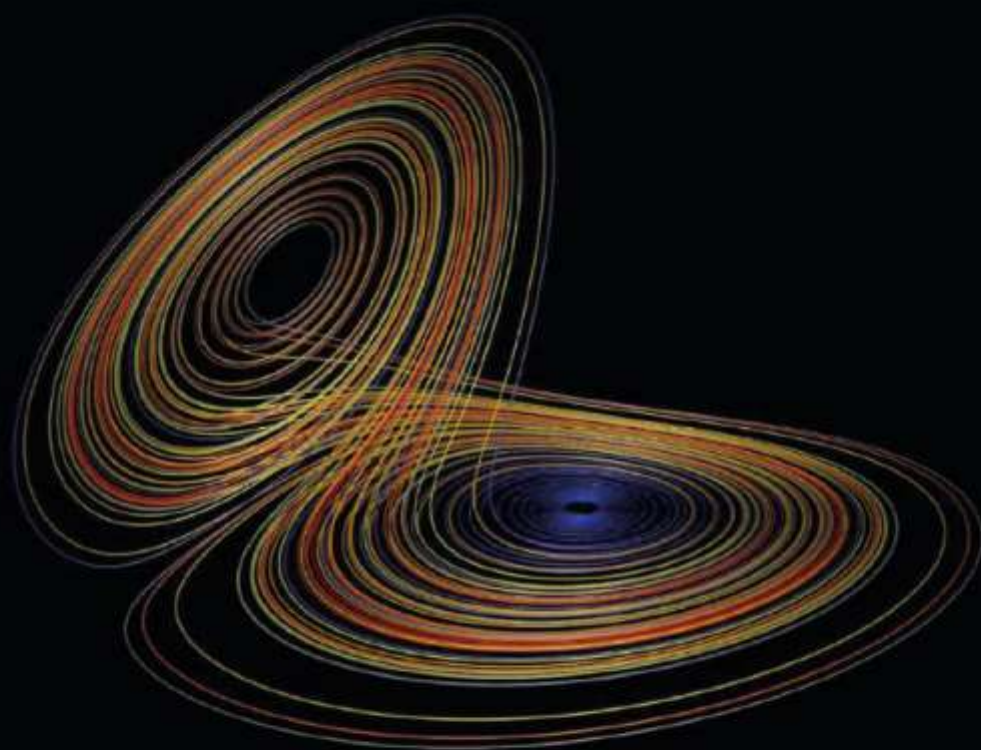


Ecuaciones diferenciales. Teoría y ejercicios

Sayuri Monserrath Bonilla Novillo
María Verónica Albuja Landi
Lenin Santiago Drozco Cantos
Álvaro Gabriel Benítez Bravo

ISBN: 978-9942-679-73-4



EDITORIAL
Académica
SCIDE

ECUACIONES DIFERENCIALES.

Teoría y Ejercicios



UNIVERSIDAD
NACIONAL DE
CHIMBORAZO

ECUACIONES DIFERENCIALES.

Teoría y Ejercicios

Autores:

Sayuri Monserrath Bonilla Novillo

María Verónica Albuja Landi

© Escuela Superior Politécnica de Chimborazo (ESPOCH)

Lenin Santiago Orozco Cantos

© Universidad Nacional de Chimborazo (UNACH)

Álvaro Gabriel Benítez Bravo

Reservados todos los derechos. Está prohibido, bajo las sanciones penales y el resarcimiento civil previstos en las leyes, reproducir, registrar o transmitir esta publicación, íntegra o parcialmente, por cualquier sistema de recuperación y por cualquier medio, sea mecánico, electrónico, magnético, electroóptico, por fotocopia o por cualquiera otro, sin la autorización previa por escrito al Centro de Investigación y Desarrollo Ecuador (CIDE).

Copyright © 2025

Centro de Investigación y Desarrollo Ecuador

Tel.: + (593) 04 2037524

<http://www.cidecuador.com>

ISBN: 978-9942-679-73-4

<https://doi.org/10.33996/cide.ecuador.ED679734>

Filiación:



Sayuri Monserrath Bonilla Novillo

María Verónica Albuja Landi

Escuela Superior Politécnica de Chimborazo (ESPOCH)



Lenin Santiago Orozco Cantos

Universidad Nacional de Chimborazo (UNACH)

Álvaro Gabriel Benítez Bravo

Dirección editorial: Lic. Pedro Misacc Naranjo, Msc.

Coordinación técnica: Lic. María J. Delgado

Diseño gráfico: Lic. Danissa Colmenares

Diagramación: Lic. Alba Gil

Fecha de publicación: octubre, 2025



Guayaquil - Ecuador

La presente obra fue evaluada por pares académicos
experimentados en el área.

Catalogación en la Fuente

Ecuaciones Diferenciales. Teoría y Ejercicios /Sayuri
Monserrath Bonilla Novillo, María Verónica Albuja
Landi, Lenin Santiago Orozco Cantos y Álvaro Gabriel
Benítez Bravo. Ecuador: Editorial CIDE, 2025

260 p.: incluye tablas, gráficos; 17,6 x 25 cm.

ISBN: 978-9942-679-73-4

1. Ecuaciones diferenciales 2. Matemática

Semblanza de los Autores

Sayuri Monserrath Bonilla Novillo

Ingeniera Mecánica

Magister en Matemática mención Modelación y Docencia,

Magister en Gestión Industrial y Sistemas Productivos

Docente Escuela Superior Politécnica de Chimborazo. Riobamba, Ecuador

sayuri.bonilla@outlook.com; smbonilla@espoch.edu.ec

<https://orcid.org/0000-0001-6509-8238>



María Veronica Albuja Landi

Ingeniera Mecánica

Magister en Matemática

Docente Escuela Superior Politécnica de Chimborazo. Riobamba, Ecuador

maría.albuja@espoch.edu.ec

<https://orcid.org/0000-0002-5959-1429>



Lenin Santiago Orozco Cantos

Ingeniero Mecánico

Magister en Eficiencia Energética

Docente Universidad Nacional de Chimborazo. Riobamba, Ecuador

lenin.orozco@unach.edu.ec

<https://orcid.org/0000-0003-4202-3633>



Alvaro Gabriel Benítez Bravo

Ingeniero Electrónico en Redes y Comunicación de Datos,

Ingeniero en Electrónica Digital y Telecomunicaciones

Magister en Estadística Aplicada, Master Universitario en Seguridad Informática,

Magister en Planificación y Dirección Estratégica.

alvaro.gabriel.benitez@gmail.com

<https://orcid.org/0000-0001-7458-9370>



Dedicatoria

A mi hijo Emiliano Alejandro, mi razón de ser y mi mayor inspiración.
A mi abuelita mi mamá Silvita, por ser mi mayor ejemplo y porque desde el cielo me sigue cuidando y guiando en cada paso.
Y a mis padres Patricio y Nora, por su amor y apoyo incondicional.

Sayuri Bonilla

A mis hijos Diego Fernando y Daniel Alejandro que son la razón de mi vida, el motor que me guía a cumplir mis sueños.

Verónica Albuja

A mi madre Leticia, por enseñarme con su ejemplo el valor de la perseverancia y del apoyo incondicional.

A mis hijos Santi y Jair, quienes representan la alegría, la motivación y el propósito de seguir superándome día a día.

A mis tíos Galo y Fabián, por su generosa guía y respaldo permanente.

A mi esposa Alicia, por ser la compañera en la construcción de la vida familiar.

Lenin Orozco

A la memoria de Segundo Salvador Bravo Silva, 1939-2024 quien con su cariño y consejos siempre ha sido una guía en cada momento de mi vida. Al igual que mis padres Mercy Bravo y Víctor Hugo Benitez así como mis hermanos por su amor de siempre.

Álvaro Benítez

Agradecimientos

A Dios por ser mi guía constante, por darme la fortaleza y sabiduría necesarias en cada paso. A la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo, por brindarme un espacio para crecer, aprender y compartir lo que amo hacer. Y a mis estudiantes, quienes con su entusiasmo, curiosidad y dedicación me inspiran cada día a ser mejor.

Sayuri Bonilla

Mi agradecimiento a la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo, por abrirme las puertas tanto en la parte estudiantil, como haberme dado la dicha de ser parte de su planta docente, a cada uno de mis maestros que han contribuido en mi formación profesional, y a mis compañeros autores por la contribución y dedicación.

Verónica Albuja

A la Universidad Nacional de Chimborazo, por el respaldo institucional que hizo posible la culminación de este trabajo.

A mis colegas y estudiantes, por sus valiosas aportaciones que nutren permanentemente la enseñanza y el aprendizaje de la matemática e ingeniería.

Lenin Orozco

A todo el equipo de trabajo que hace posible este libro y su cristalización para apoyar al desarrollo de la sociedad y la educación, por un futuro mejor para las siguientes generaciones.

Álvaro Benítez

Índice General

Semblanza de los autores	5
Dedicatoria	7
Agradecimiento	8
Introducción	11

Capítulo 1 Ecuaciones Diferenciales

1.1 Introducción	14
1.2 Definiciones básicas	14
1.3 Clasificación de las ecuaciones diferenciales	15
1.3.1 Ecuaciones diferenciales de acuerdo al tipo	16
1.3.1.1. Ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO)	16
1.3.1.2. Ecuaciones diferenciales con derivadas parciales	16
1.3.2 Ecuaciones diferenciales de acuerdo con el orden	17
1.3.2.1 Ecuaciones diferenciales de primer orden u ordinarias	17
1.3.2.2 Ecuaciones diferenciales de enésimo orden	18
1.4 Solución de una ecuación diferencial	18
1.5 Comprobación de soluciones en ecuación diferencial ordinaria	21

Capítulo 2 Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

2.1 Ecuaciones diferenciales ordinarias de variables separables	27
2.1.1 Ecuaciones diferenciales convertibles en variables separables	31
2.1.2 Ejemplos varios	36
2.2 Ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden homogéneas	42
2.2.1 Ecuaciones diferenciales convertibles en homogéneas (Caso 1)	48
2.2.2 Ecuaciones diferenciales ordinarias convertibles en homogéneas (Caso 2)	53
2.2.3 Ejercicios varios	60
2.3 Ecuaciones diferenciales ordinarias lineales	65
2.3.1 Ecuaciones diferenciales ordinarias lineales homogéneas	65
2.3.2 Ecuaciones diferenciales ordinarias lineales heterogéneas	67

2.3.3 Ecuaciones diferenciales convertibles en lineales (Ecuación de Bernoulli)	87
2.4 Ecuaciones diferenciales ordinarias exactas	96
2.4.1 Métodos de solución	96
2.4.2 Ecuaciones diferenciales ordinarias convertibles en exactas	103
2.4.2.1 Factor de integración o factor integrante	103
2.4.3 Ejercicios varios	118
2.5 Aplicaciones de las ecuaciones diferenciales ordinarias	124
2.5.1 Trayectorias ortogonales	124
2.5.2 Aplicaciones geométricas	130
2.6 Aplicaciones físicas	139
2.6.1.1 Mecánicas	139
2.6.1.2 Aplicaciones termodinámicas	144
2.6.2 Aplicaciones químicas (Descomposición de sustancias)	147
2.6.3 Tasas de crecimiento o decrecimiento poblacional	151
2.6.4 Ejercicios varios	154

Capítulo 3

Ecuaciones Diferenciales de Orden Superior

3.1 Definición	165
3.2 Independencia lineal de las funciones	165
3.2.1 Método del Wronskiano	168
3.3 Comprobación de soluciones	170
3.4 Casos de análisis en ecuaciones diferenciales de orden superior	175
3.4.1 Ejercicios varios	179
3.5 Ecuaciones diferenciales lineales de orden n	189
3.5.1 Ecuaciones diferenciales lineales homogéneas de coeficientes constantes	189
3.5.2 Ecuaciones diferenciales lineales heterogéneas de coeficientes constantes	194
3.5.3 Método de variación de parámetro	205
3.5.4 Ecuaciones diferenciales de coeficientes variables.....	214
3.5.5 Ejercicios varios	216

Capítulo 4

Sistema de Ecuaciones Diferenciales

4.1 Sistema de ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes	229
4.2 Tipos de sistemas de ecuaciones diferenciales	229
4.3 Métodos de resolución	229
4.3.1 Método de reducción o eliminación	229
4.3.2 Método matricial	242
4.3.3 Método de eliminación mediante el operador diferencial D	255
Referencias	258

Introducción

Las ecuaciones diferenciales ordinarias constituyen una herramienta fundamental en el estudio de fenómenos naturales, procesos físicos, modelos económicos y un sinnúmero de aplicaciones en la ciencia y la ingeniería. Su comprensión y correcta aplicación permite describir, predecir y controlar la evolución de sistemas dinámicos en el tiempo.

Este libro ha sido concebido con el propósito de brindar una base sólida y accesible sobre el estudio de las ecuaciones diferenciales ordinarias, dirigido tanto a estudiantes universitarios que se inician en esta disciplina, como a docentes que buscan una referencia clara y estructurada para su labor académica. A través de un enfoque progresivo y acompañado de numerosos ejemplos y ejercicios, se pretende facilitar el aprendizaje de los conceptos clave, así como el desarrollo de habilidades analíticas y de resolución de problemas.

La obra se organiza en tres capítulos principales:

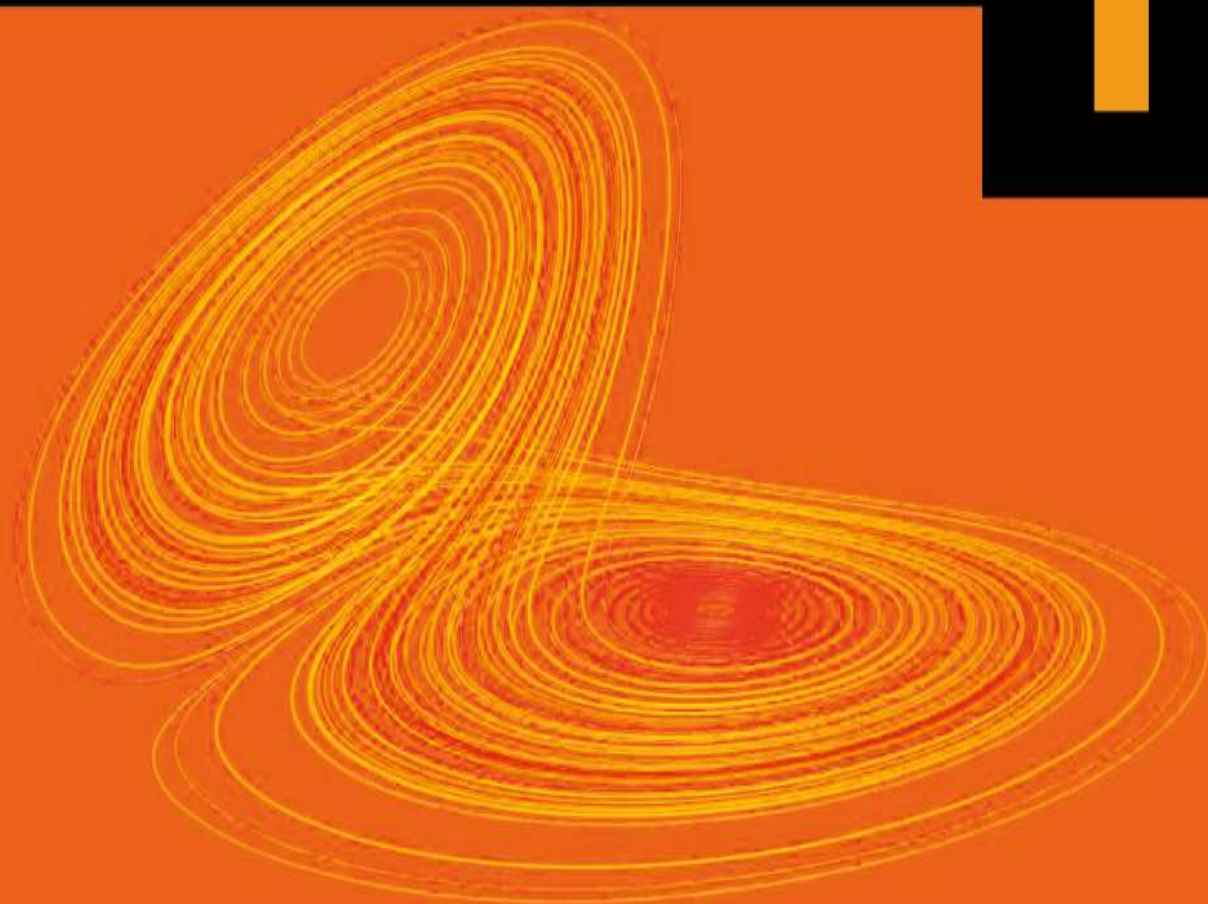
- **Capítulo I: Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Primer Orden.** Se introduce el concepto de ecuación diferencial y se estudian los métodos clásicos de resolución para ecuaciones de primer orden. Se discuten también aplicaciones relevantes en diversas áreas del conocimiento.
- **Capítulo II: Ecuaciones Diferenciales de Orden Superior.** Se abordan las ecuaciones de segundo y mayor orden, especialmente aquellas lineales con coeficientes constantes y variables. Se presentan métodos analíticos de solución, así como técnicas para resolver problemas con condiciones iniciales.
- **Capítulo III: Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Lineales.** Se desarrolla el estudio de sistemas de EDO lineales, tanto homogéneos como no homogéneos.

Cada capítulo ha sido diseñado para desarrollar los temas de manera clara y rigurosa, incorporando ejercicios que promueven el aprendizaje activo. Al final de cada sección, se incluyen actividades de refuerzo y problemas propuestos que permiten consolidar los conocimientos adquiridos.

CAPÍTULO 1

Ecuaciones diferenciales

1



ECUACIONES DIFERENCIALES

1.1.Introducción

Las ecuaciones diferenciales juegan un papel muy importante en todas las ciencias, pues existen conceptos de Física, Química, Economía, entre otros, en los cuales se relacionan variables dependientes con independientes, es decir se habla de ecuaciones diferenciales. Una ecuación diferencial es aquella que relaciona una o varias variables independientes, una función de dichas variables (que es la función incógnita) y las derivadas de dicha función hasta un cierto orden. A diferencia de las ecuaciones algebraicas, en una ecuación diferencial la incógnita es una función (en ocasiones del tiempo), no un número. El objetivo de resolver una ecuación diferencial es encontrar una solución que la satisfaga y esta pueda ser interpretada en términos físicos [1].

1.2.Definiciones básicas

Ecuaciones diferenciales ordinarias

Se presentan varias definiciones:

- Es una igualdad que existe entre variables dependientes con sus variables independientes agregando sus respectivas derivadas. (Espinoza, 2012)
- Es una ecuación que contiene derivadas de una o más variables respecto a una o más variables independientes. (Ramírez, 2022)

Forma general de una ecuación diferencial ordinaria

Si y es la función desconocida de una sola variable independiente x , una ecuación diferencial ordinaria de orden n se puede expresar matemáticamente de un modo conciso mediante la relación (Ricardo, 2018).

$$f(x, y, y', y'', y''', \dots, y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$$

Grado de una ecuación diferencial

El grado es el exponente mayor que tiene una de las derivadas en la ecuación. (Becerril & Elizarraraz, 2004)

$$(y')^2 + 2y = x \rightarrow \text{Grado } 2$$

Orden de una ecuación diferencial

Se denomina orden de una ecuación diferencial al orden de la derivada que lo tenga más alto entre todas las que figuran en dicha ecuación (Ross, 2021).

$$y^{IV} + y^4 + 2(y')^3 + y - x = 0 \rightarrow \text{Orden } 4 \quad \text{Grado } 3$$

1.3. Clasificación de las ecuaciones diferenciales

Existe varias clases de ecuaciones diferenciales, para su estudio se las clasifica de acuerdo con dos parámetros:

- De acuerdo con el tipo
- De acuerdo con el orden

1.3.1. Ecuaciones diferenciales de acuerdo con el tipo

Las ecuaciones diferenciales de acuerdo con el tipo pueden ser: ecuaciones diferenciales ordinarias o ecuaciones diferenciales con derivadas parciales.

1.3.1.1. Ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO)

La relación es que la variable dependiente depende de una sola variable independiente es decir la variable y depende solo de x .

$$f(x, y, y', y'', y''', \dots, y^n) = 0$$

Ejemplos:

- $y' = x + 5$
- $x \frac{dy}{dx} = -x - 35$
- $y''' + 2(y'')^2 = x$
- $\frac{d^2y}{dx^2} + 3 \frac{dy}{dx} = -2y$

Cada una de estas ecuaciones serán estudiadas en los capítulos siguientes.

1.3.1.2. Ecuaciones diferenciales con derivadas parciales

Aquellas que la variable dependiente depende de 2 o más independientes

$$\frac{dy}{dx} + \frac{dv}{du} + \frac{dz}{dw} = 0$$

Ejemplos:

- $\frac{\partial z}{\partial x} = z + x \frac{\partial z}{\partial y}$
- $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^2 + y$

1.3.2. Ecuaciones diferenciales de acuerdo con el orden

Las ecuaciones diferenciales de acuerdo con el orden se clasifican en: ordinarias o de n -ésimo orden (Espinoza, 2012).

1.3.2.1. Ecuaciones diferenciales de primer orden u ordinarias

Son aquellas ecuaciones diferenciales en las que existe solo la primera derivada.

Ejemplos:

- $y' + y - x = 0$
- $y' = x^2 + 3y - \cos x$
- $y = x \frac{dy}{dx} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$

Tipos

Las ecuaciones diferenciales ordinarias se clasifican en:

- ✓ Ecuaciones diferenciales de variables separables.
- ✓ Ecuaciones diferenciales convertibles en variables separables.
- ✓ Ecuaciones diferenciales homogéneas.
- ✓ Ecuaciones diferenciales convertibles en homogéneas.
- ✓ Ecuaciones diferenciales lineales.
- ✓ Ecuaciones diferenciales convertibles en lineales.
- ✓ Ecuaciones diferenciales exactas.
- ✓ Ecuaciones diferenciales convertibles en exactas.

1.3.2.2. Ecuaciones diferenciales de enésimo orden

Aquellas ecuaciones diferenciales en las que se tiene un orden $2, 3, 4, \dots, n$

$$f(x, y, y', y'', y''', y^{IV}, \dots, y^n) = 0$$

Ejemplos:

- $y' = x^2 + 3y - \cos x$
- $y = x \frac{dy}{dx} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$
- $6y''' - y'' + 6y - y = 0$
- $2y''' + y'' - 8y' - 4y$

1.4. Solución de una ecuación diferencial

Se dice que la función $\emptyset$ definida en el intervalo I es solución de la ecuación $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$, si al reemplazar $\emptyset, \emptyset', \dots, \emptyset^{(n)}$ en la ecuación diferencial, esta se reduce a la identidad, es decir que:

$$F = (x, \emptyset, \emptyset', \dots, \emptyset^{(n)}) = 0$$

Obsérvese que

- a) La función $\emptyset$ está definida en un intervalo I .
- b) La función $\emptyset$ es n veces diferenciable.

La función $y = xe^x$ es solución de la ecuación diferencial $y'' = -2y + y = 0$ en el intervalo $I = (-\infty, \infty)$.

Se pueden obtener varios tipos de soluciones que se indican a continuación:

- **Solución general**

La solución general de una ecuación diferencial es el conjunto de todas las funciones que verifican la ecuación diferencial. Además, la solución general de una ecuación diferencial consiste en una familia n-paramétrica de funciones (parámetros que son las constantes que aparecen al realizar la operación de integrar n-veces, siendo n el orden de la ecuación) (Moya & Rojas, 2022).

