorial.
- **Método del polígono**. Se construye un polígono vectorial a partir de las componentes, colocándolas una a continuación de otra con sus respectivas direcciones. Y el polígono se lo cierra con la resultante de la suma, haciendo coincidir su punto inicial con el inicio del primer vector, y su punto final con el punto final del último vector. Si las componentes de la suma, son solo dos, entonces el polígono se reduce a un triángulo, por este motivo, este método es también conocido como el método del triángulo.

Ejemplo: Hallar la resultante de sumar: $\vec{A} = (5\ ;\ -2)$ y $\vec{B} = (-3\ ;\ 4)$.

$\vec{R} = (5\ ;\ -2) + (-3\ ;\ 4)$

$\vec{R} = [5 + (-3)\ ;\ (-2) + 4]$

$\vec{R} = (2\ ;\ 2)$

Método del paralelogramo

Figura 9

Método del paralelogramo

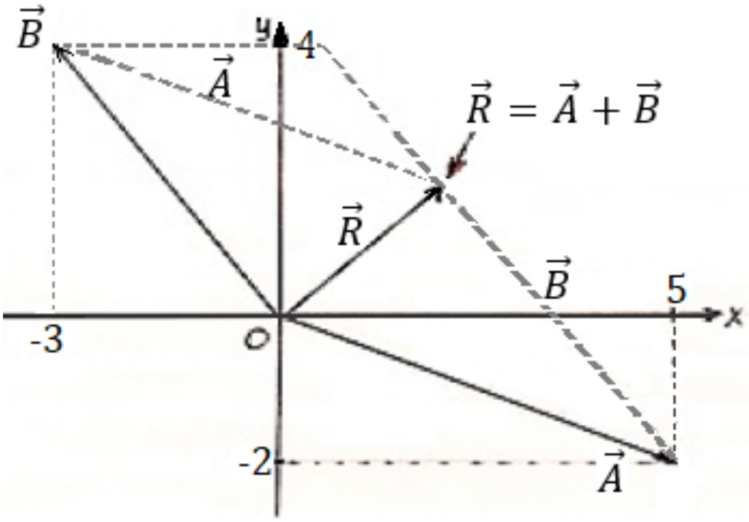
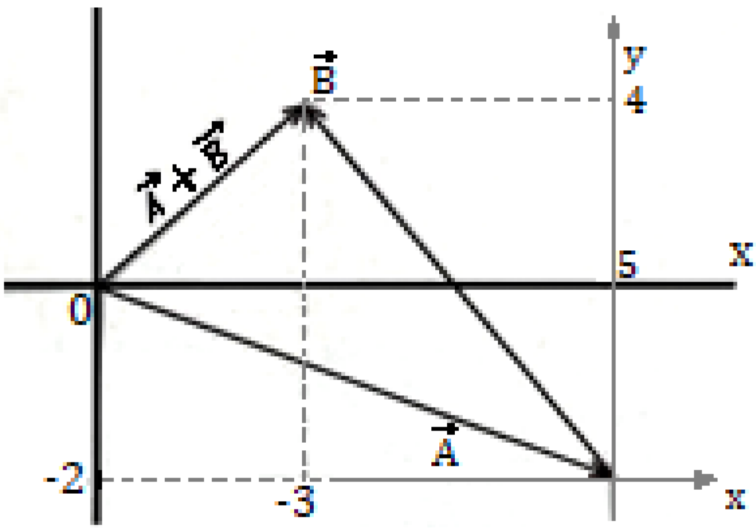


Figura 10

Método del polígono o triángulo



5.2.2 Operación resta

- **Forma analítica**. Dados dos vectores $\vec{A}$, vector minuendo; y $\vec{B}$, vector sustraendo. La resultante $\vec{R}$ de la resta o diferencia se define como:

$$\vec{R} = \vec{A} - \vec{B}$$
$$\vec{R} = (A_x; A_y) - (B_x; B_y)$$
$$\vec{R} = (A_x - B_x; A_y - B_y)$$

- **Forma gráfica.** Para este caso se va a considerar el método del paralelogramo; de manera que la figura se traza, tomando el primer vector (minuendo) más el negativo o vector equilibrante del segundo vector, y de modo similar a la operación suma, la diagonal principal del paralelogramo trazado de esta forma es la resultante de la resta. El método del triángulo también es considerado pero, lógicamente solo entre los dos vectores.