En este caso la solución viene dado por la ecuación: $y = f(x) + c$. Donde c es una constante arbitraria. La solución general puede tener una o más constantes arbitrarias.

Ejemplo:

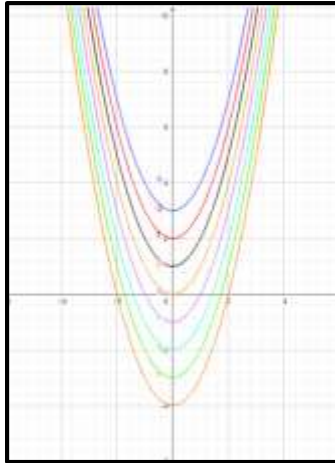
Resolver la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = 2x$

$$\int dy = \int 2x dx$$

$$y = x^2 + C$$

Figura 1

Familia de curvas $y = x^2 + C$



- **Solución particular**

Se llama solución particular de la ecuación diferencial a cualquier función que la satisfaga; esto es, a cualquier elemento del conjunto solución general. Una solución particular se puede obtener fijando valores a los parámetros de la familia de funciones que son solución de la ecuación (Moya & Rojas, 2022).

Ejemplo:

Resolver la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = 2x$; $y(1) = 4$

$$\int dy = \int 2x \, dx$$

$$y = x^2 + C$$

Para $y(1) = 4$

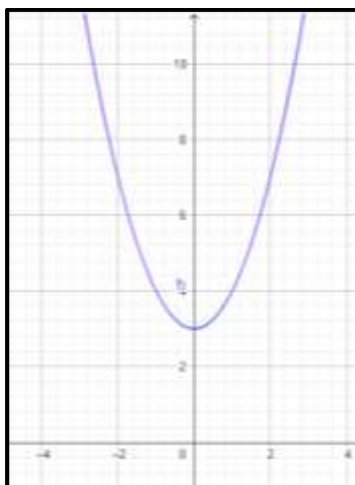
$$4 = (1)^2 + C$$

$$C = 3$$

$$\therefore y = x^2 + 3$$

Figura 2

Curva $y = x^2 + 3$



- **Solución especial o singular**

Es una solución que no está incluida en la solución general; es decir, no se puede obtener a partir de ella asignando un valor conveniente a la constante o que no pertenece a la familia de funciones resultantes (Moya & Rojas, 2022).

1.5.Comprobación de soluciones en ecuación diferencial ordinaria

Procedimiento de solución

- Derivar cuantas veces sean necesarias la solución dada.

- Reemplazar la solución y las derivadas en la Ecuación Diferencial.
- Verificar; si es solución: se dará una igualdad de 0, y si no es solución: la igualdad será diferente de 0. (Vergel, et al., 2022)

Ejemplos

1. **Dado:** $y = Ce^{2x}$, **comprobar que es solución de** $y' - 2y = 0$

Solución:

Se deriva la solución dada según la ecuación:

Sol. General

E.D

$$y = Ce^{2x}$$

$$y' - 2y = 0$$

$$y' = 2Ce^{2x}$$

Se reemplaza en la E.D

$$y' - 2y = 0$$

$$2Ce^{2x} - 2(Ce^{2x}) = 0$$

$$2Ce^{2x} - 2Ce^{2x} = 0$$

Se verifica si es o no solución:

$$0 = 0 \quad (\text{Si es una solución})$$

2. **Dado:** $y = Ce^{-2x} + \frac{e^x}{3}$, **comprobar que es solución de**

$$y' + 2y = \frac{2}{3}e^x$$

Solución:

Se deriva la solución dada según la ecuación:

Sol. General

E.D

$$y = Ce^{-2x} + \frac{e^x}{3}$$

$$y' + 2y = \frac{2}{3}e^x$$

$$y' = -2Ce^{-2x} + \frac{1}{3}e^x$$

Se reemplaza en la E.D

$$y' + 2y = \frac{2}{3}e^x$$

$$-2Ce^{-2x} + \frac{1}{3}e^x + 2(Ce^{-2x} + \frac{e^x}{3}) = \frac{2}{3}e^x$$

$$-2Ce^{-2x} + \frac{1}{3}e^x + 2Ce^{-2x} + \frac{2}{3}e^x = \frac{2}{3}e^x$$

Se verifica si es o no solución:

$$1 = \frac{2}{3} \quad (\text{No es una solución})$$

3. **Dado:** $y = \frac{Ce^t}{1+Ce^t}$, **comprobar que es solución de** $y' = y(1 - y)$

Solución:

Se deriva la solución dada según la ecuación:

Sol. General

E.D

$$y = \frac{Ce^t}{1+Ce^t}$$

$$y' = y(1 - y)$$

$$y' = \frac{C1e^t(1+Ce^t) - Ce^t(Ce^t)}{(1+Ce^t)^2}$$

$$y' = \frac{Ce^t + C^2e^{2t} - C^2e^{2t}}{(1+Ce^t)^2}$$

$$y' = \frac{Ce^t}{(1 + Ce^t)^2}$$

Se reemplaza en la E.D

$$y' = y(1 - y)$$

$$\frac{Ce^t}{(1+Ce^t)^2} = \frac{Ce^t}{1+Ce^t} \left(1 - \frac{Ce^t}{1+Ce^t} \right)$$

$$\frac{Ce^t}{(1+Ce^t)^2} = \frac{Ce^t}{1+Ce^t} \left(\frac{1+Ce^t - Ce^t}{1+Ce^t} \right)$$

$$\frac{Ce^t}{(1+Ce^t)^2} = \frac{Ce^t}{1+Ce^t} \left(\frac{1}{1+Ce^t} \right)$$

Se verifica si es o no solución:

$$\frac{Ce^t}{(1+Ce^t)^2} = \frac{Ce^t}{(1+Ce^t)^2} \quad (\text{Si es una solución})$$

4. Dado: $v = t(C - Int)$, comprobar que es solución de $v' = \frac{v}{t} - 1$

Solución:

Se deriva la solución dada según la ecuación:

Sol. General

E.D

$$v = t(C - Int)$$

$$v' = \frac{v}{t} - 1$$

$$v = tC - tInt$$

$$v' = C - \left(Int + \frac{1}{t}t \right)$$

$$v' = C - Int - 1$$

Se reemplaza en la E.D

$$v' = \frac{v}{t} - 1$$

$$C - Int - 1 = \frac{tC - tInt}{t} - 1$$

$$C - Int - 1 = \frac{t(C - Int)}{t} - 1$$

Se verifica si es o no solución:

$$C - Int - 1 = C - Int - 1 \quad (\text{Si es una solución})$$

Ejercicios propuestos

a. Dadas las siguientes ecuaciones indicar el grado y orden de la ecuación

1) $(1 - x)y'' - 4xy' + 5y = \cos x$

2) $xy''' - y^4 + y = 0$

3) $t^5y^{(4)} - t^3y'' + 6y = 0$

4) $\frac{d^2y}{dx^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$

b. Comprobar si las soluciones dadas corresponden a cada ecuación diferencial.

1) $2y' + y = 0; y = e^{-x/2}$

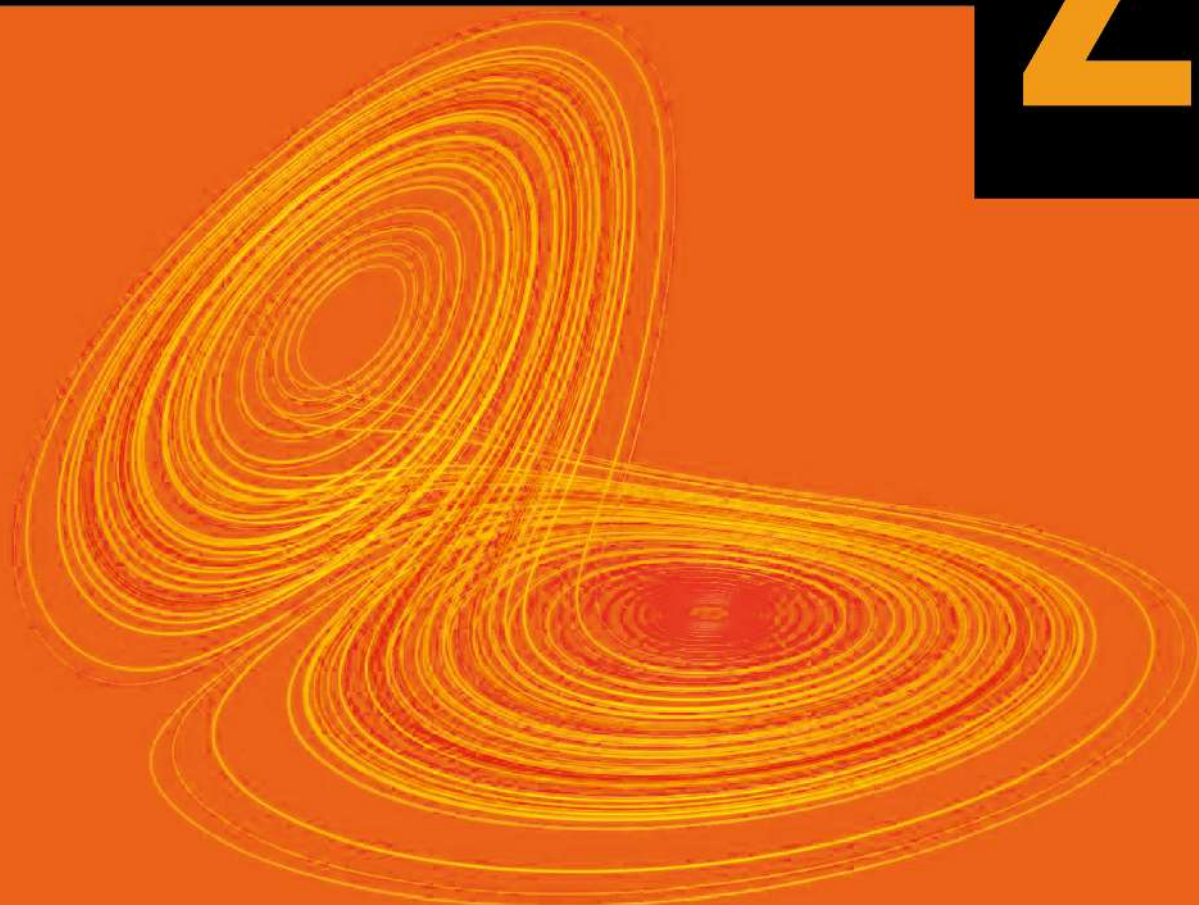
2) $\frac{dy}{dx} + 20y = 24; y = \frac{6}{5} - \frac{6}{5}e^{-20t}$

3) $y'' - 6y' + 13y = 0; y = e^{3x}\cos 2x$

CAPÍTULO 2

Ecuaciones diferenciales ordinarias

2



ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

2.1. Ecuaciones diferenciales ordinarias de variables separables

Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden $f(x, y, y')=0$ que puede escribirse en la forma:

$$f(x)dx + g(y)dy = 0$$

Se llama ecuación diferencial en variables separadas. [16]

Procedimiento de solución

- Separar las variables con sus respectivos diferenciales
- Integrar

$$\int f(x)dx + \int g(y)dy = 0 \text{ [17]}$$

Ejemplos

1. $(x^2 - 1)y' + 2xy = 0$; $x = 2$ $y = 1$

$$\left[(x^2 - 1) \frac{dy}{dx} + 2xy = 0 \right] \frac{dx}{(x^2 - 1) \cdot y}$$

$$\frac{dy}{y} + \frac{2x}{(x^2 - 1)} dx = 0$$

Solucion Particular $x = 2, y = 1$

$$\int \frac{dy}{y} + \int \frac{2x}{(x^2 - 1)} dx = C$$

$$\ln(y) + \ln(x^2 - 1) = \ln(C)$$

$$\ln[y \cdot (x^2 - 1)] = \ln(C)$$

$$y \cdot (x^2 - 1) = C$$

$$y = \frac{C}{(x^2 - 1)}$$

$$y \cdot (x^2 - 1) = C$$

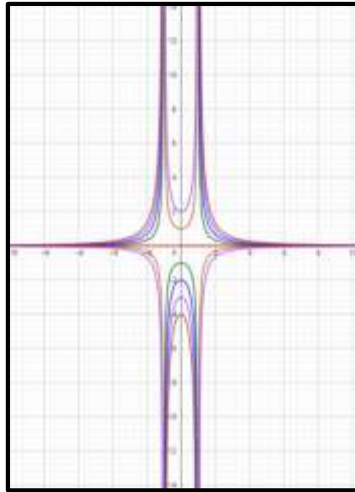
$$1 \cdot (2^2 - 1) = C$$

$$C = 3$$

$$y = \frac{3}{(x^2 - 1)}$$

Figura 3

Familia de curvas $y = \frac{C}{x^2 - 1}$



$$2. \quad (ng^2 + n)dn + (n^2g - g)dg = 0 \quad n = 0 ; g = 1$$

Separar variables

$$ng^2dn + ndn + n^2gdg - gdg = 0$$

$$ndn(g^2 + 1) + gdg(n^2 - 1) = 0$$

Integrar

$$\int \frac{ndn(g^2 + 1)}{(n^2 - 1)(g^2 + 1)} + \int \frac{gdg(n^2 - 1)}{(n^2 - 1)(g^2 + 1)} = C$$

$$\int \frac{ndn}{(n^2 - 1)} + \int \frac{gdg}{(g^2 + 1)} = C$$

$$\frac{1}{2}\ln(n^2 - 1) + \frac{1}{2}\ln(g^2 + 1) = \frac{1}{2}\ln(C)$$

Solución General

$$(n^2 - 1)(g^2 + 1) = C$$

Solución Particular

$$(0^2 - 1)(1^2 + 1) = C$$

$$C = -2$$

$$(n^2 - 1)(g^2 + 1) = -2$$

$$3. \ y(x^3 dy + y^3 dx) = x^3 dy$$

Separar variables

$$yx^3 dy + y^4 dx = x^3 dy$$

$$yx^3 dy - x^3 dy = -y^4 dx$$

$$x^3 dy(y - 1) = -y^4 dx$$

Integrar

$$\int \frac{(y - 1)dy}{-y^4} = \int \frac{dx}{x^3} + C$$

$$-\int (y - 1)y^{-4} dy = \int x^{-3} dx + C$$

$$-\int y^{-3} dy + \int y^{-4} dy = -\frac{1}{2x^2} + C$$

$$\frac{1}{2y^2} - \frac{1}{3y^3} + \frac{1}{2x^2} = C$$

$$3x^2y - 2x^2 + 3y^2 = Cx^2y^3$$

$$4. e^w q dq - (e^{-q} + e^{-2w-q}) dw = 0$$

Separar variables

$$e^w q dq - [e^{-q}(1 + e^{-2w})] dw = 0$$

$$e^w q dq = e^{-q}(1 + e^{-2w}) dw$$

Integrar

$$\int \frac{e^w q dq}{e^{-q}(e^w)} = \int \frac{e^{-q}(1 + e^{-2w}) dw}{e^{-q}(e^w)}$$

$$\int \frac{q dq}{e^{-q}} - \int \frac{(1 + e^{-2w}) dw}{(e^w)} = C$$

$$\int e^q q dq - \int e^{-w} dw - \int e^{-3w} dw = C$$

$$u = q \quad v = e^q$$

$$du = dq \quad dv = e^q dq$$

$$qe^q - \int e^q dq + e^{-w} + \frac{1}{3} e^{-3w} = C$$

$$qe^q - e^q + e^{-w} + \frac{1}{3} e^{-3w} = C$$

$$e^q(p - 1) + e^{-w}(1 + \frac{1}{3} e^{-2w}) = C$$

$$5. \frac{dy}{dx} = \left(\frac{2y+3}{4x+5}\right)^2$$

Separar variables

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(2y + 3)^2}{(4x + 5)^2}$$

$$\frac{dy}{(2y + 3)^2} = \frac{dx}{(4x + 5)^2}$$

Integrar

$$\int (2y + 3)^{-2} dy - \int (4x + 5)^{-2} dx = C$$

$$u = 2y + 3 \quad t = 4x + 5$$

$$du = 2dy \quad dt = 4dx$$

$$\frac{1}{2} \int u^{-2} du - \frac{1}{4} \int t^{-2} dt = C$$

$$-\frac{1}{2} u^{-1} + \frac{1}{4} t^{-1} = C$$

$$-\frac{1}{2} (2y + 3)^{-1} + \frac{1}{4} (4x + 5)^{-1} = C$$

$$-\frac{1}{2(2y + 3)} + \frac{1}{4(4x + 5)} = C$$

2.1.1. Ecuaciones diferenciales ordinarias convertibles en variables separables

Una ecuación diferencial ordinaria convertible en variables separables es aquella que tiene la forma:

$$f(ax + by \dots) = 0$$

Si se da esto, interviene un cambio de variable: $z = ax + by$ [23]

Procedimiento de solución

- 1) Se realiza el cambio de variable: $z = x + y$
- 2) Se deriva: $z' = a + by'$
- 3) A la ecuación diferencial original se la deja en términos de “y” y de “z”: $y' = f(z)$
- 4) Del paso 2 se despeja y' y se reemplaza en 3: $\frac{z'-a}{b} = f(z)$
- 5) Integrar z en function de x
- 6) Reemplazar z en $f(x, y)$

Ejercicios

1. $y' = (x + y + 1)^2 - (x + y - 1)^2$

$$z = x + y$$

$$z' = 1 + y$$

$$y' = z' - 1$$

$$y' = (z + 1)^2 - (z - 1)^2$$

$$z' - 1 = z^2 + 2z + 1 - z^2 + 2z - 1$$

$$z' = 4z + 1$$

$$\left[\frac{dz}{dx} = 4z + 1 \right] dx$$

$$\frac{dz}{4z + 1} = dx$$

$$\int \frac{dz}{4z + 1} = \int dx + C$$

$$\frac{1}{4} \ln(4z + 1) - x = C$$

$$\ln(4z + 1)^{\frac{1}{4}} = e^{c+x}$$

$$4z + 1 = e^{4(c+x)}$$

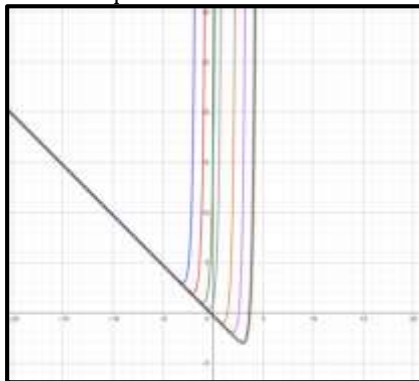
$$z = \frac{e^{4(c+x)} - 1}{4}$$

$$x + y = \frac{e^{4(c+x)} - 1}{4}$$

$$y = \frac{e^{4(c+x)} - 1}{4} - x$$

Figura 4.

Familia de curvas $y = \frac{e^{4(c+x)} - 1}{4} - x$



2. $y' = (x + y)^2$

1. $z = x + y$

$z' = 1 + y'$

2. $y' = z' - 1$

Remplazando 1 y 2 en la ecuación original

$$z' - 1 = z^2$$

$$\frac{dz}{dx} = z^2 + 1$$

$$\int \frac{dz}{z^2 + 1} = \int dx + C$$

$$\arctg(z) = x + C$$

$$\arctg(x + y) = x + C$$

$$3. \quad y' = (2x + y) * \ln(2x + y) - 2$$

$$1. \quad z = 2x + y$$

$$z' = 2 + y'$$

$$2. \quad y' = z' - 2$$

1 y 2 en la ecuación original

$$z' - 2 = z \ln(z) - 2$$

$$\int \frac{dz}{z \ln(z)} = \int dx + C$$

$$u = \ln(z)$$

$$du = \frac{1dz}{z}$$

$$\int \frac{du}{u} = x + c$$

$$\ln(\ln(z)) = x + C$$

$$\ln(\ln(2x + y)) = x + C$$

$$4. \quad (1 - (xy) * \cos(xy))dx - x^2 \cos(xy)dy = 0$$

$$y' = \frac{1 - xy * \cos(xy)}{x^2 * \cos(xy)}$$

$$1. \quad z = xy$$

$$z' = y + xy'$$

$$y' = \frac{z' - y}{x}$$

$$y' = \frac{z' - \frac{z}{x}}{x}$$

$$2. \quad y' = \frac{z'x - z}{x^2}$$

Remplazando 1 y 2 en la ecuación original

$$\frac{z'x - z}{x^2} = \frac{1 - z \cos z}{x^2 * \cos z}$$

$$z'x = \frac{1 - z \cos z}{\cos z} + z$$

$$z' = \frac{1 - z \cos z + z \cos z}{x * \cos z}$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x * \cos z}$$

$$\int \cos z \, dz = \int \frac{dx}{x} + C$$

$$3. \quad \text{senz} = \ln x + C$$

Remplazando 1 y 2 en 3

$$\sin(xy) = \ln x + C$$

2.1.2. Ejemplos Varios

Ejercicio 1

$$\sec^2 x \, dy + \csc y \, dy = 0$$

Solución:

$$\sec^2 x \, dy = -\csc y \, dx$$

$$\frac{dy}{\csc y} = -\frac{dx}{\sec^2 x}$$

$$\sen y \, dy = -\cos^2 x \, dx$$

$$\int \sen y \, dy = -\int \cos^2 x \, dx$$

$$-\cos y = -\int \cos^2 x \, dx$$

$$\cos y = \int \cos^2 x \, dx$$

$$\cos y = \frac{\cos x \cdot \sen x + x}{2} + c$$

$$2\cos y = \cos x \sen x + x + c$$

$$4\cos y = 2\sen x \cdot \cos x + 2x + c$$

$$4\cos y = \sen 2x + 2x + c \quad (\text{Solución General})$$

Ejercicio 2

$$\sen^2 y \, dx + \cos^2 x \, dy = 0; \quad y(\pi/4) = \pi/4$$

Solución:

$$\frac{dx}{\cos^2 x} - \frac{dy}{\sin^2 y} = 0$$

$$\sec^2 x \, dx + \csc^2 y \, dy = 0$$

$$\int \sec^2 x \, dx + \int \csc^2 y \, dy = c$$

$$\tan x - \cot y = c \quad (1)$$

$$x = \pi / 4, y = \pi / 4 \quad (2)$$

Reemplazando (2) en (1)

$$\tan(\pi/4) - \cot(\pi/4) = c$$

$$1 - 1 = c$$

$$c = 0 \quad (3)$$

Sustituyendo (3) en (1), se obtiene:

$$\tan x - \cot y = 0$$

$$\tan x = \cot y$$

$$\tan x = \frac{1}{\tan y}$$

$$\tan x \cdot \tan y = 1 \quad (\text{Solución Particular})$$

Ejercicio 3

$$x\sqrt{1+y^2}dx = y\sqrt{1+x^2}dy$$

Solución:

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx - \frac{y}{\sqrt{1+y^2}}dy = 0$$

$$\begin{aligned}
& \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx - \int \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} dy = c_1 \\
& \frac{1}{2} \int \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} dx - \frac{1}{2} \int \frac{2y}{\sqrt{1+y^2}} dy = c_1 \\
& \int \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} dx - \int \frac{2y}{\sqrt{1+y^2}} dy = 2c_1 \quad (1)
\end{aligned}$$

Sea:

$$\begin{aligned}
u &= 1 + x^2 \rightarrow du = 2x dx \\
v &= 1 + y^2 \rightarrow dv = 2y dy
\end{aligned} \quad (2)$$

Al sustituir la

(2) en (1) nos quedan dos integrales de evaluación directa:

$$\begin{aligned}
& \int \frac{du}{\sqrt{u}} - \int \frac{dv}{\sqrt{v}} = 2c_1 \\
& \int u^{-1/2} du - \int v^{-1/2} dv = c_2 \\
& 2u^{1/2} - 2v^{1/2} = c_2 \quad \{c_2 = 2c_1\} \quad (3) \\
& 2(1+x^2)^{1/2} - 2(1+y^2)^{1/2} = c_2 \\
& \sqrt{1+x^2} - \sqrt{1+y^2} = \frac{1}{2}c_2 \quad \{(2) \text{ en } (3)\} \\
& \sqrt{1+x^2} - \sqrt{1+y^2} = c \quad \{c_2 = c^2/2\}
\end{aligned}$$

Ejercicio 4

$$e^x y \frac{dy}{dx} = e^{-y} + e^{-2y-y}$$

Solución:

$$e^x y \frac{dy}{dx} = e^{-y} + e^{-2y} e^{-y}$$

$$e^x y \frac{dy}{dx} = e^{-y} (1 + e^{-2x})$$

$$ye^y dy = e^{-x} (1 + e^{-2x}) dx$$

$$ye^y dy = (e^{-x} + e^{-3x}) dx$$

$$\int ye^y dy = \int (e^{-x} + e^{-3x}) dx$$

$$\int ye^y dy = -e^{-x} - \frac{1}{3} e^{-3x} + C \quad (1)$$

$$\int ye^y dy \quad (2)$$

Sea:

$$u = y \rightarrow du = dy$$

$$dv = e^y dy \rightarrow v = e^y \quad (3)$$

Sustituyendo los valores dados en (3) en la fórmula de integración por partes, la integral (2) queda:

$$\int ye^y dy = ye^y - \int e^y dy$$

$$\int ye^y dy = ye^y - e^y \quad (4)$$

$$ye^y - e^y = -e^{-x} - \frac{1}{3}e^{-3x} + C \quad \{(4) \text{ en } (1)\}$$

$$ye^y - e^y + e^{-x} + \frac{1}{3}e^{-3x} = C \text{ (Solución General)}$$

Ejercicio 5

$$\frac{dt}{ds} = \frac{6s^2}{2t + cost}$$

Solución:

$$(2t + cost)dt = 6s^2 ds$$

$$2 \int t dt + \int cost dt = 6 \int s^2 ds$$

$$2 * \frac{t^2}{2} + sent = 6 * \frac{s^3}{3} + c$$

$$t^2 + seny = 2s^3 + c \text{ (Solución General)}$$

Ejercicio 6

$$(6w - sec^2w)dw - (1 + senz)dz = 0$$

Solución:

$$6 \int w dw - \int sec^2w dw = \int dz + \int senz dz$$

$$6 * \frac{w^2}{2} - tanw = z - cosz + c$$

$$3w^2 - tanw = z - cosz + c \text{ (Solución General)}$$

Ejercicios propuestos



$$1) \frac{dt}{ds} = \frac{e^{2s}}{t}$$

$$2) \frac{dr}{da} = \frac{r^2}{1+r} * a^2$$

$$3) \frac{dt}{ds} = \text{sen } 5s$$

$$4) \frac{dz}{dw} = (w + 1)^2$$

$$5) ds + e^{3s} dt = 0$$

$$6) (w + 1) \frac{dz}{dw} = w + 6$$

$$7) \frac{dt}{ds} + 2st = 0$$

$$8) \frac{dt}{ds} = \frac{t+1}{s}$$

2.2. Ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden homogéneas

Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden homogénea es una ecuación de la forma $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$, donde $P(x,y)$ y $Q(x,y)$ son funciones homogéneas del mismo grado y no hay términos independientes de y o dy . (Zuleta, 2018)

Condición necesaria y suficiente

Que cada término de la ecuación tenga el mismo grado

$$ax^2y' + bxy + cy^2 = 0 \rightarrow \text{Grado } 2$$

Procedimiento de solución

- Cambios de variable:
 $y = ux$
 $y' = u'x + u$
- Integrar en función de u y x (variables separables)
- Solución en $f(x,y)$ reemplazar $u(x,y)$

Ejercicios

1. $(x^2 + y^2)dx - 2xydy = 0$

Reemplazar:

$$y = ux$$

$$y' = u'x + u$$

$$[(x^2 + y^2)dx - 2xydy = 0]/dx$$

$$(x^2 + y^2) - 2xyy' = 0$$

$$(x^2 + u^2x^2) - 2x^2u(u'x + u) = 0$$

$$x^2 + u^2x^2 - 2x^3uu' - 2x^2u^2 = 0$$

$$-2x^3uu' - x^2u^2 + x^2 = 0$$

$$-2x^3uu' + x^2(-u^2 + 1) = 0$$

$$\int \frac{-2x^3u}{(-u^2 + 1)x^3} du + \int \frac{x^2(-u^2 + 1)}{x^3(-u^2 + 1)} dx = C$$

$$2 \int \frac{u}{u^2 - 1} + \int \frac{dx}{x} = C$$

$$\ln(u^2 - 1) + \ln(x) = C$$

$$\ln\left(\frac{y^2}{x^2} - 1\right) + \ln(x) = C$$

$$\ln\left(\frac{y^2 - x^2}{x^2}\right) + \ln(x) = C$$

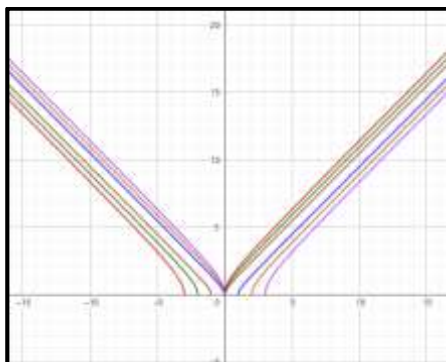
$$\frac{y^2 - x^2}{x} = C$$

$$y^2 = Cx + x^2$$

$$y = \sqrt{Cx + x^2}$$

Figura 5

Familia de curvas $y = \sqrt{Cx + x^2}$



$$2. h(g^2 + gh - 2h^2)dg + g(3h^2 - gh - g^2)dh = 0$$

Reemplazar:

$$h = ug$$

$$h' = u'g + u$$

$$ug(g^2 + g(ug) - 2(ug)^2)dg + g(3(ug)^2 - g(ug) - g^2)dh = 0$$

$$u(1 + u - 2u^2) + (3u^2 - u - 1)(u'g) + (3u^2 - u - 1)(u) = 0$$

$$(3u^2 - u - 1)(u'g) + (u^2)(u) = 0$$

$$(3u^2 - u - 1)(gdu) + (u^2)(udg) = 0$$

Integrar en función de u $\wedge$ g (variables separables)

$$\int \frac{(3u^2 - u - 1)du}{u^3} = - \int \frac{dg}{g}$$

$$3 \ln(u) + \frac{1}{u} + \frac{1}{2u^2} + \ln g = C$$

Solución en $f(u,g)$ reemplazar u :

$$\ln\left(\frac{h^3}{g^3}\right) + \frac{g}{h} + \frac{g^2}{2h^2} + \ln g = C$$

$$\ln\left(\frac{h^3}{g^2}\right) + \frac{g}{h} + \frac{g^2}{2h^2} = C$$

$$3. \ y \, dx = \left(x + \sqrt{y^2 - x^2}\right) dy$$

Reemplazar:

$$y = ux$$

$$y' = ux' + u$$

$$(u'x + u) = \frac{ux}{(x + \sqrt{(ux)^2 - x^2})}$$

$$(u'x + u) = \frac{ux}{x + x\sqrt{u^2 - 1}}$$

$$u'x = \frac{ux}{x(1 + \sqrt{u^2 - 1})} - u$$

$$u'x = \frac{u}{1 + \sqrt{u^2 - 1}} - u$$

$$u'x = \frac{u - u - u\sqrt{u^2 - 1}}{1 + \sqrt{u^2 - 1}}$$

Integrar en función de u ^ x (variables separables)

$$\frac{du}{dx} x = - \frac{u\sqrt{u^2 - 1}}{1 + \sqrt{u^2 - 1}}$$

$$\int \frac{dx}{x} = \left(\frac{1 + \sqrt{u^2 - 1}}{u\sqrt{u^2 - 1}} \right) du$$

$$\ln(x) = \int - \frac{du}{u\sqrt{u^2 - 1}} - \int \frac{\sqrt{u^2 - 1}}{u\sqrt{u^2 - 1}} du$$

$$\ln x = - \operatorname{arcsec}(u) - \ln u$$

Solución en $f(u,x)$ reemplazar u :

$$\ln x = -\operatorname{arcsec} \frac{y}{x} - \ln \frac{y}{x} + \ln C$$

$$-\operatorname{arcsec} \frac{y}{x} = \ln \frac{y}{C}$$

$$4. \quad \frac{dr}{dt} = \frac{r}{t} + \sqrt{\frac{r^2}{t^2} - 1}$$

$$r't = r + \sqrt{r^2 - t^2}$$

Reemplazar:

$$r = ut$$

$$r' = u't + u$$

$$(u't + u)t = ut + \sqrt{(ut)^2 - t^2}$$

$$(u't + u) = u + \sqrt{u^2 - 1}$$

Integrar en función de $u \wedge t$ (variables separables)

$$tdu = (\sqrt{u^2 - 1})dt$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - 1}} - \int \frac{dt}{t} = \int 0$$

$$\ln(u + \sqrt{u^2 - 1}) - \ln t = \ln C$$

Solución en $f(u,t)$ reemplazar u :

$$\ln\left(\frac{r}{t} + \sqrt{\frac{r^2}{t^2} - 1}\right) - \ln t = \ln C$$

$$\frac{r + \sqrt{r^2 - t^2}}{t^2} = C$$

$$r + \sqrt{r^2 - t^2} = Ct^2$$

$$5. \quad p \frac{dq}{dp} = q - \sqrt{p^2 + q^2}$$

$$q' = \frac{q - \sqrt{p^2 + q^2}}{p}$$

Reemplazar:

$$q = up$$

$$q' = u'p + u$$

$$(u'p + u) = \frac{up - \sqrt{p^2 - (up)^2}}{p}$$

$$u'p = -\sqrt{1 - u^2}$$

Integrar en función de u ^ p (variables separables)

$$\int \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} + \int \frac{dp}{p} = \int 0$$

$$\ln(u + \sqrt{1 + u^2}) + \ln(p) = \ln C$$

Solución en $f(u,p)$ reemplazar u :

$$\ln\left(\frac{q}{p} + \sqrt{1 + \frac{q^2}{p^2}}\right) + \ln(p) = \ln C$$

$$\ln\left(\left(\frac{q + \sqrt{p^2 + q^2}}{p}\right)p\right) = \ln C$$

$$q + \sqrt{p^2 + q^2} = C$$

2.2.1. Ecuaciones diferenciales ordinarias convertibles en homogéneas (CASO 1)

Estas ecuaciones tienen la forma:

$$(ax + by + c)dx + (a_1x + b_1y + d)dy = 0$$

Pero para verificar que es Convertible en Homogénea Caso 1, los valores de sus coeficientes deben ser diferentes, es decir: $\frac{a}{b} \neq \frac{a_1}{b_1}$

Procedimiento de solución

- Dejar el ejercicio en la forma: $y' = \frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+d}$
- En la ecuación se debe realizar el siguiente reemplazo:

$$\begin{cases} x = x_1 + h \\ y = y_1 + k \\ y' = y_1' \end{cases}$$

- Se determina los valores de h y k mediante un sistema de ecuaciones.
- Sustituir el valor de h y k en la ecuación diferencial.
- Convertir en Ecuación Diferencial Homogénea, y resolverla como tal.

Ejercicios

1. $(x - 4y - 9)dx + (4x + y - 2)dy = 0$

$$y' = \frac{-x + 4y + 9}{4x + y - 2}$$

$$x = x1 + h$$

$$y = y1 + k$$

$$y' = y1'$$

$$y1' = \frac{-x1 - h + 4y1 + 4k + 9}{4x1 + 4h + y1 + k - 2} \qquad \frac{(A)[(-h + 4k + 9).4]}{(B)4h + k - 2}$$

$$y1'$$

$$= \frac{-x1 + 4y1 + (-h + 4k + 9)(A)}{4x1 + y1 + (4h + k - 2)(B)} \qquad \frac{-4h + 16k + 36}{4h + k - 2}$$

$$y1' = \frac{-x1 + 4y1}{4x1 + y1} \qquad k = -2 \quad h = 1$$

$$y1 = u.x1$$

$$y1' = u'x1 + u$$

$$(u'x1 + u)(4x1 + ux1) = -x1 + 4ux1$$

$$4u'x1^2 + x1^2uu' + 4ux1 + x1u^2 + x1 - 4ux1 = 0$$

$$4u'x1^2 + x1^2uu' + x1u^2 + x1 = 0$$

$$x1^2u'(4 + u) + x1(u^2 + 1) = 0$$

$$\int \frac{x1^2(4 + u)}{(u^2 + 1).x1^2} du + \int \frac{x1(u^2 + 1)}{(u^2 + 1).x1^2} dx1 = C$$

$$\int \frac{u + 4}{u^2 + 1} du + \int \frac{dx1}{x1} = C$$

$$\int \frac{u}{u^2 + 1} du + \int \frac{4}{u^2 + 1} du + \ln(x1) = C$$

$$\frac{1}{2} \ln(u^2 + 1) + 4arctg(u) + \ln(x1) = C$$

$$\ln(u^2 + 1)^{\frac{1}{2}}.x1 + 4arctg(u) = C$$

$$\ln\left(\frac{y1^2}{x1^2} + 1\right)^{\frac{1}{2}}.x1 + 4arctg\left(\frac{y1}{x1}\right) = C$$

$$\ln(y1^2 + x1^2)^{\frac{1}{2}} + 4\arctan\left(\frac{y1}{x1}\right) = C$$

$$\ln((y+2)^2 + (x-1)^2)^{\frac{1}{2}} + 4\arctan\left(\frac{y+2}{x-1}\right) = C$$

$$2. \quad \frac{dv}{dt} = \frac{t+v-1}{t-v+1}$$

$$v' = \frac{t+v-1}{t-v+1}$$

$$\begin{cases} t = t1 + h & t = t1 + 0 & t1 = t \\ v = v1 + k & v = v1 + 1 & v1 = v - 1 \\ & v' = v1' \end{cases}$$

$$v' = \frac{t1+h+v1+k-1}{t1+h-v1-k+1} = \frac{t1+v1+(h+k-1)}{t1-v1+(h-k+1)} \begin{cases} h+k-1 | h=0 \\ h-k+1 | k=1 \end{cases}$$

$$v1' = \frac{t1+v1}{t1-v1} \quad \left\{ \begin{array}{l} v1 = ut1 \\ v1' = u't1 + u \end{array} \right\}$$

$$(u't1 + u) = \frac{t1 + ut1}{t1 - ut1}$$

$$(u't1 + u)(t1 - ut1) = (t1 + ut1)$$

$$u't1^2 - u'ut1^2 + ut1 - t1u^2 - t1 - ut1 = 0$$

$$u't1^2(1-u) - t1(u^2+1) = 0$$

$$\int \frac{t1^2(1-u)du}{(u^2+1)t1^2} - \int \frac{t1(u^2+1)dt1}{(u^2+1)t1^2} = \int 0$$

$$\int \frac{(1-u)du}{(u^2+1)} - \int \frac{dt1}{t1} = \int 0$$

$$\int \frac{du}{u^2+1} - \int \frac{udu}{u^2+1} - \int \frac{dt1}{t1} = \int 0$$

$$\arctan u - \frac{1}{2} \ln(u^2+1) - \ln t1 = C$$

$$\arctg \frac{v1}{t1} - \left[\ln \left(\frac{v1^2}{t1^2} + 1 \right)^{\frac{1}{2}} t1 \right] = C$$

$$\arctg \frac{v-1}{t} - \left[\ln \left(\frac{v1^2 + t1^2}{t1^2} \right)^{\frac{1}{2}} t1 \right] = C$$

$$\arctg \frac{v-1}{t} - \left[\ln \left(\frac{(v-1)^2 + t^2}{t^2} \right)^{\frac{1}{2}} t \right] = C$$

$$\arctg \frac{v-1}{t} = \ln \sqrt{(v-1)^2 + t^2} + C$$

$$3. \quad (2t + 3s)dt + (s + 2)ds = 0$$

$$s' = \frac{-2t-3s}{s+2} \quad \left\{ \begin{array}{lll} t = t1 + h & t = t1 + 3 & t1 = t - 3 \\ s = s1 + k & s = s1 - 2 & s1 = s + 2 \\ & s' = s1' & \end{array} \right\}$$

$$s1' = \frac{-2t1-2h-3s1-3k}{s1+k+2} = \frac{-2t1-3s1+(-2h-3k)}{s1+(k+2)}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -2h-3k \\ k+2 \end{array} \middle| \begin{array}{l} k = -2 \\ h = 3 \end{array} \right\}$$

$$s1' = \frac{-2t1-3s1}{s1} \quad \left\{ \begin{array}{l} s1 = ut1 \\ s1' = u't1 + u \end{array} \right\}$$

$$(u't1 + u)(ut1) = -2t1 - 3ut1$$

$$u'ut1^2 + u^2t1 + 2t1 + 3ut1 = 0$$

$$u'ut1^2 + t1(u^2 + 3u + 2) = 0$$

$$\int \frac{ut1^2}{(u^2 + 3u + 2)t1^2} + \int \frac{t1(u^2 + 3u + 2)}{(u^2 + 3u + 2)t1^2}$$

$$\int \frac{udu}{(u+2)(u+1)} + \int \frac{dt1}{t1} = \int 0$$

Fracciones Parciales: $\int \frac{udu}{(u+2)(u+1)}$

$$\int \frac{2du}{(u+2)} + \int \frac{-du}{(u+1)} + \text{Int}1 = \int 0 \quad \frac{A}{(u+2)} + \frac{B}{(u+1)} = \frac{A(u+1)+B(u+2)}{(u+2)(u+1)}$$

$$2\ln(u+2) - \ln(u+1) + \text{Int}1 = \ln C \quad u = Au + A + bu + 2B$$

$$\frac{\left(\frac{s1}{t1}+2\right)^2 t1}{\left(\frac{s1}{t1}+1\right)} = C \quad \left\{ \begin{array}{l} 1 = A + B \\ 0 = A + 2B \end{array} \middle| \begin{array}{l} A = 2 \\ B = -1 \end{array} \right\}$$

$$\frac{\left(\frac{s1+2t1}{t1}\right)^2 t1}{\left(\frac{s1+t1}{t1}\right)} = C$$

$$\frac{(s+2+2t-6)^2}{(s+2+t-3)} = C$$

$$\frac{(s+2t-4)^2}{(s+t-1)} = C$$

$$4. \quad \frac{dT}{dt} = \frac{2t+3T+1}{3t-2T-5}$$

$$\left\{ \begin{array}{lll} t = t1 + h & t = t1 + 1 & t1 = t - 1 \\ T = T1 + k & T = T1 - 1 & T1 = T + 1 \\ & T' = T1' & \end{array} \right\}$$

$$T' = \frac{2t+3T+1}{3t-2T-5}$$

$$T1' = \frac{2t1+2h+3T1+3k+1}{3t1+3h-2T1-2k-5} = \frac{2t1+3T1+(2h+3k+1)}{3t1-2T1+(3h-2k-5)}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2h+3k+1 \\ 3h-2k-5 \end{array} \middle| \begin{array}{l} h = 1 \\ k = -1 \end{array} \right\}$$

$$T1' = \frac{2t1+3T1}{3t1-2T1} \quad \left\{ \begin{array}{l} T1 = ut1 \\ T1' = u't1 + u \end{array} \right\}$$

$$(u't1 + u)(3t1 - 2ut1) = 2t1 + 3ut1$$

$$u't1^2 - 2u'ut1^2 + 3ut1 - 2u^2t1 - 2t1 - 3ut1 = 0$$

$$u't1^2(1 - 2u) - 2t1(u^2 + 1) = 0$$

$$\int \frac{t1^2(1-2u)du}{t1^2(u^2+1)} - \int \frac{2t1(u^2+1)dt1}{t1^2(u^2+1)} = \int 0$$

$$\int \frac{1-2u}{u^2+1} du - 2 \int \frac{dt1}{t1} = \int 0$$

$$\int \frac{du}{u^2+1} - 2 \int \frac{u du}{u^2+1} - 2 \int \frac{dt1}{t1} = \int 0$$

$$\arctg u - \ln(u^2+1) - 2\ln t1 = C$$

$$\arctg u - [\ln(u^2+1) + 2\ln t1] = C$$

$$\arctg \frac{T1}{t1} - \ln\left(\frac{T1^2}{t1^2} + 1\right) t1^2 = C$$

$$\arctg \frac{T1}{t1} - \ln\left(\frac{T1^2 + t1^2}{t1^2}\right) t1^2 = C$$

$$\arctg \frac{(T+1)}{(t-1)} - \ln[(T+1)^2 + (t-1)^2] = C$$

2.2.2. Ecuaciones diferenciales ordinarias convertibles en homogéneas (CASO 2)

Estas ecuaciones tienen la forma:

$$Mdx + Ndy = 0$$

Donde M y N son funciones (x,y) de diferente grado

Procedimiento de solución

- Realizar el cambio de variable:

$$y = Z^\alpha$$

$$y' = \alpha Z^{\alpha-1} Z'$$

- Igualar exponente de cada término para hallar α .

- Reemplazar el valor de α en la ecuación diferencial.
- Comprobar si la ecuación se convertirá en homogénea.
- Resolver como EDO homogénea.