Ejemplo:

Hallar la resultante de restar: $\vec{A}$ = (5 ; – 2) y $\vec{B}$ = (– 3 ; 4).

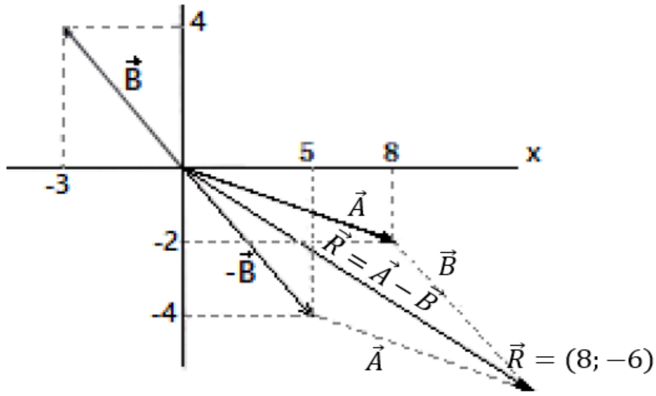
$\vec{R}$ = (5 ; – 2) – (– 3 ; 4)

$\vec{R}$ = [5 – (– 3) ; (– 2) – 4]

$\vec{R}$ = (8 ; – 6)

Figura 11

Resta de dos vectores



5.2,3. Operación producto

Producto escalar por vector

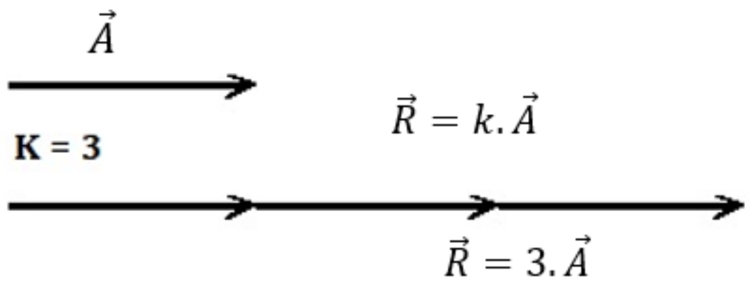
- **Forma analítica**. La resultante de multiplicar un escalar *k* o valor real cualquiera por un vector $\vec{V}$ se lo realiza multiplicando el valor escalar por cada una de las componentes del vector. Esto es aplicando lo que se conoce como propiedad distributiva del producto y la suma de los números reales. Así:

$$\vec{\mathrm{R}} = \mathrm{k} \cdot \vec{\mathrm{V}}$$
$$\vec{\mathrm{R}} = \mathrm{k}\left(\mathrm{V_x}\vec{\mathrm{i}} + \mathrm{V_y}\vec{\mathrm{j}}\right)$$
$$\vec{\mathrm{R}} = \mathrm{kV_x}\vec{\mathrm{i}} + \mathrm{kV_y}\vec{\mathrm{j}}$$

- **Forma gráfica.** La resultante es vector segmento de una longitud o módulo k veces la longitud de $\vec{V}$. Esto es:

Figura 12

Resultante de multiplicar un escalar k por un vector V ⃗



La resultante también podría colocarse en el plano cartesiano partiendo desde el origen y en forma inclinada.

Producto interno de vectores. Este tipo de producto solo considera la forma analítica de la operación, ya que su resultado es un escalar. Por este motivo este producto también toma el nombre de producto escalar o interno. Y se lo obtiene multiplicando los valores de las componentes: horizontales entre sí y verticales entre sí. Esto es:

$$\vec{R} = \vec{A} \odot \vec{B}$$

$$\vec{R} = \left(A_x\vec{\imath} + A_y\vec{\jmath}\right) \cdot \left(B_x\vec{\imath} + B_y\vec{\jmath}\right)$$

$$\vec{R} = A_x \cdot B_x + A_y \cdot B_y$$

Aplicaciones del producto escalar. Ángulo formado entre dos vectores; Sea el ángulo θ formado entre los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$. El coseno de Θ, está dado por:

$$\cos\ \theta = \frac{\vec{A} \odot \vec{B}}{A \cdot B}$$

Calcular el ángulo formado entre los vectores: $\vec{A}$ = (5 ; – 2) y $\vec{B}$ = (– 3 ; 4).