Ejercicios

1. $(y^2 - 3x^2y)dx + x^3dy = 0$

Reemplazar:

$$y = Z^\alpha$$

$$y' = \alpha Z^{\alpha-1} Z'$$

$$(y^2 - 3x^2y) + x^3y' = 0$$

$$(Z^{2\alpha} - 3x^2Z^\alpha) + x^3(\alpha Z^{\alpha-1}Z') = 0$$

Igualar exponentes:

$$2\alpha = 2 + \alpha = 3 + \alpha - 1$$

$$\alpha = 2$$

Reemplazar α

$$(Z^4 - 3x^2Z^2) + 2x^3ZZ' = 0$$

$$Z = ux$$

$$Z' = u'x + u$$

$$(u^4x^4 - 3x^2u^2x^2) + 2x^3ux(u'x + u) = 0$$

$$(u^4x^4 - 3x^4u^2) + 2x^4u(u'x + u) = 0$$

$$u^4x^4 - 3x^4u^2 + 2x^5uu' + 2x^4u^2 = 0$$

$$2x^5uu' + u^4x^4 - x^4u^2 = 0$$

$$2x^5uu' + u^2x^4(u^2 - 1) = 0$$

Integrar

$$\int \frac{2x^5 u}{u^2(u^2 - 1) \cdot x^5} du + \int \frac{u^2 x^4 (u^2 - 1)}{u^2(u^2 - 1) \cdot x^5} dx = C$$

$$\int \frac{2}{u(u^2 - 1)} du + \int \frac{1}{x} dx = C$$

Integración parcial

$$\frac{2}{u(u^2 - 1)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{(u^2 - 1)}$$

$$2 = A(u^2 - 1) + B(u)$$

$$A = -2 \quad B = 2$$

$$\int \frac{A}{u} + \int \frac{B}{(u^2 - 1)} + \int \frac{1}{x} dx = C$$

$$\int \frac{-2}{u} du + \int \frac{2}{(u^2 - 1)} du + \int \frac{1}{x} dx = C$$

$$-2 \ln(u) + 2 \left[\frac{1}{2} \ln \left(\frac{u-1}{u+1} \right) \right] + \ln(x) = C$$

$$-2 \ln(u) + \ln \left(\frac{u-1}{u+1} \right) + \ln(x) = C$$

$$\frac{\left(\frac{u-1}{u+1} \right) \cdot x}{u^2} = C$$

Reemplazar el valor de u y de Z

$$u = \frac{Z}{x}$$

$$y = Z^\alpha$$

$$y = Z^2$$

$$y^{\frac{1}{2}} = Z$$

$$\frac{\left(\frac{\frac{z}{x}-1}{\frac{z}{x}+1}\right).x}{\left(\frac{z}{x}\right)^2} = C \quad ; \quad \frac{\left(\frac{\frac{\frac{1}{y^2}-1}{\frac{x}{1}}}{\frac{y^2}{x}+1}\right).x}{\left(\frac{y^2}{x}\right)^2} = C$$

$$2. \quad 2(fg^2 + 1)dg + g^3df = 0$$

Remplazar:

$$g = z^\alpha$$

$$g' = \alpha z^{\alpha-1} z'$$

$$2(fz^{2\alpha} + 1)(\alpha z^{\alpha-1}) + z^{3\alpha} = 0$$

$$2\alpha(z^{3\alpha-1}f + z^{\alpha-1}) + z^{3\alpha} = 0$$

Igualar exponentes:

$$\alpha - 1 = \alpha - 1 = 3\alpha$$

$$\alpha = -\frac{1}{2}$$

$$-\left(fz^{-\frac{5}{2}} + z^{-\frac{3}{2}}\right)dz + z^{-\frac{3}{2}}dx = 0$$

Resolver la ecuación como homogénea:

$$z = uf$$

$$z' = u'f + u$$

$$\left(-u^{-\frac{5}{2}}f^{-\frac{5}{2}} - (uf)^{-\frac{3}{2}}\right)(u'f + u) + (uf)^{-\frac{3}{2}} = 0$$

$$(u'f + u) = \frac{-(uf)^{-\frac{3}{2}}}{\left(-u^{-\frac{5}{2}}f^{-\frac{3}{2}} - (uf)^{-\frac{3}{2}}\right)}$$

$$(u'f + u) = \frac{-(uf)^{\frac{-3}{2}}}{-(uf)^{\frac{-3}{2}} \left(u^{-\frac{1}{2}} + 1\right)}$$

$$(u'f + u) = \frac{1}{\left(u^{-\frac{1}{2}} + 1\right)}$$

$$(u'f) = \frac{1}{\left(u^{-\frac{1}{2}} + 1\right)} - u$$

$$(u'f) = \frac{\left(u^{\frac{1}{2}} + u\right)}{\left(u^{-\frac{1}{2}} + 1\right)}$$

$$(f)du = \frac{\left(u^{\frac{1}{2}} + u\right)}{\left(u^{-\frac{1}{2}} + 1\right)} df$$

$$\frac{\left(u^{-\frac{1}{2}} + 1\right)}{\left(u^{\frac{1}{2}} + u\right)} du = \frac{df}{f}$$

$$\int \frac{\left(u^{-\frac{1}{2}}\right)}{\left(u^{\frac{1}{2}} + u\right)} du + \int \frac{(du)}{\left(u^{\frac{1}{2}} + u\right)} = \int \frac{df}{f}$$

$$v = u^{\frac{1}{2}}$$

$$v' = \frac{1}{2v}$$

$$\int \frac{(2)}{(v^2 + v)} du + \int \frac{(du)}{\left(u^{\frac{1}{2}} + u\right)} = \int \frac{df}{f}$$

$$2((\ln \sqrt{u}) - \ln(\sqrt{u} - 1)) + 2\ln(\sqrt{u} - 1) = \ln(f) + \ln C$$

$$2 \ln \sqrt{u} = \ln(f) \ln C$$

$$\frac{u}{f} = C$$

$$\frac{z}{f^2} = C$$

$$3. 4xy^2 dx + (3x^2y - 1)dy = 0$$

Remplazar:

$$y = z^\alpha$$

$$y' = \alpha z^{\alpha-1} z'$$

$$4xz^{2\alpha} + (3x^2z^\alpha - 1)(\alpha z^{\alpha-1} z') = 0$$

$$4xz^{2\alpha} + 3 \propto x^2 z^{2\alpha-1} z' - \alpha z^{\alpha-1} z' = 0$$

Igualar exponentes:

$$1 + 2 \propto = 2 \propto + 1 = \propto - 1$$

$$\propto - 1 = 2 \propto + 1$$

$$\propto = -2$$

$$4xz^{-4} - 6x^2z^{-5}z' - \alpha z^{-3}z' = 0$$

Resolver la ecuación como homogénea:

$$4xz^{-4} - 6x^2z^{-5}z' - \alpha z^{-3}z' = 0$$

$$z = ux$$

$$z' = u'x + u$$

$$4x(ux)^{-4} - 6x^2(ux)^{-5}(u'x + u) + 2(ux)^{-3}(u'x + u) = 0$$

$$4xu^{-4}x^{-4} - 6x^2u^{-5}x^{-5}(u'x + u) + 2u^{-3}x^{-3}(u'x + u) = 0$$

$$4u^{-4}x^{-3} - 6x^{-2}u^{-5}u' - 6x^{-3}u^{-4} + 2u^{-3}x^{-2}u' + 2u^{-2}x^{-3} = 0$$

$$/2u^{-2}x^{-2}$$

$$2u^{-2}x^{-1} - 3u^{-3}u' - 3u^{-2} + u^{-1}u' + x^{-1} = 0$$

$$u'(u^{-1} - 3u^{-3}) = -2x^{-1}(u^{-2} + 0.5)$$

$$u'(u^{-1} - 3u^{-3}) = -2x^{-1}(u^{-2} + 0.5)$$

$$\int \frac{(u^{-1} - 3u^{-3})du}{u^{-2} + \frac{1}{2}} + 2 \int \frac{dx}{x} = C$$

$$\int \frac{\frac{1}{u} - \frac{3}{u^3}}{\frac{1}{u^2} + \frac{1}{2}} du + 2\ln x = C$$

$$\int \frac{\frac{u^2 - 3}{u^3}}{\frac{2 + u^2}{2u^2}} du + 2\ln x = C$$

$$\int \frac{\frac{u^2 - 3}{u^3}}{\frac{2 + u^2}{2u^2}} du + 2\ln x = C$$

$$\int 2 \frac{(u^2 - 3)u^2}{(2 + u^2)u^3} du + 2\ln x = C$$

$$2 \int \frac{(u^2 - 3)}{(2 + u^2)u} du + 2\ln x = C$$

$$2 \int \frac{udu}{(2 + u^2)} - \int \frac{3du}{(2 + u^2)u} + 2\ln x = C$$

$$v = u^2 + 2$$

$$dv = 2udu$$

$$\ln(2 + u^2) - 6 \int \frac{dv}{v(v-2)} + 2\ln x = C$$

$$\ln(2 + u^2) - 6 \int \frac{dv}{v^2 - 2v + 1 - 1} + 2\ln x = C$$

$$\ln(2 + u^2) - 6 \int \frac{dv}{(v-1)^2 - 1} + 2\ln x = C$$

$$\ln(2 + u^2) - 3\ln\left(\frac{v-1+1}{v-1-1}\right) + 2\ln x = C$$

$$\ln(2 + u^2) - 3\ln\left(\frac{u^2 + 2}{u^2}\right) + 2\ln x = \ln C$$

$$\ln\left(2 + \frac{z^2}{x^2}\right) - 3\ln\left(\frac{\frac{z^2}{x^2} + 2}{\frac{z^2}{x^2}}\right) + 2\ln x = \ln C$$

$$\ln\left(2 + \frac{1}{x^2 y}\right) - 3\ln\left(\frac{\frac{1}{x^2 y} + 2}{\frac{1}{x^2 y}}\right) + 2\ln x = \ln C$$

$$\ln\left(2 + \frac{1}{x^2 y}\right) - 3\ln\left(\frac{\frac{1 + 2x^2 y}{x^2 y}}{\frac{1}{x^2 y}}\right) + 2\ln x = \ln C$$

$$\ln\left(2 + \frac{1}{x^2 y}\right) - 3\ln(1 + 2x^2 y) + 2\ln x = \ln C$$

2.2.3. Ejercicios varios

Ejercicio 1

$$(x^2 + y^2)dx + (x^2 - xy)dy = 0$$

Solución:

$$M(x, y) = x^2 + y^2 \quad N(x, y) = x^2 - xy$$

$$y = ux$$

$$dy = udx + xdu$$

$$(x^2 + u^2x^2)dx + (x' - ux^2)[u dx + xdu] = 0$$

$$x^2(1 + u)dx + x^3(1 - u)du = 0$$

$$\frac{1 - u}{1 + u} du + \frac{dx}{x} = 0$$

$$\left[-1 + \frac{2}{1 + u} \right] du + \frac{dx}{x} = 0$$

$$-u + 2\ln|1 + u| + \ln|x| = \ln|c|: \text{pero } u = \frac{y}{x}$$

$$-\frac{y}{x} + 2\ln\left|1 + \frac{y}{x}\right| + \ln|x| = \ln|c|$$

$$\ln\left|\frac{(x + y)^2}{cx}\right| = \frac{y}{x} \quad 0$$

$$(x + y)^2 = cxe^{y/x}$$

Ejercicio 2

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x - y}{x + y}$$

Solución:

$$y = ux \Rightarrow dy = udx + xdu$$

$$dy(x + y) = (x - y)dx \Rightarrow (x + ux)(udx + xdu) = (x - ux)dx$$

$$uxdx + x^2du + u^2xdx + ux^2du = xdx - uxdx$$

$$(ux - u^2x - x + ux)dx = -(x^2 + ux^2)du$$

$$(u^2 + 2u - 1)dx = -x(1 + u)du$$

$$\frac{dx}{x} = -\frac{(1 + u)du}{(u^2 + 2u - 1)}$$

$$\ln x = -\frac{1}{2} \ln(1 - 2u - u^2) + C_1$$

$$\ln[x^2(1 - 2u - u^2)] = C_1$$

$$x^2(1 - 2u - u^2) = c$$

$$x^2 - 2xy - y^2 = c$$

Ejercicio 3

$$(y^2 + yx)dx - x^2dy = 0$$

Solución:

$$y^2 + yx - x^2 \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 + yx}{x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + \frac{y}{x}$$

$$v = \frac{y}{x} \Rightarrow y = vx \Rightarrow dy = xdv + vdx \Rightarrow \frac{dy}{dx} = v + x \frac{dv}{dx}$$

$$v + x \frac{dv}{dx} = v^2 + v$$

$$x \frac{dv}{dx} = v^2 \Leftrightarrow v^{-2} dv = x^{-1} dx$$

$$\int v^{-2} dv = \int x^{-1} dx \Leftrightarrow -v^{-1} = \ln|x| + c$$

$$-\left(\frac{y}{x}\right)^{-1} = \ln|x| + c$$

$$-\frac{x}{y} = \ln|x| + c$$

$$-x = (\ln|x| + c)y$$

$$y = -\frac{x}{\ln|x| + c}$$

Ejercicio 4

$$y \frac{dx}{dy} = x + 4ye^{-\frac{2x}{y}}$$

Solución:

$$ydx = (x + 4ye^{-\frac{2x}{y}})dy$$

$$y(vdy + ydv) = (vy + 4ye^{-2v})dy$$

$$\frac{dv}{e^{-2v}} = \frac{4 dy}{y}$$

$$\frac{1}{2}e^{2v} = 4\ln|y| + c$$

$$\frac{1}{2}e^{\frac{2x}{y}} = 4\ln|y| + c$$

$$e^{\frac{2x}{y}} = 8\ln|y| + c$$

Ejercicios propuestos



$$1) \ y \frac{dx}{dy} = x + 4ye^{-\frac{2x}{y}}$$

$$2) \ \left(y + x \cot \frac{y}{x}\right) dx - x dy = 0$$

$$3) \ 2x^2 \frac{dy}{dx} = 3xy + y^2$$

$$4) \ (x + y)dx + xdy = 0$$

$$5) \ xdx + (y - 2x)dy = 0$$

$$6) \ -ydx + (x + \sqrt{xy})dy = 0$$

$$7) \ (2n - 3m + 4)dn + (3n - 2m + 1)dm = 0$$

2.3. Ecuaciones diferenciales ordinarias lineales

Estas ecuaciones tienen la forma:

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

Donde P y Q son funciones de x.

Las EDO Lineales se clasifican en: Homogéneas y Heterogéneas (No Homogéneas).

2.3.1. Ecuaciones diferenciales ordinarias lineales homogéneas

Las EDO lineales homogéneas son aquellas en las que $Q(x) = 0$, por la tanto la EDO se reduce a:

$$y' + P(x)y = 0$$

Se las resuelve como ecuaciones diferenciales ordinarias variables separables.

Ejercicios

1. $\frac{dy}{dx} + \frac{x^3}{x^4+3}y = 0$

$$\int \frac{dy}{y} + \int \frac{x^3 dx}{x^4 + 3} = 0$$

$$u = x^4 + 3$$

$$du = 4x^3 dx$$

$$\int \frac{dy}{y} + \frac{1}{4} \int \frac{du}{u} = 0$$

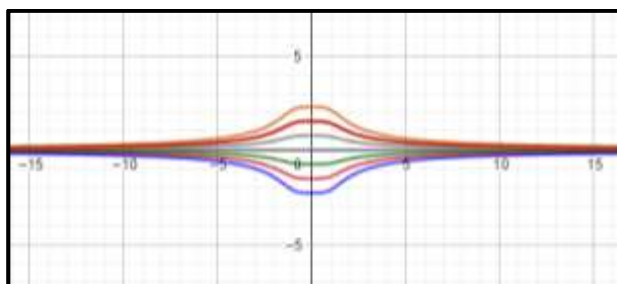
$$\ln y + \frac{1}{4} \ln (x^4 + 3) = \ln C$$

$$y(x^4 + 3)^{1/4} = C$$

$$y = \frac{C}{(x^4 + 3)^{\frac{1}{4}}}$$

Figura 6.

Familia de curvas $y = \frac{C}{(x^4+3)^{\frac{1}{4}}}$



2. $y' \text{sen}(x) - \cos(x) y = 0$

$$\frac{dy}{dx} \text{sen}(x) - \cos(x) y = 0$$

$$\int \frac{dy}{y} - \int \frac{\cos(x) dx}{\text{sen}(x)} = 0$$

$$\int \frac{dy}{y} - \int \text{ctg}(x) dx = 0$$

$$\ln(y) - \ln(\text{sen}(x)) = \ln(C)$$

$$\frac{y}{\sec(x)} = C$$

$$y = \sec(x)C$$

3. $\frac{y^2 \sqrt{x^4+16} dy}{dx} + y = 0$

$$\frac{dy}{y} + \frac{dx}{\sqrt{x^4 + 16}} = 0$$

$$\frac{dy}{y} + \frac{dx}{\sqrt{(x^2)^2 + 4^2}} = 0$$

$$\ln(y) + \ln\left(4 + \sqrt{(x^2)^2 + 4^2}\right) = \ln(C)$$

$$y\left(4 + \sqrt{(x^2)^2 + 4^2}\right) = C$$

$$y = \frac{C}{\left(4 + \sqrt{(x^2)^2 + 4^2}\right)}$$

$$4. \quad \frac{\cos(x)y'}{y} - \text{sen}(x) = 0$$

$$\frac{\cos(x)dy}{ydx} - \text{sen}(x) = 0$$

$$\frac{dy}{y} - \frac{\text{sen}(x)dx}{\cos(x)} = 0$$

$$\int \frac{dy}{y} - \int \text{tg}(x)dx = 0$$

$$\ln(y) - \ln(\sec(x)) = \ln(C)$$

$$\frac{y}{\sec(x)} = C$$

$$y = \sec(x)C$$

2.3.2. Ecuaciones diferenciales ordinarias lineales heterogéneas

Las EDO lineales heterogéneas son aquellas ecuaciones en las que $Q(x) \neq 0$.

Por lo tanto, la forma de la ecuación es:

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

MÉTODOS DE SOLUCIÓN

Los métodos para resolver EDO lineales son:

- Fórmula general.
- Método de Lagrange.
- Método de sustitución.

A. Fórmula general

Este método consiste en reemplazar los componentes de la EDO lineal heterogénea:

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

En la fórmula:

$$y = e^{-\int P(x)dx} \left[\int (Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx}) dx + C \right]$$

Ejemplo

$$x' - \operatorname{tg}(y)x = \frac{\operatorname{tg}(y)}{\cos(y)}$$

$$x = e^{-\int -\operatorname{tg}(y)dy} \left[\int \left(\frac{\operatorname{tg}(y)}{\cos(y)} \cdot e^{\int -\frac{\sin(y)}{\cos(y)}dy} \right) dy + C \right]$$

$$u = \cos(y) \quad du = -\operatorname{sen}(y)dy$$

$$x = e^{\ln(\sec(y))} \left[\int \left(\frac{\operatorname{tg}(y)}{\cos(y)} \cdot e^{\int \frac{du}{u}} \right) dy + C \right]$$

$$x = e^{\ln(\sec(y))} \left[\int \left(\frac{\operatorname{tg}(y)}{\cos(y)} \cdot e^{\ln(\cos(y))} \right) dy + C \right]$$

$$x = \sec(y) \left[\int \left(\frac{\operatorname{tg}(y)}{\cos(y)} \cdot \cos(y) \right) dy + C \right]$$

$$x = \sec(y) \left[\int (\operatorname{tg}(y)) dy + C \right]$$

$$x = \sec(y) [\ln(\sec(y)) + C]$$

B. Método de Lagrange

Dada la EDO lineal heterogénea:

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

Para aplicar el Método de Lagrange se debe:

1. Resolver como EDO. Homogénea

$$y' + P(x)y = 0$$

$$a) y = f(x)$$

2. Derivar la solución anterior a), con lo cual se obtiene:

$$b) y' = [f(x)]'$$

3. Reemplazar a) y b) en la EDO original.

$$[f(x)]' + P(x)f(x) = Q(x) \quad c) y = f(x) \pm C$$

4. Integrar la solución anterior.

5. Y finalmente reemplazar ese resultado en a).

Ejemplo

$$x' - \operatorname{tg}(y)x = \frac{\operatorname{tg}(y)}{\cos(y)}$$

$$x' - \operatorname{tg}(y)x = 0$$

$$\int \frac{dx}{x} - \int \operatorname{tg}(y) dy = \int 0$$

$$\ln(x) - \ln(\sec(y)) = \ln C$$

$$x = \sec(y)C(y)$$

$$x' = C'(y)\sec(y) + \sec(y)\operatorname{tg}(y)C(y)$$

$$C'(y)\sec(y) + \sec(y)\operatorname{tg}(y)C(y) - \sec(y)\operatorname{tg}(y)C(y) = \frac{\operatorname{tg}(y)}{\cos(y)}$$

$$C'(y)\sec(y) = \frac{\operatorname{tg}(y)}{\cos(y)}$$

$$\frac{dC(y)}{dy} \sec(y) = \frac{\operatorname{tg}(y)}{\cos(y)}$$

$$dC(y) = \frac{\operatorname{tg}(y)}{\cos(y) \frac{1}{\cos(y)}} dy$$

$$\int dC(y) = \int \operatorname{tg}(y) dy + C1$$

$$C(y) = \ln(\sec(y)) + C1$$

$$x = \sec(y)[\ln(\sec(y)) + C]$$

C. Método de sustitución

Al aplicar este método, el procedimiento a seguir es:

1. Ubicar la E.D.O en la forma:

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

$$y = uv$$

$$y' = u'v + uv'$$

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

$$u'v + uv' + P(x)uv = Q(x)$$

$$u'v + u(v' + P(x)v) = Q(x)$$

2. Dividir en dos partes a) y b)

$$a) v' + P(x)v = 0$$

$$b) u'v = Q(x)$$

3. Resolver la ecuación a)

$$v' + P(x)v = 0$$

$$\frac{dv}{dx} + v' + P(x)v = 0$$

$$\int \frac{dv}{v} + \int P(x)dx = 0$$

$$\ln v = -\int P(x)dx$$

$$v = e^{-\int P(x)dx}$$

4. Resolver la ecuación b)

$$u'v = Q(x)$$

5. Reemplazar el v obtenido anteriormente

$$u'e^{-\int P(x)dx} = Q(x)$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{Q(x)}{e^{-\int P(x)dx}}$$

$$\int du = \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C$$

$$u = \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C$$

6. Finalmente reemplazar lo obtenido.

$$y = uv$$

$$y = e^{-\int P(x)dx} [\int Q(x)e^{\int P(x)dx} x + C]$$

Ejemplo

$$x' - \operatorname{tg}(y)x = \frac{\operatorname{tg}(y)}{\cos(y)}$$

$$y = uv$$

$$y' = u'v + uv'$$

$$x' - \operatorname{tg}(y)x = \frac{\operatorname{tg}(y)}{\cos(y)}$$

$$u'v + uv' - uvtg(y) = \frac{tg(y)}{\cos(y)}$$

$$u'v + u(v' - vtg(y)) = \frac{tg(y)}{\cos(y)}$$

$$v' - vtg(y) = 0$$

$$u'v = \frac{tg(y)}{\cos(y)}$$

$$\frac{dv}{dy} - vtg(y) = 0$$

$$\int \frac{dv}{v} - \int tg(y)dy = 0$$

$$\ln v - \ln(\sec(y)) = 0$$

$$v = \sec(y)$$

$$u'v = \frac{tg(y)}{\cos(y)}$$

$$\int du = \int \frac{tg(y)}{\cos(y)} dy$$

$$u = \int tg(y)dy$$

$$u = \ln(\sec(y)) + C$$

$$y = uv$$

$$y = \sec(y)(\ln(\sec(y)) + C)$$

Ejercicios

1. $\cos y \, dx = (x \operatorname{sen} y + \operatorname{tg} y) dy$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x \operatorname{sen}(y)}{\cos(y)} + \frac{\operatorname{tg}(y)}{\cos(y)}$$

$$x' = \frac{\operatorname{sen}(y)}{\cos(y)} x + \frac{\operatorname{tg}(y)}{\cos(y)}$$

$$\frac{\operatorname{sen}(y)}{\cos(y)} = \operatorname{tg}(y)$$

$$x' - \operatorname{tg}(y)x = \frac{\operatorname{tg}(y)}{\cos(y)}$$

Fórmula General

$$y = e^{-\int P(y) dy} \left[\int Q(y) e^{\int P(y) dy} dy + C \right]$$

$$y = e^{-\int -\operatorname{tg}(y) dy} \left[\int \frac{\operatorname{tg}(y)}{\cos(y)} e^{\int -\frac{\operatorname{sen}(y)}{\cos(y)} dy} dy + C \right]$$

$$u = \cos(y) \Rightarrow du = -\operatorname{sen}(y) dy$$

$$y = e^{\ln(\sec(y))} \left[\int \frac{\operatorname{tg}(y)}{\cos(y)} e^{\int \frac{du}{u}} dy + C \right]$$

$$y = e^{\ln(\sec(y))} \left[\int \frac{\operatorname{tg}(y)}{\cos(y)} e^{\ln(\cos(y))} dy + C \right]$$

$$y = \sec(y) \left[\int \frac{\operatorname{tg}(y)}{\cos(y)} \cos(y) dy + C \right]$$

$$y = \sec(y) \left[\int \operatorname{tg}(y) dy + C \right]$$

$$y = \sec(y) [\ln(\sec(y)) + C]$$

Lagrange

$$x' - \operatorname{tg}(y)x = \frac{\operatorname{tg}(y)}{\cos(y)}$$

$$x' - \operatorname{tg}(y)x = 0$$

$$\int \frac{dx}{x} - \int \operatorname{tg}(y) dy = \int 0$$

$$\ln(x) - \ln(\sec(y)) = \ln C$$

$$x = \sec(y) C(y)$$

$$x' = C'(y) \sec(y) + \sec(y) \operatorname{tg}(y) C(y)$$

$$C'(y) \sec(y) + \sec(y) \operatorname{tg}(y) C(y) - \sec(y) \operatorname{tg}(y) C(y) = \frac{\operatorname{tg}(y)}{\cos(y)}$$

$$C'(y) \sec(y) = \frac{\operatorname{tg}(y)}{\cos(y)}$$

$$\frac{dC(y)}{dy} \sec(y) = \frac{\operatorname{tg}(y)}{\cos(y)}$$

$$dC(y) = \frac{\operatorname{tg}(y)}{\cos(y) \frac{1}{\cos(y)}} dy$$

$$\int dC(y) = \int \operatorname{tg}(y) dy + C_1$$

$$C(y) = \ln(\sec(y)) + C_1$$

$$y = \sec(y) [\ln(\sec(y)) + C]$$

Sustitución

$$\begin{cases} x = uv \\ x' = u'v + uv' \end{cases}$$

$$x' - tg(y)x = \frac{tg(y)}{\cos(y)}$$

$$u'v + uv' - uvtg(y) = \frac{tg(y)}{\cos(y)}$$

$$u'v + u(v' - vtg(y)) = \frac{tg(y)}{\cos(y)}$$

$$\begin{cases} v' - vtg(y) = 0 \\ u'v = \frac{tg(y)}{\cos(y)} \end{cases}$$

$$\frac{dv}{dy} - vtg(y) = 0$$

$$\int \frac{dv}{v} - \int tg(y)dy = 0$$

$$\ln v - \ln(\sec(y)) = 0$$

$$v = \sec(y)$$

$$u'v = \frac{tg(y)}{\cos(y)}$$

$$\int vdu = \int \frac{tg(y) dy}{\cos(y)}$$

$$\int du = \int \frac{tg(y) dy}{\cos(y)\sec(y)}$$

$$\int du = \int \frac{tg(y) dy}{\cos(y) \frac{1}{\cos(y)}}$$

$$u = \int tg(y) dy$$

$$u = \ln(\sec(y)) + C$$

$$y = uv$$

$$y = \sec(y) (\ln(\sec(y)) + C)$$

2. $y' \cos(y) + \text{sen}(y) = x + 1$

$$y' \cos(y) + \text{sen}(y) = x + 1$$

$$z = \text{sen}(y) \quad z' = y' \cos(y)$$

$$z' + z = x + 1$$

Fórmula General

$$z = e^{-\int P(x) dx} \left[\int Q(x) e^{\int P(x) dx} dx + C \right]$$

$$z = e^{-\int dx} \left[\int (x + 1) e^{\int dx} dx + C \right]$$

$$z = e^{-x} \left[\int (x + 1) e^x dx + C \right]$$

$$z = e^{-x} \left[\int x e^x dx + \int e^x dx + C \right]$$

$$u = x \quad v = e^x$$

$$du = dx \quad dv = e^x dx$$

$$x e^x - \int e^x dx$$

$$x e^x - e^x$$

$$z = e^{-x}[xe^x - e^x + e^x + C]$$

$$z = e^{-x}[xe^x + C]$$

$$\text{sen}(y) = e^{-x}[xe^x + C]$$

Lagrange

$$y' \cos(y) + \text{sen}(y) = x + 1$$

$$z = \text{sen}(y) \quad z' = y' \cos(y)$$

$$z' + z = x + 1$$

$$z' + z = 0$$

$$\int \frac{dz}{z} + \int dx = 0$$

$$\ln z + x = \ln C$$

$$z = e^{-x}C(x)$$

$$z' = C'(x)e^{-x} - e^{-x}C(x)$$

$$C'(x)e^{-x} - e^{-x}C(x) + e^{-x}C(x) = x + 1$$

$$C'(x)e^{-x} = x + 1$$

$$C'(x) = \frac{x + 1}{e^{-x}}$$

$$\int dC(x) = \int e^x(x + 1) dx$$

$$\int dC(x) = \int xe^x dx + \int e^x dx$$

$$u = x \quad v = e^x$$

$$du = dx \quad dv = e^x dx$$

$$xe^x - \int e^x dx$$

$$xe^x - e^x$$

$$C(x) = [xe^x - e^x + e^x + C]$$

$$C(x) = [xe^x + C]$$

$$z = e^{-x}C(x)$$

$$z = e^{-x}[xe^x + C]$$

$$\text{sen}(y) = e^{-x}[xe^x + C]$$

Sustitución

$$\begin{cases} z = uv \\ z' = u'v + uv' \end{cases}$$

$$y' \cos(y) + \text{sen}(y) = x + 1$$

$$z = \text{sen}(y) \quad z' = y' \cos(y)$$

$$z' + z = x + 1$$

$$u'v + uv' + uv = x + 1$$

$$u'v + u(v' + v) = x + 1$$

$$\begin{cases} v' + v = 0 \\ u'v = x + 1 \end{cases}$$

$$\frac{dv}{dx} + v = 0$$

$$\int \frac{dv}{v} + \int dx = 0$$

$$\ln v = -x$$

$$v = e^{-x}$$

$$u'v = x + 1$$

$$u'e^{-x} = x + 1$$

$$u' = \frac{x + 1}{e^{-x}}$$

$$\begin{aligned}\frac{du}{dx} &= e^x(x+1) \\ \int du &= \int xe^x dx + \int e^x dx \\ u = x \quad v &= e^x \\ du = dx \quad dv &= e^x dx \\ xe^x - \int e^x dx \\ xe^x - e^x \\ u &= [xe^x - e^x + e^x + C] \\ u &= [xe^x + C] \\ z &= uv \\ z &= e^{-x}[xe^x + C] \\ \text{sen}(y) &= e^{-x}[xe^x + C]\end{aligned}$$

$$3. \quad [x + \text{sen}(y) - 1]dy + \cos(y) dx = 0$$

$$\begin{aligned}\frac{x + \text{sen}(y) - 1}{\cos(y)} + \frac{dx}{dy} &= 0 \\ \frac{x}{\cos(y)} + \frac{\text{sen}(y) - 1}{\cos(y)} + \frac{dx}{dy} &= 0 \\ \frac{x}{\cos(y)} + \frac{dx}{dy} &= -\frac{\text{sen}(y) - 1}{\cos(y)} \\ x' + \frac{x}{\cos(y)} &= \frac{1 - \text{sen}(y)}{\cos(y)}\end{aligned}$$

Fórmula General

$$x = e^{-\int P(y)dy} \left[\int Q(x)e^{\int P(y)dy} dy + C \right]$$

$$x = e^{-\int \frac{1}{\cos(y)} dy} \left[\int \left(\frac{1 - \operatorname{sen}(y)}{\cos(y)} \right) e^{\int \frac{1}{\cos(y)} dy} dy + C \right]$$

$$x = e^{-\int \sec(y) dy} \left[\int \left(\frac{1}{\cos(y)} - \frac{\operatorname{sen}(y)}{\cos(y)} \right) e^{\int \sec(y) dy} dy + C \right]$$

$$x = e^{-\ln(\sec(y) + tg(y))} \left[\int (\sec(y) - tg(y)) e^{\ln(\sec(y) + tg(y))} dy + C \right]$$

$$x = (\sec(y) + tg(y))^{-1} \left[\int (\sec(y) - tg(y)) (\sec(y) + tg(y)) dy + C \right]$$

$$x = \frac{1}{\sec(y) + tg(y)} \left[\int (\sec^2(y) - tg^2(y)) dy + C \right]$$

$$x = \frac{1}{\sec(y) + tg(y)} \left[\int (\sec^2(y) - tg^2(y)) dy + C \right]$$

$$x = \frac{1}{\sec(y) + tg(y)} \left[\int \sec^2(y) dy - \int tg^2(y) dy + C \right]$$

$$x = \frac{1}{\sec(y) + tg(y)} [tg(y) - tg(y) + y + C]$$

$$x = \frac{1}{\sec(y) + tg(y)} [y + C]$$

Lagrange

$$x' + \frac{x}{\cos(y)} = \frac{1 - \operatorname{sen}(y)}{\cos(y)}$$

$$\frac{dx}{dy} + \frac{x}{\cos(y)} = 0$$

$$\int \frac{dx}{x} + \int \frac{dy}{\cos(y)} = 0$$

$$\int \frac{dx}{x} + \int \sec(y) dy = 0$$

$$\ln x + \ln(\sec(y) + \operatorname{tg}(y)) = \ln C$$

$$x = \frac{C(x)}{\sec(y) + \operatorname{tg}(y)}$$

$$x' = \frac{C'(x)(\sec(y) + \operatorname{tg}(y)) - [\sec(y)\tan(y) + \sec^2(y)]C(x)}{[\sec(y) + \operatorname{tg}(y)]^2}$$

$$x' = \frac{C'(x)(\sec(y) + \operatorname{tg}(y))}{[\sec(y) + \operatorname{tg}(y)]^2} - \frac{[\sec(y)\tan(y) + \sec^2(y)]C(x)}{[\sec(y) + \operatorname{tg}(y)]^2}$$

$$x' = \frac{C'(x)(\sec(y) + \operatorname{tg}(y))}{[\sec(y) + \operatorname{tg}(y)]^2} - \frac{\sec(y)[\tan(y) + \sec(y)]C(x)}{[\sec(y) + \operatorname{tg}(y)]^2}$$

$$x' = \frac{C'(x)}{\sec(y) + \operatorname{tg}(y)} - \frac{\sec(y)C(x)}{\sec(y) + \operatorname{tg}(y)}$$

$$\frac{C'(x)}{\sec(y) + \operatorname{tg}(y)} - \frac{\sec(y)}{\sec(y) + \operatorname{tg}(y)} + \frac{\frac{C(x)}{\sec(y) + \operatorname{tg}(y)}}{\cos(y)} = \frac{1 - \operatorname{sen}(y)}{\cos(y)}$$

$$\frac{C'(x)}{\sec(y) + \operatorname{tg}(y)} = \sec(y) - \operatorname{tg}(y)$$

$$\int dC(x) = \int [\sec(y) - \operatorname{tg}(y)] [\sec(y) + \operatorname{tg}(y)] dy$$

$$\int dC(x) = \int [\sec^2(y) - \operatorname{tg}^2(y)] dy$$

$$\int dC(x) = \int \sec^2(y) dy - \int \operatorname{tg}^2(y) dy + C$$

$$C(x) = [\operatorname{tg}(y) - \operatorname{tg}(y) + y + C]$$

$$x = \frac{1}{\sec(y) + \operatorname{tg}(y)} [y + C]$$

Sustitución

$$\begin{cases} x = uv \\ x' = u'v + uv' \end{cases}$$

$$x' + \frac{x}{\cos(y)} = \frac{1 - \operatorname{sen}(y)}{\cos(y)}$$

$$u'v + uv' + \frac{uv}{\cos(y)} = \frac{1 - \operatorname{sen}(y)}{\cos(y)}$$

$$u'v + u(v' + \sec(y)v) = x + 1$$

$$\begin{cases} v' + \sec(y)v = 0 \\ u'v = \frac{1 - \operatorname{sen}(y)}{\cos(y)} \end{cases}$$

$$\frac{dv}{dy} + \sec(y)v = 0$$

$$\int \frac{dv}{v} + \int \sec(y)dy = 0$$

$$\ln v = -\ln(\sec(y) + \operatorname{tg}(y))$$

$$v = \frac{1}{\sec(y) + \operatorname{tg}(y)}$$

$$u'v = \frac{1 - \operatorname{sen}(y)}{\cos(y)}$$

$$u' \frac{1}{\sec(y) + \operatorname{tg}(y)} = \frac{1 - \operatorname{sen}(y)}{\cos(y)}$$

$$u' \frac{1}{\sec(y) + \operatorname{tg}(y)} = [\sec(y) - \operatorname{tg}(y)]$$

$$u' = [\sec(y) - \operatorname{tg}(y)][\sec(y) + \operatorname{tg}(y)]$$

$$\frac{du}{dy} = [\sec^2(y) - \operatorname{tg}^2(y)]$$

$$\int du = \int \sec^2(y) dy - \int tg^2(y) dy + C$$

$$u = [tg(y) - tg(y) + y + C]$$

$$u = [y + C]$$

$$x = uv$$

$$x = \frac{1}{\sec(y) + tg(y)} [y + C]$$

4. $x \text{sen}(x) \frac{dy}{dx} + [\text{sen}(x) + x \cos(x)]y = xe^x$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{\text{sen}(x)}{x \text{sen}(x)} + \frac{x \cos(x)}{x \text{sen}(x)} = \frac{xe^x}{x \text{sen}(x)}$$

$$\frac{dy}{dx} + \left(\frac{1}{x} + ctg(x) \right) y = \frac{e^x}{\text{sen}(x)}$$

Fórmula General

$$y = e^{-\int P(x) dx} \left[\int Q(x) e^{\int P(x) dx} dx + C \right]$$

$$y = e^{-\int \left[\frac{1}{x} + ctg(x) \right] dx} \left[\int \frac{e^x}{\text{sen}(x)} e^{\int \left[\frac{1}{x} + ctg(x) \right] dx} dx + C \right]$$

$$y = e^{-\int \frac{1}{x} dx - \int ctg(x) dx} \left[\int \frac{e^x}{\text{sen}(x)} e^{\int \frac{1}{x} dx + \int ctg(x) dx} dx + C \right]$$

$$y = e^{-\ln x - \ln(\text{sen} x)} \left[\int \frac{e^x}{\text{sen}(x)} e^{\ln x + \ln(\text{sen} x)} dx + C \right]$$

$$y = (x \text{sen} x)^{-1} \left[\int \frac{e^x}{\text{sen}(x)} (x \text{sen} x) dx + C \right]$$

$$y = \frac{1}{x \text{sen} x} \left[\int x e^x dx + C \right]$$

$$u = x \quad du = dx$$

$$v = e^x \quad dv = e^x dx$$

$$xe^x - \int e^x dx$$

$$xe^x - e^x$$

$$y = \frac{1}{x \operatorname{sen} x} [xe^x - e^x + C]$$

Lagrange

$$y' + \left(\frac{1}{x} + \operatorname{ctg}(x)\right)y = \frac{e^x}{\operatorname{sen}(x)}$$

$$\frac{dy}{dx} + \left(\frac{1}{x} + \operatorname{ctg}(x)\right)y = 0$$

$$\int \frac{dy}{y} + \int \frac{1}{x} dx + \int \operatorname{ctg}(x) dx = 0$$

$$u = 1 + x^2 \quad du = 2x dx$$

$$\ln y + \ln(x) + \ln(\operatorname{sen}(x)) = \ln C$$

$$y = \frac{C(x)}{x \operatorname{sen}(x)}$$

$$y' = \frac{C'(x)x \operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}(x)C(x) - \cos(x)C(x)}{(x \operatorname{sen}(x))^2}$$

$$y' = \frac{C'(x)x \operatorname{sen}(x)}{(x \operatorname{sen}(x))^2} - \frac{\operatorname{sen}(x)C(x)}{x^2 \operatorname{sen}^2(x)} - \frac{x \cos(x)C(x)}{x^2 \operatorname{sen}^2(x)}$$

$$y' = \frac{C'(x)}{x \operatorname{sen}(x)} - \frac{C(x)}{x^2 \operatorname{sen}(x)} - \frac{\cos(x)C(x)}{x \operatorname{sen}^2(x)}$$

$$\begin{aligned} & \frac{C'(x)}{x \operatorname{sen}(x)} - \frac{C(x)}{x^2 \operatorname{sen}(x)} - \frac{\cos(x)C(x)}{x \operatorname{sen}^2(x)} + \left(\frac{1}{x} + \operatorname{ctg}(x)\right) \frac{C(x)}{x \operatorname{sen}(x)} \\ &= \frac{e^x}{\operatorname{sen}(x)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{C'(x)}{x\operatorname{sen}(x)} - \frac{C(x)}{x^2\operatorname{sen}(x)} - \frac{\cos(x)C(x)}{x\operatorname{sen}^2(x)} + \frac{C(x)}{x^2\operatorname{sen}(x)} + \frac{\cos(x)C(x)}{x\operatorname{sen}^2(x)} \\ = \frac{e^x}{\operatorname{sen}(x)} \end{aligned}$$

$$\frac{C'(x)}{x\operatorname{sen}(x)} = \frac{e^x}{\operatorname{sen}(x)}$$

$$C'(x) = \frac{e^x x \operatorname{sen}(x)}{\operatorname{sen}(x)}$$

$$C'(x) = e^x x$$

$$\int dC(x) = \int e^x x dx$$

$$u = x \quad du = dx$$

$$v = e^x \quad dv = e^x dx$$

$$xe^x - \int e^x dx$$

$$xe^x - e^x$$

$$C(x) = [xe^x - e^x + C]$$

$$y = \frac{1}{x\operatorname{sen}x} [xe^x - e^x + C]$$

Sustitución

$$\begin{cases} y = uv \\ y' = u'v + uv' \end{cases}$$

$$y' + \left(\frac{1}{x} + \operatorname{ctg}(x)\right)y = \frac{e^x}{\operatorname{sen}(x)}$$

$$u'v + uv' + \left(\frac{1}{x} + \operatorname{ctg}(x)\right)uv = \frac{e^x}{\operatorname{sen}(x)}$$

$$\begin{cases} v' + \left(\frac{1}{x} + \operatorname{ctg}(x)\right)v = 0 \\ u'v = \frac{e^x}{\operatorname{sen}(x)} \end{cases}$$

$$\frac{dv}{dx} + \left(\frac{1}{x} + \operatorname{ctg}(x)\right)v = 0$$

$$\int \frac{dv}{v} + \int \frac{1}{x} dx + \int \operatorname{ctg}(x) dx = 0$$

$$\ln v = -\ln(x) - \ln(\operatorname{sen} x)$$

$$v = \frac{1}{x \operatorname{sen}(x)}$$

$$v = (x \operatorname{sen}(x))^{-1}$$

$$u'v = \frac{e^x}{\operatorname{sen}(x)}$$

$$u' \frac{1}{x \operatorname{sen}(x)} = \frac{e^x}{\operatorname{sen}(x)}$$

$$u' = \frac{e^x x \operatorname{sen}(x)}{\operatorname{sen}(x)}$$

$$\frac{du}{dx} = e^x x$$

$$\int du = \int e^x x dx$$

$$u = x \quad du = dx$$

$$v = e^x \quad dv = e^x dx$$

$$xe^x - \int e^x dx$$

$$xe^x - e^x$$

$$u = [xe^x - e^x + C]$$

$$y = uv$$

$$y = \frac{1}{x \operatorname{sen} x} [x e^x - e^x + C]$$

2.3.3. Ecuaciones diferenciales convertibles en lineales (Ecuación de Bernoulli)

Las ecuaciones diferenciales de Bernoulli son aquellas que tienen la forma:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n, n \in \mathbb{R}$$

$$n \neq 0, 1$$

Procedimiento

1. Dividir la ecuación lineal para y^n .

$$\frac{y'}{y^n} + \frac{P(x)y}{y^n} = \frac{Q(x)y^n}{y^n}$$

$$y'y^{-n} + P(x)y^{-n} = Q(x)$$

2. Realizar un cambio de variable donde:

$$z = y^{-n}$$

$$z' = (1 - n)y^{-n} * y'$$

3. Sustituir en la ecuación diferencial.

$$\frac{(1 - n)^{-1}z'}{(1 - n)^{-1}} + \frac{P(x)z}{(1 - n)^{-1}} = \frac{Q(x)}{(1 - n)^{-1}}$$

4. Obtener una ecuación diferencial lineal.

$$z' + (1 - n)^{-1}P(x)z = (1 - n)^{-1}Q(x)$$

$$(1 - n)^{-1} = C$$

5. Se resuelve como ecuación diferencial lineal.

Ejemplo:

$$x^2y' + 2xy = 5y^3$$

1. Convertir la ecuación a la forma: $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n$

$$(x^2y' + 2xy = 5y^3)/x^2$$

$$y' + \frac{2y}{x} = \frac{5y^3}{x^2}$$

2. Reconocer y^n , y dividirlo o multiplicarlo para toda la ecuación.

$$y^n = y^3$$

$$(y' + 2yx^{-1} = 5y^3x^{-2})/y^3$$

$$y'y^{-3} + 2y^{-2}x^{-1} = 5x^{-2}$$

3. Realizar un cambio de variable.

$$z = y^{-2}$$

$$z' = -2y^{-3}y'$$

$$y' = -\frac{z'}{2y^{-3}}$$

4. Remplazar en la ecuación.

$$-\frac{z'y^{-3}}{2y^{-3}} + \frac{2z}{x} = \frac{5}{x^2}$$

$$\left(-\frac{z'}{2} + \frac{2z}{x} = \frac{5}{x^2}\right)(*-2)$$

$$z' - \frac{4z}{x} = -\frac{10}{x^2}$$

5. Resolver como EDO lineal.

Fórmula: $y = e^{-\int P(x)dx} [\int (Q(x) e^{\int P(x)dx}) dx + C]$

$$z = e^{-\int -\frac{4dx}{x}} [\int (-\frac{10}{x^2} * e^{\int -\frac{4dx}{x}}) dx + C]$$

$$z = e^{4\ln x} [\int (-\frac{10}{x^2} * e^{-4\ln x}) dx + C]$$

$$z = x^4 [\int (-\frac{10}{x^2} * x^{-4} dx + C]$$

$$z = x^4 [\int -\frac{10}{x^6} dx + C]$$

$$z = x^4 [\int -10x^{-6} dx + C]$$

$$z = x^4 [\frac{2}{x^5} + C]$$

$$z = x^4 C + \frac{2}{x}$$

$$z = \frac{x^5 C + 2}{x}$$

$$z = y^{-2}$$

$$\frac{1}{y^2} = x^4 C + \frac{1}{x}$$

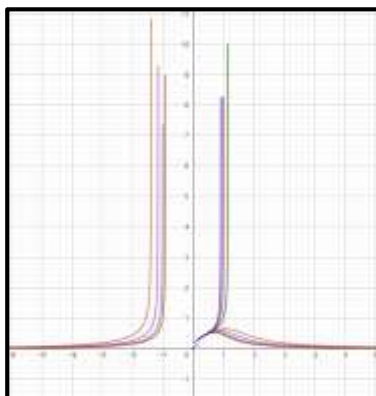
$$y^2 = \frac{1}{\frac{x^5 C + 2}{x}}$$

$$y^2 = \frac{x}{x^5 C + 2}$$

$$y = \sqrt{\frac{x}{x^5 C + 2}}$$

Figura 7.