Sea el producto de los dos vectores:

$$\vec{A} \odot \vec{B} = \left(A_x\vec{\imath} + A_y\vec{\jmath}\right) \cdot \left(B_x\vec{\imath} + B_y\vec{\jmath}\right)$$

$$\vec{A} \odot \vec{B} = [(5)(-3) + (-2)(4)]$$

$$\vec{A} \odot \vec{B} = -15 - 8$$

$$\vec{A} \odot \vec{B} = -23$$

Para encontrar el valor del módulo de cada vector:

$$A = \sqrt{{A_x}^2 + {A_y}^2}$$

$$A = \sqrt{(5)^2 + (-2)^2}$$

$$A = \sqrt{25 + 4}$$

$$A = \sqrt{29}$$

$$B = \sqrt{{B_x}^2 + {B_y}^2}$$

$$B = \sqrt{(-3)^2 + (4)^2}$$

$$B = \sqrt{9 + 16}$$

$$B = \sqrt{25}$$

$$B = 5$$

Para calcular el ángulo entre los dos vectores se procede de la siguiente forma:

Sea:

$$cos\ \theta = \frac{\vec{A} \odot \vec{B}}{A \cdot B}$$

$$cos\ \theta = \frac{-23}{\sqrt{29} \cdot 5}$$

$$cos\ \theta = \frac{-23}{\sqrt{29} \cdot 5}$$

$$cos\ \theta = \frac{-23}{\sqrt{725}}$$

$$cos\ \theta = \mathbf{-0,8542}$$

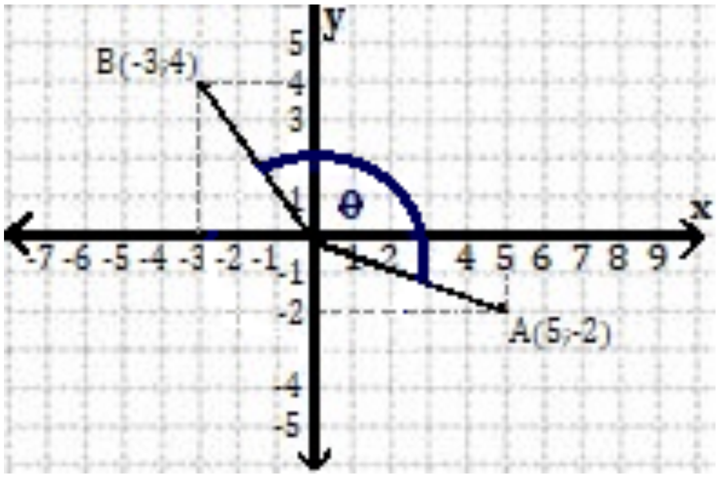
$\theta = 148{,}67°$ //

Representación gráfica

El ángulo θ comprendido entre los dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ se representa gráficamente de la siguiente forma:

Figura 13

Angulo comprendido entre dos vectores



Ejercicios

1. Sean los vectores:

$\vec{A}$ = (-5 ; 3) y $\vec{B}$ = (7 ; 4).

- Hallar el producto de los dos vectores.
- Calcular el valor del módulo de cada vector:
- Calcular el ángulo formado entre los vectores.
- Elaborar el gráfico respectivo y señale el ángulo entre los dos vectores.

Dados los vectores:

$\vec{C}$ = (-6 ; 5) y $\vec{D}$ = (8 ; 2).

- Hallar el producto de los dos vectores.
- Calcular el valor del módulo de cada vector:
- Calcular el ángulo formado entre los vectores.
- Elaborar el gráfico respectivo y señale el ángulo entre los dos vectores.

5.3 Operación con espacios vectoriales

En álgebra lineal, definimos un espacio vectorial como una estructura algebraica fundamental comprendida por un conjunto no vacío **v** ={u,v,w…} de elementos llamados vectores, sobre los cuales se pueden realizar dos tipos de operaciones importantes que son:

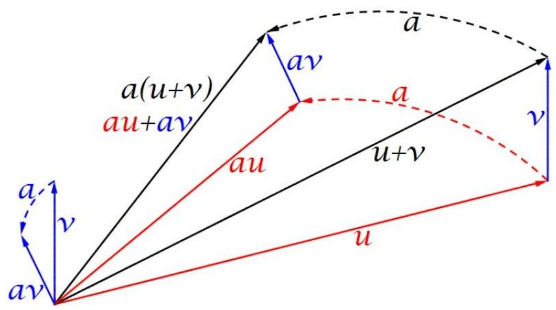
- La suma de vectores: u + v que como resultado **z** que pertenece al conjunto **v.**
- La multiplicación de un escalar **k** (número real) por un vector **v: k*v**, que nos dará como resultado otro vector: **y** que pertenece a **v**.

Estas operaciones han de satisfacer ciertos axiomas para que el conjunto forme un espacio vectorial.
Los espacios vectoriales son fundamentales en las matemáticas ya que tienen aplicaciones en diversas áreas tales como la geometría, el álgebra lineal, la física, la economía.

Los espacios vectoriales también se aplican extensamente en álgebra lineal, análisis numérico, optimización, física, y en áreas aplicadas como la ingeniería y las ciencias de la computación (por ejemplo, en la programación lineal y el aprendizaje automático), etc.

Figura 14

Espacio vectorial.



Tomado de: https://www.lifeder.com/espacio-vectorial/

Los elementos del espacio vectorial se llaman vectores, y los elementos del conjunto de escalares son los escalares.

Bases y dimensión: Una base de un espacio vectorial es un conjunto de vectores que genera todos los vectores del espacio mediante combinaciones lineales. La dimensión de un espacio vectorial es el número de vectores en su base más pequeña posible. Por ejemplo: el espacio vectorial R^3 tiene dimensión 3, un espacio vectorial R^4 tiene dimensión 4**,** y un espacio vectorial R^n tendrá **n** dimensiones.

Subespacios vectoriales: Son conjuntos dentro de un espacio vectorial que también forman espacios vectoriales bajo las mismas operaciones. Por ejemplo, todas las rectas que pasan por el origen en el plano son subespacios vectoriales del espacio vectorial del plano.

Según (Lara P. Jorge, 2015) , Un espacio vectorial |R^n comprende el producto cartesiano de R consigo mismo n veces; de la forma:

$$R^n = R * R *..(n\ veces) \dots x\ R = \{(x_1, x_2, \dots .x_n): x_i \ \in R, \forall_i = \ \overline{l, n}\}$$

Consecuentemente, un elemento A de R^n es una n -upla ordenada $(x_1, x_2, \dots .x_n)$, donde $x_1, x_2, \dots .x_n$ son números reales.

Se escribe: $A = (x_1, x_2, \dots .x_n), siendo\ \ A\ un\ punto\ de\ R^n.$

Los elementos de R^n se designan con letras mayúsculas del alfabeto y sus componentes se designan con letras minúsculas.

Resumiendo:

Si n = 1	$R^n = R$	$Para\ cualquier\ número\ real\ a, (a)\ se\ escribe: a$
Si n = 2	$R^n = R^2$	Cualquier elemento de R^2 es un par ordenado de números reales: (x,y): $R^2 = \{(x,y): x,y\ \in R\}$ Ejemplos: $(3,5) \in\ R^2$, $(-2\sqrt{3}, \frac{1}{2})\ \in\ R^2$
Si n = 3	$R^n = R^3$	Y todo elemento de R^3 es una terna de números reales (x,y,z): $R^3 = \{(x,y,z): x,y,z\ \in R\}$ Ejemplos: $(7,-2,5) \in\ R^3$, $(-\sqrt{2}, \frac{1}{2}, 1)\ \in\ R^3$

5.3.1 Operaciones en R^n

En el contexto matemático, R^n representa el espacio vectorial real de dimensiones n, donde cada vector se compone de n componentes reales. De este modo, las operaciones básicas que se pueden realizar en R^n son: La operación suma y la operación producto por un número real, de modo que R^n adquiere una estructura algebraica de un espacio vectorial real.

Suma de vectores

Dados dos vectores: $v = \left(v_1, v_2, v_{3,} \dots \dots\ v_n\right)$ y

$w = \left(w_1, w_2, w_{3,} \dots \dots\ w_n\right)\ \ \in\ R^n$

la suma se define componente a componente, es decir:

$$v + w = (v_1 + w_1, v_2 + w_2, v_3 + w_3 \dots \dots\ v_n +\ w_n)$$

Si n=2	Dados: $A = (a_1, a_2)\ y$ $B = (b_1, b_2)$	Obtendremos: $A + B = (a_1 + b_1,\ a_2 + b_2)$
Si n=3	Dados: $A = (a_1, a_2, a_3)$ y $B = (b_1, b_2, b_3)$	Obtendremos: $A + B = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$

Ejemplos:

1. Si A y B son puntos de R^2 definidos por: A= (9,5) y B = (-2-3) entonces:

   A+ B = (9,5) + (-2,-3)

   = (9+(-2) , 5+(-3))

   = (7,2)

2. Si A y B son puntos de R^2 determinados por: A= (4,3) y B = (-8,-6) entonces:

   A+ B = (4,3) + (-8,-6)

   = (4+(-8) , 3+(-6))

   = (-4,-3)

3. Si A = (9,5) y B = (-9,-5) obtendremos:

   A + B = (9,5) + (-9,-5)

   = (9+(-9), 5+(-5))

   = (0,0)

Espacio Vectorial en R^3

1. Si A y B son puntos de R^3 definidos por: $A = \left(4, \sqrt{5}, \pi\right)\ y\ B(3,4,9)$ entonces:

   $$A + B = \left(4, \sqrt{5}, \pi\right) + B(3,4,9)$$

   $$= \left(4 + 3, \sqrt{5} + 4, 9 + \pi\right)$$

   $$= (7, 4 + \sqrt{5}, 9 + \pi)$$

2. Si $A = \left(3, \sqrt{7}, -\sqrt{3}\right), y\ B = \left(\frac{2}{3}, 5, \sqrt{3}\right)$

   $$A + B = \left(3 + \frac{2}{3}, \sqrt{7} + 5, -\sqrt{3} + \sqrt{3}\right)$$

   $$A + B = \left(\frac{11}{3}, 5 + \sqrt{7},\ 0\right)$$

3. Si A= (7, 3, 2) y B = (2, 4, 5) entonces: A + B = (7+2, 3+4, 2+5)

   A + B = (9, 7, 7)

Espacio vectorial en R^4

1. Si A= (3, 2, 7, -3) y $B = (\sqrt{8}, -4, \pi, 8)$ entonces:

   $A + B = (3 + \sqrt{8},\ 2 + (-4),\ 7 + \pi, 8 - 3)$

   $A + B = (3 + 2\sqrt{2}, -2,\ 7 + \pi, 5)$

2. $Si\ A = \left(\frac{3}{5}, 6, -\frac{5}{11}, 70\right)\ y\ B = (4, \frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{3}{8}, -25)$

   A + B = ($\frac{3}{5}$+4, 6-$\frac{2}{\sqrt{3}}$, $-\frac{5}{11} + \frac{3}{8}$, 70 - 25)

   A + B = ($\frac{23}{5}$, $\frac{18-2\sqrt{3}}{3}$, $-\frac{7}{88}$, 45)

Multiplicación por un escalar (número real):

Dado un escalar $\propto\ \epsilon\ R$ y un vector $v = \left(v_1, v_2, v_{3,} \ldots \ldots\ v_n\right)$ en R^n, el producto se realiza multiplicando cada componente del vector por el escalar:

$\propto . v = \left(\propto . v_1, \propto . v_2, \propto . v_{3,} \ldots \ldots\ \propto . v_n\right)$

Si tenemos: $\propto . A$

- $En\ R^2: Si\ A = (a_1, a_2)\ entonces: \ \propto . A = (\propto . a_1,\ \propto . a_2\ )$
- $En\ R^3: Si\ A = (a_1, a_2, a_3)\ entonces: \ \propto . A = (\propto . a_1,\ \propto . a_2, \propto . a_3\ )$
- $En\ R^4: Si\ A = (a_1, a_2, a_3, a_4)\ entonces: \ \propto . A = (\propto . a_1,\ \propto . a_2,\ \propto . a_3\ , \propto . a_4)$

Ejemplos:

En R^2

1. Si $\propto = 9\ y\ A = (7,3)$ entonces $\propto . A = (63,27)$
2. Si $\propto = \sqrt{3}\ y\ A = (\pi, \sqrt{6})$ entonces $\propto . A = (\pi . \sqrt{3}, 3\sqrt{2})$
3. Si $\propto = \frac{1}{5}\ y\ A = (0, \sqrt{50})$ entonces $\propto . A = (0, \sqrt{2})$

En R^3

1. Si $\propto = 3\ y\ A = (3,5,7)$ entonces $\propto . A = (9, 15, 21)$
2. Si $\propto = -\sqrt{5}\ y\ A = (\sqrt{7}, \sqrt{2}, \sqrt{3})$ entonces $\propto . A = (-\sqrt{35}, -\sqrt{10}, -\sqrt{15})$
3. Si $\propto = \frac{1}{2}\ y\ A = (\pi, 8, \sqrt{2})$ entonces $\propto . A = (\frac{\pi}{2}, 4, \frac{\sqrt{2}}{2})$