Familia de curvas $y^2 = \frac{x}{x^5C+2}$



Ejercicios

1. $y' - 4y = 2e^x y^{\frac{1}{2}}, \quad y(0) = 2$

$$y^n = y^{\frac{1}{2}}$$

$$(y' - 4y = 2e^x y^{\frac{1}{2}}) \left(\frac{1}{y^{\frac{1}{2}}} \right)$$

$$y' y^{-\frac{1}{2}} - 4y^{\frac{1}{2}} = 2e^x$$

$$z = y^{\frac{1}{2}}$$

$$z' = \frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}} y'$$

$$y' = \frac{2z'}{y^{-\frac{1}{2}}}$$

$$\left(\frac{2z'}{y^{-\frac{1}{2}}} - 4z = 2e^x\right)\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$z' - 2z = e^x$$

Fórmula: $y = e^{-\int P(x)dx} [\int (Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx}) dx + C]$

$$z = e^{-\int -2dx} \left[\int (e^x \cdot e^{\int -2dx}) dx + C \right]$$

$$z = e^{2x} \left[\int \left(\frac{e^x}{e^{-2x}} \right) dx + C \right]$$

$$z = e^{2x} \left[\int (e^{-x}) dx + C \right]$$

$$z = e^{2x} [-e^{-x} + C]$$

$$z = y^{\frac{1}{2}}$$

$$y^{\frac{1}{2}} = [-e^x + C e^{2x}]$$

$$y(0) = 2$$

$$(2)^{\frac{1}{2}} = [-e^0 + C e^{2(0)}]$$

$$\sqrt{2} = -1 + C$$

$$\sqrt{2} + 1 = C$$

$$y^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} e^{2x} + e^{2x} - e^x$$

$$y = (\sqrt{2} e^{2x} + e^{2x} - e^x)^2$$

2. $(12e^{2x}y^2 - y)dx = dy, y(0) = 1$

$$(12e^{2x}y^2 - y)dx = dy$$

$$y' = (12e^{2x}y^2 - y)$$

$$y' + y = 12e^{2x}y^2$$

$$y^n = y^2$$

$$(y' + y = 12e^{2x}y^2)\left(\frac{1}{y^2}\right)$$

$$y'y^{-2} + y^{-1} = 12e^{2x}$$

$$z = y^{-1}$$

$$z' = -y^{-2}y'$$

$$y' = -\frac{z'}{y^{-2}}$$

$$\left(-\frac{z'}{y^{-2}} \cdot y^{-2} + z = 12e^{2x}\right)(* -1)$$

$$z' - z = -12e^{2x}$$

Fórmula: $y = e^{-\int P(x)dx} \left[\int (Q(x) e^{\int P(x)dx}) dx + C \right]$

$$z = e^{-\int -dx} \left[\int (-12e^{2x} \cdot e^{\int -dx}) dx + C \right]$$

$$z = e^x \left[\int (-12e^{2x} \cdot e^{-x}) dx + C \right]$$

$$z = e^x \left[\int (-12e^x) dx + C \right]$$

$$z = e^x [-12 \int e^x dx + C]$$

$$z = e^x [C - 12e^x]$$

$$z = y^{-1}$$

$$y^{-1} = e^x [C - 12e^x]$$

$$x = 0, y = 1$$

$$C = 13$$

$$y^{-1} = e^x [13 - 12e^x]$$

$$y^{-1}e^{-x} = 13 - 12e^x$$

$$3. \quad (x+1)dy = y[y(x+1)\ln(x+1) - 1]dx, \quad y = \frac{1}{e}; x = \frac{1}{e}$$

$$((x+1)dy = y[y(x+1)\ln(x+1) - 1]dx) \left(\frac{1}{(x+1)dx} \right)$$

$$y' = \frac{y^2(x+1)\ln(x+1) - y}{x+1}$$

$$y' + \frac{y}{x+1} = y^2 \ln(x+1)$$

$$y^n = y^2$$

$$(y' + \frac{1}{x+1} = y^2 \ln(x+1)) \left(\frac{1}{y^2} \right)$$

$$y'y^{-2} + \frac{y^{-1}}{x+1} = \ln(x+1)$$

$$z = y^{-1}$$

$$z' = -y^{-2}y'$$

$$y' = -\frac{z'}{y^{-2}}$$

$$\left(-\frac{z'}{y^{-2}}y^{-2} + \frac{z}{x+1} = \ln(x+1) \right) (*-1)$$

$$z' - \frac{z}{x+1} = -\ln(x+1)$$

$$\textbf{Fórmula: } y = e^{-\int P(x)dx} [\int (Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx}) dx + C]$$

$$z = e^{-\int \frac{dx}{x+1}} \left[\int (\ln(x+1) \cdot e^{\int \frac{dx}{x+1}}) dx + C \right]$$

$$z = e^{-\int \frac{dx}{x+1}} \left[\int (\ln(x+1) \cdot e^{\int \frac{dx}{x+1}}) dx + C \right]$$

$$z = e^{\ln(x+1)} \left[\int (\ln(x+1) \cdot e^{-\ln(x+1)}) dx + C \right]$$

$$z = (x+1) \left[\int (\ln(x+1) \cdot \frac{1}{x+1}) dx + C \right]$$

$$z = (x+1) \left[\int \left(\frac{\ln(x+1)}{x+1} \right) dx + C \right]$$

$$\int \left(\frac{\ln(x+1)}{x+1} \right) dx$$

$$u = x+1 \quad du = dx$$

$$\int \frac{\ln(u)}{u} du$$

$$v = \ln(u) \quad dv = \frac{du}{u}$$

$$\int v dv = \frac{v^2}{2} = \frac{1}{2} \ln^2(u) = \frac{1}{2} \ln^2(x+1)$$

$$z = (x+1) \left[\frac{1}{2} \ln^2(x+1) + C \right]$$

$$z = y^{-1}$$

$$\frac{1}{y} = (x+1) \left[\frac{1}{2} \ln^2(x+1) + C \right]$$

$$y = \frac{1}{e}; x = \frac{1}{e}$$

$$\frac{1}{\frac{1}{e}} = \left(\frac{1}{e} + 1 \right) \left[\frac{1}{2} \ln^2 \left(\frac{1}{e} + 1 \right) + C \right]$$

$$e = \left(\frac{1+e}{e} \right) \left[\frac{1}{2} \ln^2 \left(\frac{1+e}{e} \right) + C \right]$$

$$\frac{e^2}{1+e} = \frac{1}{2} \ln^2 \left(\frac{1+e}{e} \right) + C$$

$$C = -3$$

$$2y^{-1}(x+1)^{-1} = \ln^2(x+1) - 3$$

Ejercicios Propuestos



1. $v' + p(w)v = q(w)$
2. $w^3 \frac{dv}{dw} + 3w^2v = w$
3. $\frac{dv}{dw} + 2v = w$
4. $w \frac{dv}{dw} + 3w^2 + 4v = 0$
5. $w \frac{dv}{dw} + 1 = w + v$
6. $3y' + \frac{x^2+a^2}{x(x^2-a^2)}y = \frac{x(3x^2-a^2)}{x^2-a^2} \cdot \frac{1}{y^2}$
7. $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 \sin(x) - y \cos^2(x)}{\sin(x) \cdot \cos(x)}$

2.4. Ecuaciones diferenciales ordinarias exactas

Sea F una función de dos variables reales que posee derivadas parciales primeras continuas en un dominio D . La diferencial total dF de la función F viene definida por la fórmula:

$$dF(x, y) = \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} dy$$

Para todo $(x, y) \in D$ [21].

La forma general de las EDO exactas es:

$$M dx + N dy = 0$$

Donde:

$$M = f(x) \text{ y } N = g(y)$$

Además, se debe derivar las funciones M y N con sus diferenciales respectivos y comprobar que se cumpla la siguiente igualdad:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

En caso de cumplirse la igualdad, entonces la ecuación diferencial es exacta, y se procede a resolverla por cualquiera de sus 3 métodos.

2.4.1. Métodos de solución

Para resolver ecuaciones diferenciales exactas existen los siguientes métodos.

1. Método de integración

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

$$\begin{aligned}
 z &= \int M(x, y) \partial x + \varphi(y) \\
 z' &= (\int M(x, y) \partial x) + \varphi'(y) \\
 z' &= \frac{\partial z}{\partial y} \\
 \frac{\partial z}{\partial y} &= N(x, y) \\
 \varphi'(y) &= f(x) \\
 \int \varphi'(y) &= \int f(x) \\
 \varphi(y) &=?
 \end{aligned}$$

Por último, reemplazar el valor de $\varphi'(y)$ en z

Ejemplo

$$(2xy^2 + 2y)dx + (2x^2y + 2x)dy = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

$$4xy + 2 = 4xy + 2$$

$$z = \int (2xy^2 + 2y)dx + \varphi(y)$$

$$z = x^2y^2 + 2xy + \varphi(y)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2x^2y + 2x + \varphi'(y)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = N(x, y)$$

$$2x^2y + 2x + \varphi'(y) = 2x^2y + 2x$$

$$\varphi'(y) = 0$$

$$\int \varphi'(y)dy = \int 0dy$$

$$\begin{aligned}\varphi(y) &= C \\ z &= x^2y^2 + 2xy + C \\ x^2y^2 + 2xy &= C\end{aligned}$$

2. Método integración directa

Dada la EDO exacta: $M(x, y)\partial x + N(x, y)\partial y = 0$, para aplicar el método de integración directa se procede a integrar cada componente con su diferencial, considerando los límites de integración, así:

$$\int_{(0,0)}^{(x,0)} M(x, y)dx + \int_{(x,0)}^{(x,y)} N(x, y)dy = 0$$

Ejemplo

$$\begin{aligned}(2xy^2 + 2y)dx + (2x^2y + 2x)dy &= 0 \\ \int_{(0,0)}^{(x,0)} (2xy^2 + 2y)dx + \int_{(x,0)}^{(x,y)} (2x^2y + 2x)dy &= 0 \\ (x^2y^2 + 2xy)_{(0,0)}^{(x,0)} + (x^2y^2 + 2xy)_{(x,0)}^{(x,y)} &= C \\ x^2y^2 + 2xy + x^2y^2 + 2xy &= C \\ x^2y^2 + 2xy &= C\end{aligned}$$

3. Método con sus respectivos diferenciales

Se integra con sus respectivos diferenciales

$$\begin{aligned}M(x, y)\partial x + N(x, y)\partial y &= 0 \\ \int M(x)\partial x + \int N(y)\partial y + \int M(x, y)\partial x + \int N(x, y)\partial y &= 0\end{aligned}$$

Ejemplo

$$(2xy^2 + 2y)dx + (2x^2y + 2x)dy = 0$$

$$\int M(x)dx + \int N(y)dy + \int M(x,y)dx + \int N(x,y)dy = 0$$

$$\int (2xy^2 + 2y)dx + \int (2x^2y + 2x)dy = 0$$

$$x^2y^2 + 2xy + x^2y^2 + 2xy = C$$

$$x^2y^2 + 2xy = C$$

Ejercicios

1. $(2xy - \tan y)dx + (x^2 - x \sec x^2 y)dy = 0$

$$M=2xy - \tan y$$

$$N=(x^2 - x \sec x^2 y)$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

$$2x - \sec x^2 y = 2x - \sec x^2 y \quad (\text{EXACTA})$$

Método 1

$$z = \int (2xy - \tan y)dx + \varphi(y)$$

$$z' = x^2y - x \tan y + \varphi(y)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 - x \sec x^2 y \varphi'(y)$$

$$x^2 - x \sec x^2 y \varphi'(y) = (x^2 - x \sec x^2 y)$$

$$\varphi'(y) = 0$$

$$\int \varphi'(y) dy = \int 0 dy$$

$$\varphi'(y) = C$$

$$x^2y - xtany = C$$

Método 2

$$\int_{(0,0)}^{(X,0)} (2xy - \tan y) \partial x + \int_{(X,0)}^{(X,Y)} (x^2 - x \sec x^2 y) \partial y = C$$

$$(x^2y - xtany) \Big|_{(x,0)}^{(x,y)} + (x^2y - xtany) \Big|_{x,0}^{x,y} = C$$

$$x^2y - xtany = C$$

Método 3

$$\int (2xy - xtany) \partial x + \int (x^2 - x \sec x^2 y) \partial y = 0$$

$$x^2y - xtany + (x^2y - xtany) = C$$

$$x^2y - xtany = C$$

2. $(yx^{y-1})dx + (x^y \ln x)dy = 0$

$$M = yx^{y-1} \quad N = x^y \ln x$$

$$\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx}$$

$$\ln xy x^{y-1} + x^{y-1} = \ln xy x^{y-1} + x^{y-1} \quad (\text{EXACTA})$$

Método 1

$$z = \int yx^{y-1} dx + \varphi(y)$$

$$z = x^y$$

$$z' = x^y \ln x + \varphi'(y) = x^y \ln x$$

$$xy + C = 0$$

$$xy = C$$

Método 2

$$\int_0^{x,0} (yx^{y-1})dx + \int_{x,0}^{x,y} (xy \ln x)dy = 0$$

$$x^y \int_0^{x,0} + xy \int_{x,0}^{xy} = c$$

$$xy + xy = c$$

$$xy = c$$

Método 3

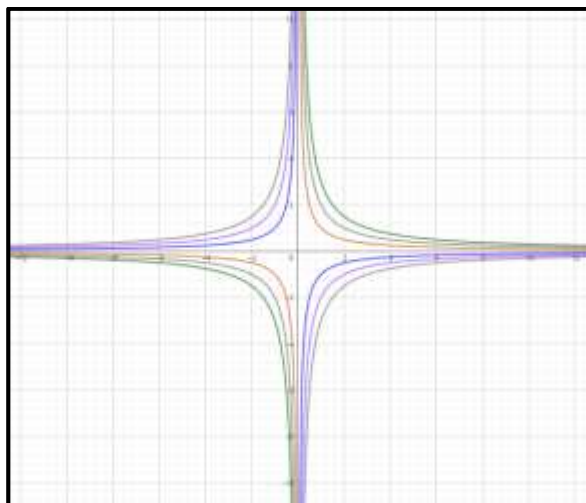
$$\int (yx^{y-1})dx + \int x^y \ln x dy = c$$

$$x^y + x^y = c$$

$$xy = c$$

Figura 8.

Familia de curvas $xy = c$



$$3. \quad (y + y\cos(xy))dx + (x + x\cos(xy))dy = 0$$

$$M = y + y\cos x$$

$$N = x + \cos xy$$

$$\frac{dM}{dY} = 1 + \cos xy - xy\sin xy$$

$$\frac{dN}{dX} = 1 + \cos(xy) - xy\sin xy$$

$$\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx} \quad (\text{EXACTA})$$

Método 1

$$z = \int (y + y\cos xy)dx + \varphi(y)$$

$$z^1 = xy + \sin(xy) + \varphi(y)$$

$$\frac{dZ}{dy} = x + x\cos xy + \int \varphi(y) = x + \cos xy$$

$$\int \varphi(y) = 0$$

$$xy + \sin(xy) = C$$

Método 2

$$\int_0^{x,0} (y + y\cos(xy))dy + \int_{x,0}^{x,y} (x + x\cos(xy))dy = 0$$

$$(xy + \sin(xy)) \int_0^{x,0} + (xy + \sin(xy)) \int_{x,0}^{x,y} = c$$

$$xy + \sin(xy) = C$$

Método 3

$$\int y + y\cos(xy)dx + \int (x + x\cos(xy))dy = 0$$

$$xy + \text{sen}(xy) + xy + \text{sen}(xy) = c$$

$$xy + \text{sen}(xy) = C$$

2.4.2. Ecuaciones diferenciales ordinarias convertibles en exactas

2.4.2.1. Factor de integración o factor integrante

El factor de integración es aquel polinomio por el cual se debe multiplicar toda ecuación diferencial que se compruebe que no es exacta para poder convertirla a exacta.

$$uM(x, y)dx + uN(x, y)dy = 0$$

Comprobación

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Con el factor de integración

$$uM(x, y)dx + uN(x, y)dy = 0$$

$$\frac{u\partial M}{\partial y} = \frac{u\partial N}{\partial x}$$

CASO 1

$$u = f(x)$$

El valor debe ser solo en función de x o una constante

$$f(x) = \frac{1}{N} \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right)$$

$$u = e^{\int f(x)dx}$$

Procedimiento de solución

1. Comprobar que la ecuación tenga la forma de E.D Exacta o puede transformarse a esta a base de arreglos algebraicos.
2. Comprobar por medio de una ecuación si en realidad es una E.D. Exacta de lo contrario se procede a aplicar el método con el cual se nos convierta en factor integrable.
3. Se identifica las diferentes derivadas parciales.
4. Se ingresa las ecuaciones obtenidas de las derivadas parciales y de la E.D.
5. Se calcula la función $f(x)$.
6. Se procede a integrar, y se encuentra el factor integrable u .
7. Se resuelve la E.D. Exacta por cualquiera de los métodos estudiados anteriormente.

Ejemplo

$$(1 - x^2y)dx + x^2(y - x)dy = 0$$

Comprobación

$$\begin{aligned}\frac{\partial M}{\partial y} &= \frac{\partial N}{\partial x} \\ -x^2 &\neq 2xy - 3x^2\end{aligned}$$

Factor integrante

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{1}{N} \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) \\ f(x) &= (x^2 - 2xy + 3x^2) \\ f(x) &= \frac{1}{x^2(y - x)} (2x^2 - 2xy)\end{aligned}$$

$$f(x) = \frac{2x(x-y)}{-x^2(y-x)}$$

$$f(x) = -\frac{2}{x}$$

$$u = e^{\int f(x)dx}$$

$$u = e^{-\int \frac{2}{x}dx}$$

$$u = e^{-2\ln(x)}$$

$$u = x^{-2}$$

$$(x^{-2} - y)dx + (y - x)dx = 0$$

Comprobación

$$\frac{u\partial M}{\partial y} = \frac{u\partial N}{\partial x}$$

$$-1 = -1$$

Solución

$$(x^{-2} - y)dx + (y - x)dx = 0$$

Método 3

$$-\int x^{-2}dx + \int ydy - \int ydx - \int xdy = 0$$

$$x^{-1} + \frac{y^2}{2} - xy - xy = C$$

$$\frac{1}{x} + \frac{y^2}{2} - xy = C$$

CASO 2

Método de solución

1. Comprobar si la ecuación es exacta, derivando $\frac{\partial A}{\partial s}$ y $\frac{\partial B}{\partial r}$ siendo A los términos acompañados por dr y B los términos con ds.
2. Si la ecuación no es exacta se procede a encontrar el factor integrante con: $\mu = e^{-\int g(s)}$

Donde:

$$g(s) = -\frac{1}{R} \left(\frac{\partial A}{\partial s} - \frac{\partial B}{\partial r} \right)$$

3. La ecuación debe quedar solo en términos de s para que se pueda resolver por el caso 2.
4. Luego de obtener el factor de integración se lo multiplica por la ecuación inicial.
5. Se verifica que se haya convertido en exacta y se integra utilizando el método más adecuado.

Ejemplo

$$e^x dx + (e^x \cot(y) + 2y \csc(y)) dy = 0$$

Comprobación

$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial y} &= \frac{\partial N}{\partial x} \\ 0 &\neq e^x \frac{\cos(y)}{\sin(y)} \end{aligned}$$

Factor integrante

$$g(y) = -\frac{1}{M} \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right)$$

$$g(y) = -\frac{1}{e^x}(-e^x \cot(y))$$

$$g(y) = \frac{e^x \cot(y)}{e^x}$$

$$g(y) = \cot(y)$$

$$u = e^{\int g(y) dy}$$

$$u = e^{\int \cot(y) dy}$$

$$u = e^{\ln(\sin(y))}$$

$$u = \sin(y)$$

$$e^x \sin(y) dx + (e^x \cos(y) + 2y) dy = 0$$

Comprobación

$$\frac{u \partial M}{\partial y} = \frac{u \partial N}{\partial x}$$

$$e^x \cos(y) = e^x \cos(y)$$

Solución

$$e^x \sin(y) dx + (e^x \cos(y) + 2y) dy = 0$$

Método 3

$$2 \int y dy + \int e^x \sin(y) dx + \int e^x \cos(y) dy = 0$$

$$y^2 + e^x \sin(y) + e^x \sin(y) = C$$

$$y^2 + e^x \sin(y) = C$$

CASO 3

$$\mu(x, y) = f(x) \cdot g(y)$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{N f'(x)}{f(x)} - \frac{M g'(y)}{g(y)}$$

$$\mu(x, y) = f(x) \cdot g(y)$$

Procedimiento de solución

1. Comprobamos si la ecuación diferencial ordinaria es exacta.

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

2. Luego de ello comprobamos que sea el tercer caso de factor integrante.

$$\mu(x, y) = f(x) \cdot g(y)$$

3. Si es el tercer caso realizamos lo siguiente:

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{Nf'(x)}{f(x)} - \frac{Mg'(y)}{g(y)}$$

4. Encontramos nuestro $\frac{f'(x)}{f(x)}$ y $\frac{g'(y)}{g(y)}$ que al ser multiplicados

por N y M respectivamente nos dará una igualdad con $\frac{\partial M}{\partial y} -$

$$\frac{\partial N}{\partial x} \dots$$

5. Luego encontramos $f(x)$ y $g(y)$
6. Obtenemos $\mu(x, y) = f(x) \cdot g(y)$
7. Multiplicamos $\mu(x, y)$ en la ecuación original.
8. Volvemos a comprobar si la ecuación es exacta.
9. Finalmente resolvemos la ecuación exacta por cualquier método ya estudiado.