En R^4

1. Si $\propto = 7\ y\ A = (3,\ 7, -1, \sqrt{5})$ entonces $\propto . A = (21,\ 49, -7, 7\sqrt{5})$
2. Si $\propto = -\frac{1}{3}\ y\ A = \left(\frac{4}{5}, -18, \sqrt{9}, 6\right)$ entonces $\propto . A = \left(-\frac{4}{15}, 6, -1, -2\right)$
3. Si $\propto = \pi\ y\ A = (3, 0, \sqrt{2}, \sqrt{3})$ entonces $\propto . A = (3\,\pi, 0, \pi\sqrt{2}, \pi\sqrt{3})$

Resta de vectores:

Dados dos vectores: $v = (v_1, v_2, v_{3,} \ldots \ldots\ v_n)$ y

$w = (w_1, w_2, w_{3,} \ldots \ldots\ w_n) \ \in\ R^n$

La resta de dos vectores $v\ \ y\ \ w\ en\ \ R^n$ se define como:

La suma de v y el negativo de w. Es decir:

$v - w = v + (-w)$

Producto Interno (o producto punto):

El producto punto entre dos vectores $v\ \ y\ \ w\ en\ \ R^n$ se define como:

$\boldsymbol{v}.\boldsymbol{w} = v_1.w_1 + v_2.w_2 + \ \ldots \ldots \ldots + v_n.w_n$

Este producto mide la proyección de un vector sobre otro y tiene varias aplicaciones en geometría y física. También tiene propiedades importantes como la conmutatividad, distributividad y el hecho de que es cero si y solo si los vectores son ortogonales (perpendiculares).

5.3.1.1 Combinación lineal

Una combinación lineal de vectores: $V_1, V_2, \ldots\ V_k\ \ con\ escalares\ a_1, a_2 \ldots\ldots a_k$ es un vector de la forma:

$$W = a_1.V_1 + a_2.V_2 + \ldots\ldots\ldots\ a_k.V_k$$

El vector W se dice que es una combinación lineal si es igual a la suma de los productos individuales de los escalares a_i multiplicado por el vector v_i.

Ejemplo:

En R^2:

Dados los vectores: $V_1 = (5;2)$, $V_2 = (-3;4)\ \ y\ \ V_3 = (7;-1)$

Una posible combinación lineal de estos vectores puede estar dada por:

$$\begin{aligned} -2\,V_1 + 3\,V_2 - 5V_3 &= -2(5;2) + 3(-3;4) - 5(7;-1) \\ &= (-10;-4) + (-9;12) + (-35;5) \\ &= (-10 - 9 - 35\ ;\ -4 + 12 + 5) \\ &= (-54\ ;\ 13) \end{aligned}$$

5.3.2 Dependencia lineal

Dado el espacio vectorial $V = \left(V_1, V_2, V_{3,} \ldots\ldots\ V_n\right)\ en\ R^n$ se dice que es linealmente dependiente (abreviamos: LD) si existe un conjunto ligado de escalares $a_1, a_2 \ldots\ldots a_n$ no nulos o diferentes de cero, de manera que se cumpla la siguiente condición:

$$a_1.V_1 + a_2.V_2 + \ldots\ldots\ldots\ a_k.V_k = 0, \text{ donde algún coeficiente: } a_1, a_2 \ldots\ldots a_n \neq 0$$

También se aplica para el recíproco, es decir: si un vector es combinación lineal de otros vectores, esto quiere decir que todos los vectores del conjunto son linealmente dependientes.

También, si dos vectores son paralelos implica que son linealmente dependientes.