Ejemplo

$$\left(\frac{1}{3x^2y} + \frac{2}{3x^4y^3}\right)dx + \left(\frac{2}{3x^3y^4} - \frac{2}{3xy^2}\right)dy = 0$$

Comprobación

$$\begin{aligned}\frac{\partial M}{\partial y} &= \frac{\partial N}{\partial x} \\ -\frac{1}{3x^2y^2} - \frac{2}{x^4y^4} &\neq -\frac{2}{x^4y^4} + \frac{2}{3x^2y^2}\end{aligned}$$

Factor integrante

$$\begin{aligned}\mu(x, y) &= f(x) \cdot g(y) \\ \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} &= \frac{Nf'(x)}{f(x)} - \frac{Mg'(y)}{g(y)} \\ -\frac{1}{3x^2y^2} - \frac{2}{x^4y^4} + \frac{2}{x^4y^4} - \frac{2}{3x^2y^2} \\ &= \left(\frac{2}{3x^3y^4} - \frac{2}{3xy^2}\right) \frac{f'(x)}{f(x)} - \left(\frac{1}{3x^2y} + \frac{2}{3x^4y^3}\right) \frac{g'(y)}{g(y)} \\ &\quad - \frac{1}{3x^2y^2} - \frac{2}{3x^2y^2} \\ &= \left(\frac{2}{3x^3y^4} - \frac{2}{3xy^2}\right) \frac{f'(x)}{f(x)} - \left(\frac{1}{3x^2y} + \frac{2}{3x^4y^3}\right) \frac{g'(y)}{g(y)} \\ &\quad \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x} \\ &\quad \frac{g'(y)}{g(y)} = \frac{1}{y} \\ -\frac{1}{3x^2y^2} - \frac{2}{3x^2y^2} &= \frac{2}{3x^4y^4} - \frac{2}{3x^2y^2} - \frac{1}{3x^2y^2} - \frac{2}{3x^4y^4} \\ -\frac{1}{3x^2y^2} - \frac{2}{3x^2y^2} &= -\frac{2}{3x^2y^2} - \frac{1}{3x^2y^2}\end{aligned}$$

Encontramos $f(x)$ y $g(y)$

$$\begin{aligned}\frac{f'(x)}{f(x)} &= \frac{1}{x} && \rightarrow \int \frac{f'(x)}{f(x)} = \int \frac{1}{x} dx && \rightarrow \ln(f(x)) \\ &= \ln(x) && \rightarrow f(x) = x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{g'(y)}{g(y)} &= \frac{1}{y} && \rightarrow \int \frac{g'(y)}{g(y)} = \int \frac{1}{y} dy && \rightarrow \ln(g(y)) \\ &= \ln(y) && \rightarrow g(y) = y\end{aligned}$$

Encontramos: $\mu(x, y) = f(x) \cdot g(y)$

$$\mu(x, y) = f(x) \cdot g(y)$$

$$\mu(x, y) = xy$$

Multiplicamos $\mu(x, y) = xy$ en la ecuación original

$$\left(\frac{1}{3x} + \frac{2}{3x^3y^2}\right) dx + \left(\frac{2}{3x^2y^3} - \frac{2}{3y}\right) dy = 0$$

Comprobación

$$\begin{aligned}\frac{\partial M}{\partial y} &= \frac{\partial N}{\partial x} \\ -\frac{4}{3x^3y^3} &= -\frac{4}{3x^3y^3}\end{aligned}$$

Solución

$$\left(\frac{1}{3x} + \frac{2}{3x^3y^2}\right) dx + \left(\frac{2}{3x^2y^3} - \frac{2}{3y}\right) dy = 0$$

Método 3

$$M_{(x,y)} dx + N_{(x,y)} dy = 0$$

$$\int \frac{1}{3x} dx - \int \frac{2}{3y} dy + \int \frac{2}{3x^3y^2} dx + \int \frac{2}{3x^2y^3} dy = C$$

$$\frac{1}{3} \ln(x) - \frac{2}{3} \ln(y) - \frac{1}{3x^2y^2} - \frac{1}{3x^2y^2} = C$$

$$\frac{1}{3} \ln(x) - \frac{2}{3} \ln(y) - \frac{1}{3x^2y^2} = C$$

CASO 4

$$p^v q^t [Vdp + Tdq = 0]$$

Método de solución

1. Multiplicamos la ecuación diferencial por μ , el cual es el factor integrante que debemos hallar, donde $\mu = p^v q^t$.
2. Una vez realizada la multiplicación procedemos a derivar $\frac{\partial V}{\partial q}$ y

$$\frac{\partial T}{\partial p}.$$

$$\frac{\partial V}{\partial q} = \frac{\partial T}{\partial p}$$

3. De la ecuación derivada extraemos $p^v q^t$ similares que exista en las mismas para de esta manera plantar una ecuación con los coeficientes, formándose un sistema de ecuaciones de dos incógnitas.
4. Hallar la solución del sistema de ecuación por cualquier método, reemplazar en $p^v q^t$ y de esta manera se obtendrá una ecuación diferencial exacta que se puede resolver por cualquier método.

Ejemplo



$$2q dp + (-p - pq^3)q = 0$$

$$p^v q^t [2q dp + (-p - pq) dq] = 0$$

$$2p^v q^{t+1} dp + (-p^{v+1} q^t - p^{v+1} q^{t+3}) dq = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial q} = 2(t+1)p^v q^t \quad \frac{\partial T}{\partial p} = -(v+1)p^v q^t - (v+1)p^v q^{t+3}$$

$p^v q^t \Rightarrow 2(1+t) = -(v+1)$	$p^{v+1} q^{t+2} \Rightarrow 0 = -(v+1)$
$t = \frac{-v-1}{2}$	$v = -1$
$t = \frac{-1-1}{2}$	
$t = \frac{-2}{2} \Rightarrow t = -1$	

$$\mu = p^v q^t \Rightarrow p^{-1} q^{-1}$$

$$\mu[V dp + T dp]$$

$$2p^{-1} dp + (-q^{-1} - q^2) dq = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial q} = 0 \quad \frac{\partial T}{\partial p} = 0$$

Solución:

$$2p^{-1} dp + (-q^{-1} - q^2) dq = 0$$

Método 3

$$\int 2p^{-1} dp + \int (-q^{-1} - q^2) = 0$$

$$2\ln(p) - \ln(q) - \frac{q^3}{3} = C$$

Ejercicios

1. $(xy^3 + 1)dx + x^2y^2dy = 0$

Comprobación

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

$$3xy^2 \neq 2xy^2$$

Factor integrable

$$f(x) = \frac{1}{N} \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right)$$

$$f(x) = \frac{1}{x^2y^2} (3xy^2 - 2xy^2)$$

$$f(x) = \frac{1}{x^2y^2} (3xy^2 - 2xy^2)$$

$$f(x) = \frac{1}{x^2y^2} (xy^2)$$

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

$$u = e^{\int f(x)dx}$$

$$u = e^{\int \frac{1}{x} dx}$$

$$u = e^{\ln(x)}$$

$$u = x$$

(CASO 1)

$$x(xy^3 + 1)dx + x(x^2y^2)dy = 0$$

$$(x^2y^3 + x)dx + x^3y^2dy = 0$$

Comprobación

$$\frac{u\partial M}{\partial y} = \frac{u\partial N}{\partial x}$$

$$3x^2y^2 = 3x^2y^2$$

Solución:

$$\int xdx + \int x^2y^3dx + \int x^3y^2dy = 0$$

$$\frac{x^2}{2} + \frac{x^3y^3}{3} + \frac{x^3y^3}{3} = C$$

$$\frac{x^2}{2} + \frac{x^3y^3}{3} = C$$

$$\frac{3x^2 + 2x^3y^3}{6} = C$$

$$3x^2 + 2x^3y^3 = C$$

2. $(2xy^2 - 3y^3)dx + (7 - 3xy^2)dy = 0$

Comprobación

$$\frac{\partial M}{\partial y} = (4xy - 9y^2) \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 0 - 3y^2$$

Factor integrable

$$g(y) = -\frac{1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)$$

$$g(y) = -\frac{1}{2xy^2 - 3y^3}(4xy - 9y^2 - 3y^2)$$

$$g(y) = -\left(\frac{4xy - 6y^2}{2xy^2 - 3y^3}\right)$$

$$g(y) = -\left(\frac{2y(2x - 3y)}{y^2(2x - 3y)}\right) = -\frac{2}{y}$$

$$\mu = e^{-\int g(y)} = \mu = e^{-\int \frac{2dy}{y}} = \mu = e^{\ln y^{-2}} = \mu = y^{-2} \quad (\text{CASO 2})$$

Comprobación

$$(2x - 3y) dx + (7y^{-2} - 3x) dy$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 0 - 3 \frac{\partial N}{\partial x} = 0 - 3$$

Solución

$$\int 2x dx + \int 7y^{-2} dy - \int 3y dx - \int 3x dy = \int 0$$

$$x^2 - 7y^{-1} - 3xy - 3xy = C$$

$$x^2 - \frac{7}{y} - 3xy = C$$

3. $(rt + r^2t + t^3)dr + (r^2 + 2t^2)dt = 0$

Comprobación

$$M_{(r,t)} = (rt + r^2t + t^3)dr$$

$$N_{(r,t)} = (r^2 + 2t^2)dt$$

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial N}{\partial r}$$

$$r + r^2 + 3t^2 = 2r$$

Factor integrante (CASO 3)

$$\mu(r, t) = f(r) \cdot g(t)$$

$$\frac{\partial M}{\partial t} - \frac{\partial N}{\partial r} = \frac{Nf'(r)}{f(r)} - \frac{Mg'(t)}{g(t)}$$

$$r + r^2 + 3t^2 - 2r = (r^2 + 2t^2) \frac{f'(r)}{f(r)} - (rt + r^2t + t^3) \frac{g'(t)}{g(t)}$$

$$r^2 + 3t^2 - r = (r^2 + 2t^2) \frac{f'(r)}{f(r)} - (rt + r^2t + t^3) \frac{g'(t)}{g(t)}$$

$$\frac{f'(r)}{f(r)} = 2$$

$$\frac{g'(t)}{g(t)} = \frac{1}{t}$$

$$r^2 + 3t^2 - r = 2r^2 + 4t^2 - r - r^2 - t^2$$

$$r^2 + 3t^2 - r = r^2 + 3t^2 - r$$

$$\frac{f'(r)}{f(r)} = 2 \quad \rightarrow \int \frac{f'(r)}{f(r)} = \int 2 dr \quad \rightarrow \ln(f(r)) = 2r$$

$$\rightarrow f(x) = e^{2r}$$

$$\frac{g'(t)}{g(t)} = \frac{1}{t} \quad \rightarrow \int \frac{g'(t)}{g(t)} = \int \frac{1}{t} dt \quad \rightarrow \ln(g(t)) = \ln t$$

$$\rightarrow g(y) = t$$

Encontramos $\mu(r, t) = f(r) \cdot g(t)$

$$\mu(r, t) = f(r) \cdot g(y)$$

$$\mu(r, t) = e^{2r} t$$

Multiplicamos $\mu(r, t) = e^{2r} t$ en la ecuación original

$$(re^{2r}t^2 + r^2e^{2r}t^2 + e^{2r}t^4)dr + (r^2e^{2r}t + 2e^{2r}t^3)dt = 0$$

Comprobación

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial N}{\partial r}$$

$$2re^{2r}t + 2r^2e^{2r}t + 4e^{2r}t^3 = 2re^{2r}t + 2r^2e^{2r}t + 4e^{2r}t^3$$

Solución:

$$M_{(r,t)}dr + N_{(r,t)}dt = 0$$

$$\int M_{(r)}dr + \int N_{(t)}dt + \int M_{(r,t)}dr + \int N_{r,t}dt = c$$

$$\int (re^{2r}t^2 + r^2e^{2r}t^2 + e^{2r}t^4)dr + \int (r^2e^{2r}t + 2e^{2r}t^3)dt = c$$

$$\frac{1}{2}re^{2r}t^2 - \frac{1}{4}e^{2r}t^2 + \frac{1}{2}r^2e^{2r}t^2 - \frac{1}{2}re^{2r}t^2 + \frac{1}{4}e^{2r}t^2 + \frac{1}{2}e^{2r}t^4$$

$$+ \frac{1}{2}r^2e^{2r}t^2 + \frac{1}{2}e^{2r}t^4 = c$$

$$\frac{1}{2}r^2e^{2r}t^2 + \frac{1}{2}e^{2r}t^4 = c$$

4. $\left(\frac{1}{2}pq - \frac{4}{q^2}\right)dp + \left(\frac{2}{3}p^2 - \frac{2p}{q^3}\right)dq = 0$ (CASO 4)

$$p^vq^t * \left[\left(\frac{1}{2}pq - \frac{4}{q^2}\right)dp + \left(\frac{2}{3}p^2 - \frac{2p}{q^3}\right)dq = 0\right]$$

$$\left(\frac{1}{2}p^{v+1}q^{t+1} - 4p^vq^{t-2}\right)dp + \left(\frac{2}{3}p^{v+2}q^t - 2p^{v+1}q^{t-3}\right)dq = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial q} = \frac{1}{2}(t+1)p^{v+1}q^t - 4(t-2)p^vq^{t-3} \quad \frac{\partial T}{\partial p}$$

$$= \frac{2}{3}(v+2)p^{v+1}q^t - 2(v+1)p^vq^{t-3}$$

$p^{v+1}q^t \Rightarrow \frac{1}{2}(t+1) = \frac{2}{3}(v+2)$	$p^vq^{t-3} \Rightarrow -4(t-2) = -2(v+1)$
$* t = \frac{4}{3}(v+2) - 1$	$* \left[-4\left(\frac{4(v+2)-9}{3}\right) = -2(v+1)\right] * 3$
$t = \frac{4}{3}(1+2) - 1$	$-16v - 32 + 36 = -6v - 6$
$t = 4 - 1$	$10v = 10$
$t = 3$	$v = 1$

$$\mu = p^v q^t \Rightarrow pq^3$$

$$\left(\frac{1}{2}p^2q^4 - 4pq\right)dp + \left(\frac{2}{3}p^3q^3 - 2p^2\right)dq = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial q} = 2p^2q^3 - 4p \qquad \frac{\partial T}{\partial p} = 2p^2q^3 - 4p$$

Solución:

$$\int \left(\frac{1}{2}p^2q^4 - 4pq\right)dp + \int \left(\frac{2}{3}p^3q^3 - 2p^2\right)dq = \int 0$$

$$\frac{1}{6}p^3q^4 - p^2q + \frac{1}{6}p^3q^4 - p^2q = C$$

$$\frac{1}{6}p^3q^4 - p^2q = C$$

2.4.3. Ejercicios varios

Ejercicio 1



$$(6ab - 2b^2 + 1)\partial a + (3a^2 - 4ab)\partial b = 0 \quad \text{Para: } b(1) = 2$$

Se verifica que $M=N$

$$\frac{\partial F}{\partial a} = 6ab - 2b^2 + 1$$

$$M = \frac{\partial F}{\partial a} = Fa$$

$$\partial F = (6ab - 2b^2 + 1) \partial a$$

$$N = \frac{\partial F}{\partial b} = Fb$$

Se aplica el procedimiento de solución

$$\int \partial F = \int (6ab - 2b^2 + 1) \partial a$$

$$F = 6b \frac{a^2}{2} - 2b^2a + a + \varphi(b)$$

$$F = 3a^2b - 2ab^2 + b + \varphi(b)$$

$$\frac{\partial F}{\partial b} = 3a^2 - 2a * 2b + 0 + \varphi'(b)$$

$$\frac{\partial F}{\partial b} = 3a^2 - 4ab + \varphi'(b)$$

$$3a^2 - 4ab + \varphi'(b) = 3a^2 - 4ab$$

$$\varphi(b) = C$$

$$F(a, b) = C$$

$$3a^2 - 4ab + a = C \quad (\text{Solución Particular})$$

Ejercicio 2

$$e^a(b^3 + ab^3 + 1)da + 3b^2(ae^a - 6)db = 0$$

Se verifica que $M=N$

$$\frac{\partial P}{\partial b} = e^a(3b^2 + 3b^2a) \rightarrow e^a3b^2(1 + a)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial b} = 3b^2(e^a + ae^a) \rightarrow e^a3b^2(1 + a)$$

$$D = R^2$$

Se aplica el procedimiento de solución

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial a} &= P(a, b) = e^a(b^3 + ab^3 + 1) \rightarrow F(a, b) \\ &= \int e^a(b^3 + ab^3 + 1)da = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 e^a(b^3 + ab^3 + 1) \\
 - \int e^a b^3 da &= e^a(b^3 + ab^3 + 1) - e^a b^3 \\
 &= e^a(ab^3 + 1) + \alpha(b) \\
 \frac{\partial F}{\partial b} &= 3ab^2 e^a + \alpha'(b)
 \end{aligned}$$

Deberá coincidir con:

$$\begin{aligned}
 Q(a, b) = 3b^2(ae^a - 6)db &\rightarrow \alpha'(b) = -18b^2 \rightarrow \alpha(b) \\
 &= -6b^3 + cte
 \end{aligned}$$

Por tanto:

$$\begin{aligned}
 F(a, b) &= e^a(ab^3 + 1) - 6 \\
 e^a(ab^3 + 1) - 6b^3 &= K \quad (\text{Solución General})
 \end{aligned}$$

Ejercicio 3

$$(2ab + b^2)da + (a^2 + 2ab - b)db = 0$$

Se verifica que $M=N$

$$M = \frac{\partial P}{\partial b} = 2a + 2b$$

$$N = \frac{\partial Q}{\partial a} = 2a + 2b$$

Se aplica el procedimiento de solución

$$F(a, b) = \int (2ab + b^2)da = a^2b + b^2a + \alpha(b)$$

$$\frac{\partial F}{\partial b} = a^2 + 2ab + \alpha'(b) = Q(a, b) = a^2 + 2ab - b \rightarrow \alpha'(b) = -b$$

$$\alpha(b) = -\frac{b^2}{2} + cte$$

$$a^2b + b^2a - \frac{b^2}{2} = k \quad (\text{Solución General})$$

Ejercicio 4

$$(a + b\cos a)da + \sin a db = 0$$

Se verifica que $M=N$

$$M = P_b = \cos a$$

$$N = Q_a = \cos a$$

Se aplica el procedimiento de solución

$$F(a, b) = \int \sin a da = b \sin a + \alpha(a)$$

$$\frac{\partial F}{\partial a} = b \cos a + \alpha'(a) = P(a, b) = a + b \cos a$$

$$\rightarrow \alpha'(a) = a \rightarrow \alpha(a) = \frac{a^2}{2} + cte$$

$$b \sin a + \frac{a^2}{2} = k \quad (\text{Solución General})$$

Ejercicio 5

$$(2ae^b + e^a)da + (a^2 + 1)e^b db = 0$$

Se verifica que $M=N$

$$M = Pb = 2ae^b$$

$$N = Qa = 2ae^b$$

Se aplica el procedimiento de solución

$$F(a, b) = \int (2ae^b + e^a) da = a^2 e^b + e^a + \alpha(b)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial b} &= a^2 e^b + \alpha'(b) = Q(a, b) = (a^2 + 1)e^b \rightarrow \alpha'(b) = e^b \rightarrow \alpha(b) \\ &= e^b + cte \end{aligned}$$

$$a^2 e^b + e^a + e^b = (a^2 + 1)e^b + e^a = k \quad (\text{Solución General})$$

Ejercicios propuestos



1. $b^2 + 2a + (5b^4 + 2ab)b' = 0, b(0) = 3$
2. $(a^3 + ab^2)da + (a^2b + b^3)db = 0$
3. $(2a - 1)da + (3b + 7)db = 0$
4. $(5a + 4b)da + (4a - 8b^3)db = 0$
5. $(\operatorname{sen} b - b \operatorname{sena})da + (\operatorname{cosa} + a \operatorname{cos} b - b)db = 0$
6. $(2b^2a - 3)da + (2ba^2 + 4)db = 0$
7. $(e^a + b)da + (2 + a + be^b)db = 0 \quad b(0) = 1$
8. $(4b + 2a - 5)da + (6b + 4a - 1)db = 0; \quad b(-1) = 2$
9. $\sec x (\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y + y \sec x) \partial x + (\sec x \sec^2 y + \operatorname{tg} x) \partial y = 0$
10. $(2x + y \cos(xy)) \partial x + x \cos(xy) \partial y = 0$

2.5 Aplicaciones de las ecuaciones diferenciales ordinarias

Los diversos problemas que pueden resolverse con la ayuda de ecuaciones diferenciales son muchos, vienen dados por las interpretaciones de la función derivada. Ejemplos: tasas de variación en general, velocidades, tasas de cambio, pendientes, marginal, ente otros.

2.5.1 Trayectorias ortogonales

Dos familias de curvas, se dice que son ortogonales, si cada miembro de la una familia es ortogonal a cada miembro de la otra familia.

Dos curvas son ortogonales entre sí, cuando se intersecan ortogonalmente, es decir sus rectas tangentes son ortogonales entre sí, en el punto común.

Dos rectas son ortogonales entre sí, cuando el producto de sus pendientes es -1 .

Así entonces, si dos familias de curvas están dadas por las ecuaciones:

$$G_1(x, y, c_1) = 0, \quad G_2(x, y, c_2) = 0$$

Y si la pendiente de la primera familia está dada por: $y' = f(x, y)$ entonces la pendiente de la segunda familia (la ortogonal) debe ser:

$$y' = -\frac{1}{f(x, y)}$$

Nota. En la práctica, se da una familia de curvas y lo que se busca es la familia ortogonal.

Para encontrar las ecuaciones de las trayectorias ortogonales se procede así:

1. Inicialmente hallamos la pendiente m_A de la ecuación derivando con respecto a p y q .
2. Despejamos la constante de la pendiente, en caso de tenerla.
3. Reemplazamos la constante en la ecuación original.
4. Hallamos la inversa de la pendiente m_B la cual es igual a:
$$m_A \cdot m_B = -1 \quad ; \text{debido a que es ortogonal(perpendicular)}$$
$$m_B = -\frac{1}{m_A}$$
5. Identificar qué tipo de ecuación es y resolverla por el método adecuado.
6. No todas las ecuaciones ortogonales son exactamente iguales.

Ejercicios

- 1. Encontrar la trayectoria ortogonal que pase por (1,2) de la familia: $x^2 + 3y^2 = C$**

$$m_A; 2x + 6yy' = Cy'$$

$$m_A; \frac{2x}{y'} + 6y = C$$

Sustituyendo C en la ecuación original

$$mA; x^2 + 3y^2 = \left(\frac{2x}{y'} + 6y\right)y$$

$$\frac{x^2}{y} + 3y = \frac{2x + 6yy'}{y'}$$

$$\frac{x^2 y'}{y} + 3yy' = 2x + 6yy'$$

$$y' \left(\frac{x^2}{y} + 3y - 6y \right) = 2x$$

$$y^1 \left(\frac{x^2 - 3y^2}{y} \right) = 2x$$

$$mA; y' = \frac{2xy}{x^2 - 3y^2}$$

$$mB: -\frac{1}{mA}$$

$$mB; y' = -\frac{x^2 - 3y^2}{2xy}$$

$$y' = -\frac{x}{2y} + \frac{3y}{2x}$$

$$y' - \frac{3y}{2x} = -\frac{x}{2y} \quad \text{Ecuación de Bernoulli}$$

$$y' - \frac{3y}{2x} = -\frac{xy^{-1}}{2}$$

$$y^n = y^{-1}$$

$$z = y^2$$

$$z' = 2yy'$$

$$y'y - \frac{3y^2}{2x} = -\frac{x}{2}$$

$$\frac{z'y}{2y} - \frac{3z}{2x} = -\frac{x}{2}$$

$$z' - \frac{3z}{x} = -x$$

$$z = e^{-\int P(x)dx} [\int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C]$$

$$z = e^{3\int \frac{dx}{x}} [\int -xe^{-3\int \frac{dx}{x}} dx + C]$$

$$z = e^{\ln x^3} [\int -xe^{\ln x^{-3}} dx + C]$$

$$z = x^3 [\int -xx^{-3} dx + C]$$

$$z = x^3 [\int -x^{-2} dx + C]$$

$$z = x^3 [x^{-1} + C]$$

$$y^2 = x^2 + Cx^3$$

Reemplazamos el punto (1,2)

$$4 = 1 + C$$

$$C = 3$$

$$y^2 = x^2 + 3x^3$$

2. Hallar las trayectorias ortogonales de la ecuación $x^2 - xy + y^2 = c$

$$2x - y + x y' + 2yy' = 0$$

$$y'(x + 2y) = y - 2x$$

$$y' = \frac{y - 2x}{x + 2y}$$

$$y' = -\frac{x+2y}{y-2x}$$

$$y' = -\frac{x+2y}{y-2x} \quad E.D. Homogénea$$

$$\begin{aligned} y &= ux \\ y' &= u'x + u \end{aligned}$$

$$u'x + u = -\frac{x+2ux}{ux-2x}$$

$$(u'x + u)(ux - 2x) + x + 2ux = 0$$

$$u'u x^2 - 2u'x^2 + u^2x - 2ux + x + 2ux = 0$$

$$u' x^2(u - 2) + x(u^2 + 1) = 0$$

$$\frac{x^2(u-2)}{x^2(u^2+1)} du + \frac{x(u^2+1)}{x^2(u^2+1)} dx = 0$$

$$\int \frac{udu}{u^2+1} + 2 \int \frac{du}{u^2+1} + \int \frac{dx}{x} = \int 0$$

$$\frac{1}{2} \ln(u^2+1) + 2 \arctg(u) + \ln x = C$$

$$\ln[(u^2+1)x] + 2 \arctg(u) = C$$

$$\ln \left[\left(\frac{y^2}{x^2} + 1 \right)^{1/2} x \right] + 2 \arctg \left(\frac{y}{x} \right) = C$$

$$\ln[(y^2+x^2)^{1/2}] + 2 \arctg \left(\frac{y}{x} \right) = C$$

3. Encontrar las trayectorias ortogonales, que pasan a través del punto (-2,3) de la familia de curvas $y^2=kx$

$$y^2 = kx$$

$$2y y' = kx$$

$$k = \frac{2y y'}{x}$$

Sustituimos en la ecuación inicial

$$y^2 = kx$$

$$mA; y^2 = \frac{2y y' x}{x}$$

$$y^2 = 2y y'$$

$$mB; x' = \frac{y}{2} \quad \text{Variables Separables}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{y}{2}$$

$$2 \int dx = \int y dy$$

$$2 \int dx - \int y dy = \int 0$$

$$2x - \frac{y^2}{2} = C$$

Reemplazamos el punto $(-2,3)$

$$2(-2) - \frac{(3)^2}{2} = C$$

$$-4 - \frac{9}{2} = C$$

$$\frac{-8 - 9}{2} = C$$

$$C = -\frac{17}{2}$$

$$2x - \frac{y^2}{2} = -\frac{17}{2}$$

Nota: Si la familia de curvas planas se da por una ecuación en coordenadas polares $\phi(r, \theta, a) = 0$, (A), donde a es un parámetro.