5.3.3 Independencia lineal

Dado el espacio vectorial $V = \left(V_1, V_2, V_{3,} \dots\dots V_n\right)$ $en\ R^n$ se dice que es linealmente independiente (LI) si existe un conjunto de escalares $a_1, a_2 \dots\dots a_n$ todos iguales a cero, de manera que se cumpla la siguiente condición:

$$a_1.V_1 + a_2.V_2 + \dots\dots\dots a_k.V_k = 0, \text{ donde que } a_1, a_2 \dots\dots a_n = 0$$

Ejercicio

Determinar si los siguientes vectores tienen dependencia lineal o independencia lineal:

$\vec{u} = (2,3,5)$, $\vec{v} = (-3, 2, -1)$, $\vec{w} = (4,2,1)$

Primero vamos a plantear la condición de combinación lineal así:

$$a_1.\vec{u} + a_2.\vec{v} + a_3.\vec{w} = 0$$

Procedemos a sustituir cada vector por sus coordenadas, de la misma manera en cero que corresponde al vector nulo.

$$(2a_1,\ 3a_1,\ 5a_1) + (-3a_2, -2a_2, -a_2) + (4a_3, 2a_3, a_3) = (0,0,0)$$

Realizamos la suma de vectores:

$$(2a_1 - 3a_2 + 4a_3\ ,\ 3a_1 - 2a_2 + 2a_3\ ,\ 5a_1 - a_2 + a_3) = (0,0,0)$$

De la expresión anterior corresponde a 3 ecuaciones, donde cada coordenada del vector de la izquierda debe ser igual a cada coordenada del vector de la derecha. Por lo que obtendremos un sistema homogéneo de 3 ecuaciones con 3 incógnitas así:

$$\left.\begin{array}{l} 2a_1 - 3a_2 + 4a_3 = 0 \\ 3a_1 - 2a_2 + 2a_3 = 0 \\ 5a_1 - a_2 + a_3 = 0 \end{array}\right\}$$

Para solucionar este sistema de 3 ecuaciones cuyas incógnitas son $a_1,\ a_2, y\ a_3$ se puede aplicar cualquier método de resolución (método de sustitución, método de Gauss, Regla de Cramer, etc.) y para saber si los vectores son Linealmente Independientes (LI) o Linealmente Dependiente (LD) solo necesitamos determinar si existe una solución distinta a la solución trivial (todos los coeficientes iguales a cero). Por lo tanto:

- Si el determinante de la matriz compuesta por las componentes de los vectores es diferente de cero, quiere decir que el sistema de ecuaciones solo tiene una solución $(a_1, a_2 \ldots\ldots a_n = 0)$, por lo tanto **los vectores son linealmente independientes (LI).**
- Si, por el contrario, el determinante de la matriz compuesta por las componentes de los vectores es igual a cero, esto implica que el sistema de ecuaciones tiene más de una solución y, en consecuencia, **los vectores son linealmente dependientes (LD).**

Entendido esto, solo debemos calcular el determinante con las coordenadas de los vectores (en este caso es un determinante de orden: 3×3 y se puede resolver con la regla de Sarrus). El determinante corresponde a los coeficientes del sistema de ecuaciones anterior:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 2 \\ 5 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

= 2*(-2)*1 + 3*-1*4 + (-3)*2*5 - (4*-2*5 + 3*-3*1 + (-1)*2*2)
= -4 -12 -30 – (-40 -9 -4)
= -46 – (-53)
= $7 \neq 0$

Para este ejercicio, el determinante es diferente de 0 por lo tanto, entendemos que los vectores son **linealmente independientes (LD)**.

Concluimos que, la única solución posible en este sistema de ecuaciones es la solución trivial con todas las incógnitas iguales a cero, es decir: $a_1 = a_2 = a_3 = 0$.

5.3.4 Base y dimensión

Una base de un espacio vectorial $\boldsymbol{V}$ es un conjunto de vectores linealmente independientes que generan $\boldsymbol{V}$. La dimensión de $\boldsymbol{V}$ es el número de vectores en una base de V.

Norma (magnitud) de un vector y distancia

La norma euclidiana (o norma de un vector $v = (v_1, v_2, v_{3,} \dots \dots\ v_n)\ en\ R^n$ se define como:

$$\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{v.v}$$

$$\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{v^2}$$

$$\|\boldsymbol{v}\| = \begin{cases} v\ si\ y\ solo\ si\ \ v \geq 0 \\ -v\ si\ y\ solo\ si\ \ v < 0 \end{cases}$$

Esta es la definición de valor absoluto de un número que es el módulo o norma de un vector.

La distancia entre dos vectores $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$ es la norma de su diferencia: $\|\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}\|$

5.3.5 Ortogonalidad

Dos vectores $\boldsymbol{v}\ y\ \boldsymbol{w}$ son ortogonales (o perpendiculares) si su producto interno nos da como resultado cero, es decir: **v· w = 0**

Ejemplo:

Sean los vectores:

u = (2, -7, 4, -3), v = (5, 7, -1 2) y w = (3, -1, 2, 7). Entonces:

u.v = 2. 5 + -7.7 + 4.-1 + (-3).2 = 10 – 49 – 4 -6 = -49

En vista que el resultado del producto de u.v = -49 se concluye que los dos vectores no son perpendiculares.

En cambio, al multiplicar los vectores u.v tenemos:

u.w = 2.3 + (-7).(-1) + 4.2 + (-3).7 = 6 + 7 + 8 – 21 = 0

Por lo tanto, los vectores u y w son ortogonales.

Entre las principales propiedades del producto interno en R^n tenemos:

Para todo vector $\mathrm{u}, \mathrm{v}, \mathrm{w} \ \epsilon \ R^n \ y \ todo \ escalar \ k \ \epsilon \ R \ se \ cumple$:

- $(u+v).w = u.w + v.w$
- $u.v = v.u$
- $(k.u).v = k(u.v)$
- $u.u \geq 0 \ y \ u.u = 0 \ si \ u = 0$

El espacio R^n con las operaciones de adición de vectores, multiplicación de un vector por un escalar y el producto interno, se le llama el n-espacio euclidiano.

Estas operaciones y conceptos forman la base de muchas aplicaciones en álgebra lineal, desde la solución de sistemas de ecuaciones lineales hasta la transformación de datos en análisis de datos y aprendizaje automático

Referencias

Aleks Corporation. (2024). *Ecuaciones*. https://latam.aleks.com

Allen, R. (1998). *Álgebra elemental*. (3ª ed). Prentice Hall.

Álvarez, F., De la Lanza, C., & Ortiz, J. (2002). *Precálculo*. Santillana.

Anton, H. (1997). *Cálculo y geometría analítica*. McGraw-Hill.

Anton, H., & Rorres, C. (2013). *Elementary linear algebra: applications version*. (11th ed.). Wiley.

Arya, J. y Larner, R. (1992). *Matemáticas para Administración y Economía*. Prentice Hall.

Axler, S. (2015). *Linear algebra done right* (3rd ed.). Springer.

Baum, A., Milles, S. y Schultz, H. (1992). *Cálculo para ciencias sociales*. McGraw-Hill.

Bittinger, M. (2002). *Cálculo para ciencias económicas-administrativas*. Addison Wesley.

Budnick, F. (1997). *Matemáticas para administración y economía*. McGraw-Hill.

Friedberg, S. H., Insel, A. J., & Spence, L. E. (2018). *Linear algebra*. (5th ed.). Pearson.

Goldstein, L.; Lay, D. (1992). *Cálculo y geometría analítica*. McGraw-Hill.

Goñi G., Juan (2009). *Física fundamental*. Colección Goñi. Ed. Ingeniería. Lima.

Grandville, W. (1954). *Trigonometría plana y esférica*. Ginn and Company.

LibreTexts. (2024). Resolver desigualdades racionales. https://espanol.libretexts.org/Under_Construction/Matem%C3%A1ticas/%C3%81lgebra_Intermedia_(OpenStax)/07%3A_Expresiones_y_funciones_racionales/7.07%3A_Resolver_desigualdades_racionales

Lara, J. & Arroba, J. (2002). *Análisis matemático.* Centro de Matemática – Universidad Central del Ecuador.

Lay, D. C., Lay, S. R., & McDonald, J. J. (2016). *Linear algebra and its applications*. (5th ed.). Pearson.

Linares, H. (2008). *Física. La Enciclopedia*. Rubiños Ediciones.

Lipschutz, S. (1979). *Algebra Lineal*. Colección Schaum. Ed. McGraw-Hill.

Mancill. (1962). *Álgebra elemental moderna trigésima*. (8ª ed). Kapeluz.

Oleksandr, K., Guerrero, C. R., & Tarasenko, A. (2008). *Desigualdades. Métodos de cálculo no tradicionales*. Díaz de Santos.

Poole, D. (2014). *Linear algebra: a modern introduction*. (4th ed.). Cengage Learning.

Recalde Pérez, Á. (2013). *Álgebra*. (2da ed.). ESPEL.

Strang, G. (2016). *Introduction to linear algebra*. (5th ed.). Wellesley-Cambridge Press.

Vallejo P., Zambrano, J. (2010). *Física vectorial*. Tomo 1. Poliediciones.

ISBN: 978-9942-679-45-1
9789942679451