Eliminando el parámetro “ a ” entre la ecuación (A) y $\frac{d\phi}{d\theta} = 0$,

encontramos la ecuación diferencial de la familia:

$$F(r, \theta, r') = 0 \quad (A)$$

Sustituyendo en esta r' por $-\frac{r^2}{r'}$ obtenemos la ecuación diferencial de

la familia de las trayectorias ortogonales. $F\left(r, \theta, -\frac{r^2}{r'}\right) = 0$.

2.5.2 Aplicaciones geométricas

Las aplicaciones geométricas están relacionadas con la primera derivada, en la Tabla 1 se muestran algunas propiedades de la derivada relacionada con las curvas y que sirven para realizar los diversos ejemplos.

Procedimiento de solución

1. Leer de manera detenida el enunciado.
2. Realizar un esquema gráfico de acuerdo con el enunciado.
3. Identificar las fórmulas o ecuaciones que se pueden utilizar para la solución de los ejercicios.
4. Establecer una ecuación que se pueda resolver por ecuaciones diferenciales.
5. Resolver aplicando cualquier método conocido de ecuaciones diferenciales.

Tabla 1

Ecuaciones utilizadas para resolver problemas geométricos aplicando ecuaciones diferenciales ordinarias.

1	Ecuación de la recta tangente a la curva en el punto (x,y)	$Y - y = y'(X - x)$	
2	Ecuación de la recta normal a la curva en el punto (x,y)	$Y - y = x'(X - x)$	
3	Segmento de la recta tangente entre el punto coordenado y el eje de coordenadas	Eje X $X = x + y \frac{dy}{dx}$	Eje Y $Y = y + x \frac{dx}{dy}$
4	Segmento de la recta normal entre el punto coordenado y el eje de coordenadas	Eje X $X = x - y \frac{dx}{dy}$	Eje Y $Y = y - x \frac{dy}{dx}$
5	Longitud de la tangente entre el P(x,y) y el eje de coordenadas	Eje X $y * \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}$	Eje Y $x * \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$
6	Longitud de la normal entre el P(x,y) y el eje de coordenadas	Eje X $y * \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$	Eje Y $x * \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}$
7	Longitud de la sub tangente	$y \frac{dx}{dy}$	
8	Longitud de la sub normal	$y \frac{dy}{dx}$	
9	Longitud de arco	$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$	
10	Área (elementos de área)	$ydx \text{ o } xdy$	

Ejercicios

1. En cualquier punto de una curva y la recta que une ese punto con el origen formando un triángulo isósceles con base en el eje de las x. Hallar la ecuación de la curva sabiendo que pasa por el punto (2,2).

Ecuaciones a utilizar

Ecuación de la recta tangente a la curva en el punto (x,y)	$Y - y = y'(X - x)$
Ecuación de la recta normal a la curva en el punto (x,y)	$Y - y = x'(X - x)$

Solución

Condiciones iniciales: P(2,2)

Gráfico esquema

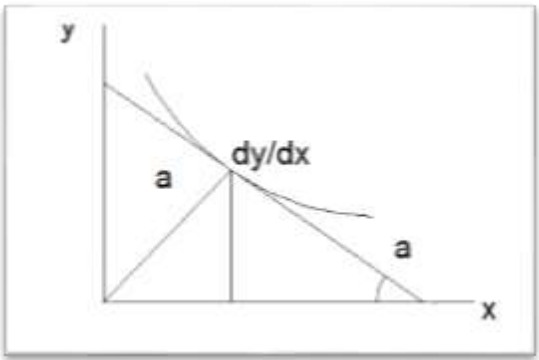


Figura 9. Esquema gráfico de solución

Planteamiento

$$L1 \perp L2$$

$$\text{tag1} * \text{tag2} = -1$$

$$\text{tag1} = \arctan \text{tag2}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$$

$$\frac{dy}{y} + \frac{dx}{x} = 0$$

Solución general

$$\int \frac{dy}{y} + \int \frac{dx}{x} = c$$

$$\ln y + \ln x = \ln c$$

$$y * x = c$$

Solución particular

C.I.

$$x = 2$$

$$y = 2$$

$$yx = c$$

$$2 * 2 = c$$

$$c = 4$$

$$\mathbf{yx = 4}$$

2. El eje de las X, la tangente y la ordenada en cada punto de la curva forman un triángulo de área constante K, Hallar la ecuación de la curva obteniendo los valores correspondientes de K y de la constante de integración, suponiendo que pasa por los puntos (0,4) y (1,2)

Ecuaciones a utilizar

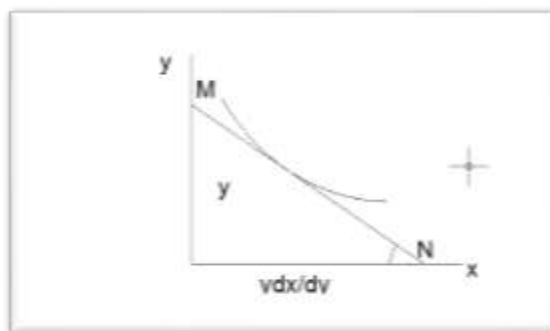
Longitud de la sub tangente	$y \frac{dx}{dy}$
-----------------------------	-------------------

Condiciones iniciales

Po (0,4); P(1,2)

Figura 10

Esquema gráfico de solución.



Solución

$$\Delta OMN$$

$$A = K$$

$$A = \frac{b * h}{2}$$

$$K = OM * ON$$

$$2K = y \frac{dx}{dy} y$$

$$2K = y^2 \frac{dx}{dy}$$

Solución General

$$\int \frac{2K dy}{y^2} = \int dx$$

$$2K \int \frac{dy}{y^2} = X + C$$

$$\frac{2K}{y} = X + C$$

Solución particular

C.I.

$$Po = (0,4)$$

$$\frac{-2K}{4} = 0 + C$$

$$\frac{-K}{2} = C$$

$$P = (1,2)$$

$$\frac{-2K}{2} = 1 + C$$

$$-k = -1 - \frac{K}{2}$$

$$\frac{-K}{2} = 1$$

$$K = -2$$

$$\frac{-(-2)}{2} = C$$

$$1 = C$$

$$\frac{2(-2)}{y} = X + 1$$

$$0 = 4 - xy - y$$

3. La normal en todo punto de la curva pasa por un punto fijo.

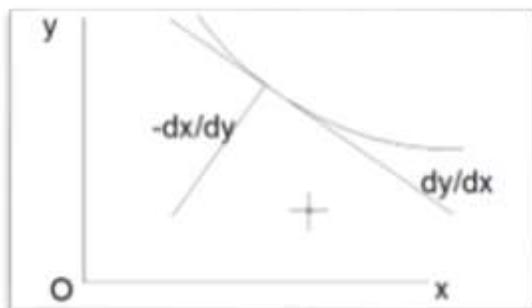
Hallar la ecuación de la curva.

Ecuaciones a utilizar

Ecuación de la recta normal a la curva en el punto (x,y)	$Y - y = x'(X - x)$
Normal	$m = -\frac{dx}{dy}$

Figura 11

Esquema gráfico de solución.



Solución

$$m = -\frac{dx}{dy} = \frac{y-k}{x-h}$$

$$\int (y-k)dy = -\int (x-h)dx$$

$$\frac{(y-k)^2}{2} = -\frac{(x-h)^2}{2} + C$$

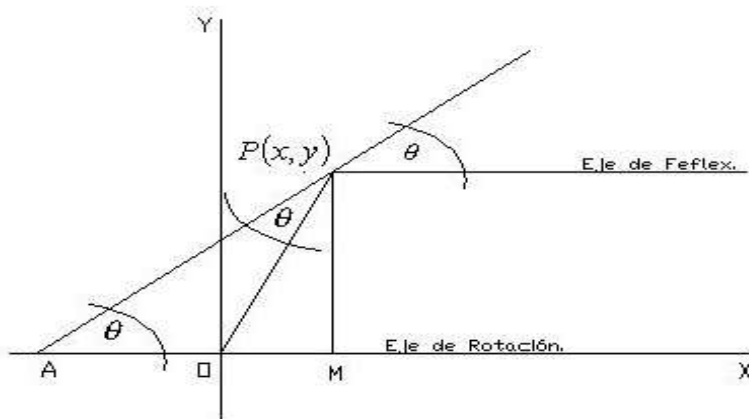
$$\frac{(y-k)^2}{2} + \frac{(x-h)^2}{2} = \frac{C^2}{2}$$

$$(y-k)^2 + (x-h)^2 = C^2$$

4. Encuentre la forma que debe tener un espejo de rotación para que un rayo de luz, que parta de una fuente, se refleje siempre en forma paralela al eje de rotación.

Figura 12

Esquema gráfico de solución.



Solución:

Si se ubica la fuente de luz en el origen del plano xy , y el eje de rotación se lo hace coincidir con el eje Ox . De acuerdo con el gráfico, si el ángulo SPT es θ , entonces el ángulo OPA también es θ , puesto que el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión, de donde el triángulo AOP es isósceles, es decir, $AO = OP$.

$$\text{Entonces: } \tan(\theta) = y' = \frac{PM}{AM}$$

$$AM = AO + OM$$

$$AM = OP + x$$

$$PM = y$$

$$OP = \sqrt{x^2 + y^2}$$

La ecuación para esta familia de curvas es: $y' = \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}$. (Ecuación

Homogénea de grado uno)

Cambio de variable: $z = \frac{x}{y}$ y $\frac{dx}{dy} = z + y \frac{dz}{dy}$

$$z + y \frac{dz}{dy} = \frac{zy + \sqrt{z^2 \cdot y^2 + y^2}}{y}$$

$$z + y \frac{dz}{dy} = z + \sqrt{z^2 + 1} \Rightarrow y \frac{dz}{dy} = \sqrt{z^2 + 1}$$

$$y \frac{dz}{dy} = \sqrt{z^2 + 1} \Rightarrow \frac{dz}{\sqrt{z^2 + 1}} = \frac{dy}{y}$$

Integrando:

$$\int \frac{dz}{\sqrt{z^2 + 1}} = \int \frac{dy}{y} + \ln|C| \Rightarrow \ln|z + \sqrt{z^2 + 1}| = \ln|y| + \ln|C|$$

$$\ln|z + \sqrt{z^2 + 1}| = \ln|yC|$$

$$z + \sqrt{z^2 + 1} = yC$$

Regresando a variables x e y, y realizando simplificaciones algebraicas

se obtiene: $y^2 = c^2 + 2cx$, $\Rightarrow y^2 = 2c\left(x + \frac{c}{2}\right)$ Familia de parábolas.

2.6 Aplicaciones físicas

2.6.1.1 Mecánicas

Las aplicaciones a la mecánica están relacionadas con la aplicación de la segunda ley de Newton la cual dice que: $F = m \cdot a$, donde “m” es la masa y “a” la aceleración, cabe recordar también que:

- a) $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$, donde “v” es la velocidad, “t” el tiempo y “x” el espacio y
- b) $v = \frac{dx}{dt}$, donde “t” es el tiempo y “x” el espacio.

Ejercicios

1. Un paracaidista, está cayendo con una velocidad de 176 pies/seg = $53,65 \frac{m}{seg.}$, cuando se abre su paracaídas. Si la resistencia del aire es $Wv^2 / 256$ lb, donde W es el peso total del hombre y del paracaídas, hallar su velocidad como una función del tiempo t después de abierto el paracaídas.

Solución:

Fuerza neta sobre el sistema = peso del sistema - resistencia del aire.

$$\frac{W}{g} \cdot \frac{dv}{dt} = W - \frac{Wv^2}{256}$$

Simplificando, separando variables e Integrando entre los límites $t = 0$, $v = 176$ y $t = t$ y $v = v$. Se tiene:

$$\frac{dv}{v^2 - 256} = -\frac{dt}{8} \Rightarrow \int_{176}^v \frac{dv}{v^2 - 256} = -\frac{1}{8} \int_0^t dt \Rightarrow \frac{1}{32} \ln \left| \frac{v-16}{v+16} \right|_{176}^v = -\left| \frac{t}{8} \right|_0^t \Rightarrow$$

$$\ln \cdot \frac{v-16}{v+16} - \ln \cdot \frac{5}{6} = -4t \Rightarrow \frac{v-16}{v+16} = \frac{5}{6} e^{-4t} \Rightarrow v = 16 \frac{6 + 5e^{-4t}}{6 - 5e^{-4t}}$$

Como conclusión podemos observar que el paracaidista alcanza rápidamente una velocidad aproximadamente constante.

2. Una bala que se mueve con una velocidad de 400 m/s, atraviesa una pared de 20 cm de ancho y sale con una velocidad de 100 m/s. Si la fuerza de resistencia de la pared es proporcional al cuadrado de la velocidad, determine en que tiempo atraviesa la bala la pared.

Solución:

V_0 = la velocidad inicial

V_f = la velocidad final

h = ancho de la pared

Segunda ley de Newton: $m \frac{dv}{dt} = -kv^2$ (el signo negativo es para indicar que es fuerza de resistencia)

Separando variables e integrando tenemos:

$$\frac{dv}{v^2} = -\frac{k}{m} dt \Rightarrow \int \frac{dv}{v^2} = -\frac{k}{m} \int dt + C \Rightarrow -\frac{1}{v} = -\frac{k}{m} t + C$$

Con la condición inicial de $v = v_0$ para $t = 0$, encontramos $C = -\frac{1}{v_0}$.

de donde:

$$\frac{1}{v} = k_1 t + \frac{1}{v_0} \dots \text{donde} \dots k_1 = \frac{k}{m}$$

Si T es el tiempo necesario para que atraviese la pared, se tiene:

$$\frac{1}{v_1} = k_1 T + \frac{1}{v_0}$$

Si $x = x(t)$ es el desplazamiento recorrido hasta el instante t , se tiene:

$v = \frac{dx}{dt}$ entonces:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{v_0}{k_1 v_0 t + 1}$$

$$dx = \frac{v_0}{k_1 v_0 t + 1} dt$$

$$\int dx = \int \frac{v_0}{k_1 v_0 t + 1} dt + C_1$$

$$x = \frac{1}{k_1} \ln(k_1 v_0 t + 1) + C_1$$

Con la condición de que para $t = 0$, $x = 0$, encontramos $C_1 = 0$, y con $x = h$ para $t = T$

Reemplazando se obtiene $T = \frac{h}{\ln\left(\frac{v_0}{v_1}\right)} \left(\frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_0}\right)$

Reemplazando los datos del problema: $v_0 = 400$, $v_1 = 100$ y $h = 0.2$, se obtiene que el tiempo que necesita la bala para cruzar la pared es de: $T = 0.00108$ (seg).

3. Determinar el camino recorrido “S” por un cuerpo durante un tiempo “t” si se sabe que su velocidad es directamente proporcional al camino recorrido. Además, se sabe que en 10s el cuerpo recorre 100m y en 15s el cuerpo recorre 200m.

Condición 1 $t=10s$ $S_1=100m$

Condición 2 $t=15s$ $S_2=200m$

$$v \propto S$$

$$v = kS$$

$$\frac{ds}{dt} = kS$$

$$\int \frac{ds}{s} = \int k dt$$

$$\ln S = kt + C$$

$$s = C \cdot e^{kt}$$

Condición 1

$$\ln 100 = k(10) + C$$

Condición 2

$$\ln 200 = k(15) + C$$

Igualar ecuaciones

$$\ln 100 = k(10) + C$$

$$[\ln 200 = k(15) + C] (-1)$$

$$-\ln(100) = k(5)$$

$$k = \frac{-\ln 100}{5}$$

$$k = 0,14$$

$$C = 3,21$$

Solución

$$S = e^{0,14t} \cdot e^{3,21}$$

$$s = 25e^{0,14t}$$

2.6.1.2 Aplicaciones termodinámicas

Las ecuaciones diferenciales pueden ser utilizadas para resolver ejercicios de termodinámica en lo referente a cambios de temperatura, donde la relación a utilizar es la siguiente:

$$Q = mCp.\Delta T$$
$$\frac{\Delta T}{\Delta t} \propto (T - T_0)$$

Ley de enfriamiento de Newton. Establece, que la rapidez de cambio de temperatura de un cuerpo en cualquier tiempo t , es proporcional a la diferencia de las temperaturas del cuerpo y del medio circundante en el tiempo t .

Consideremos:

T = temperatura del cuerpo en el tiempo t

T_m = temperatura del medio circundante

T_0 = temperatura inicial del cuerpo ($t = 0$).

Luego la ecuación que gobierna este fenómeno es:

$$\frac{dT}{dt} = \pm k(T - T_m), \text{ ya sea que aumente o disminuya la temperatura, con}$$

k como factor de proporcionalidad.



1. Según la ley de Newton la velocidad de enfriamiento de un cuerpo en el aire es proporcional a la diferencia entre la temperatura del cuerpo t y la temperatura del aire t_o . Si la temperatura del aire es 20°C y el cuerpo se enfría en 2° min desde 100°C hasta 70°C . Calcular el tiempo que se demora en enfriar el cuerpo hasta 30°C .

Datos

$$T_o = 20^\circ\text{C} \rightarrow \text{Temperatura del aire}$$

$$T = 100^\circ\text{C} \quad t = 0\text{min}$$

$$T_2 = 70^\circ\text{C} \quad t = 20\text{min}$$

$$T = 30^\circ\text{C} \quad t = ?$$

$$\frac{\Delta T}{\Delta t} \propto (T - T_o)$$

$$\frac{\Delta T}{\Delta t} = -K(T - T_o)$$

$$\frac{dT}{dt} = -K(T - T_o)$$

$$\frac{dT}{(T - T_o)} = -K dt$$

$$\int \frac{dT}{(T - T_o)} = -K \int dt$$

$$\ln(T - T_o) = -Kt + C$$

$$t = 0 \text{ min}$$

$$\ln(100 - 20) = -K(0) + C$$

$$C = 4,38$$

$$t = 20 \text{ min}$$

$$\ln(70 - 20) = -K(20) + 4,38$$

$$K = 0,023$$

$$\ln(T - T_0) = -0,023t + 4,38$$

$$t = \frac{\ln(T - T_0) - 4,38}{-0,023} \rightarrow \text{Solución general}$$

$$T = 30^\circ\text{C} \quad t = ?$$

$$t = \frac{\ln(30 - 20) - 4,38}{-0,023}$$

$$t = 90,32 \text{ min}$$

2. Una taza de café cuya temperatura es 190°F se coloca en un cuarto cuya temperatura es 65°F . Dos minutos más tarde la temperatura del café es 175°F . ¿Después de cuánto tiempo la temperatura del café será 150°F ?

Sea $T(t)$ la temperatura (en $^\circ\text{F}$) del café en el instante $t \geq 0$ min.

Observamos que

$$T(0) = 190, T_a = 65 \text{ y } T(2) = 175$$

$$\frac{dT}{dt} = K(T - 65), \text{ con } T(0) = 190 \text{ y además } T(2) = 175$$

Para determinar la temperatura del café en cualquier instante $t \geq 0$ min. Se sabe que:

$$T(t) = T_a + C e^{kt} \Rightarrow T = 65 + C e^{kt}$$

Ahora usamos la segunda condición:

$$\begin{aligned} T(2) = 175 &\Rightarrow T(2) = 65 + 125e^{K \cdot 2} = 175 \Rightarrow e^{2K} = \frac{110}{125} = \frac{22}{25} \\ \Rightarrow K &= \frac{1}{2} \ln\left(\frac{22}{25}\right) \approx -0.0639 \Rightarrow K \approx -0.0639 \end{aligned}$$

Entonces:

$$T(t) = 65 + 125e^{-0.0639t}$$

Es la temperatura (en °F) del café en el minuto $t \geq 0$.

Sea t_1 el instante en que $T(t_1)=150$. Tenemos entonces:

$$\begin{aligned} T(t) = 65 + 125e^{-0.0639t} &= 150 \Rightarrow e^{-0.0639t} = 0.68 \\ \Rightarrow -0.0639t_1 &= \ln 0.68 \Rightarrow \\ \Rightarrow t_1 &= \frac{\ln 0.68}{-0.0639} \approx 6.0354 \text{ min} \end{aligned}$$

Por lo tanto deben transcurrir $t_1 \geq 6$ min, 2 s para que la temperatura del café sea de 150 °F

2.6.2 Aplicaciones químicas (Descomposición de sustancias)

La rapidez de la descomposición de una sustancia reactiva en un tiempo particular P es proporcional a la cantidad de sustancia que existe en ese instante.

$t = \text{tiempo}$

$s = \text{cantidad de sustancia (masa, volumen)}$

$+ \rightarrow \text{composición}$

αS

$$\frac{ds}{dt} = -Ks$$

Ejercicios

1. Una reacción química se desarrolla con la ley de descomposición si la mitad de una sustancia A ha sido convertida al final de 10 s. Encuentre en que tiempo se transformará $\frac{9}{10}$ de la sustancia.

$$\frac{ds}{dt} = -Ks$$

$$\int \frac{ds}{dt} = -K \int s$$

$$\ln s = -Kt + C$$

$$S = Ce^{-Kt}$$

Condiciones

$$1) t = 0s \quad S = S_o$$

$$2) t = 10s \quad S = \frac{S_o}{2}$$

$$t = 0s \quad S = S_o$$

$$\ln S_o = -K(0) + C$$

$$C = \ln S_o$$

$$t = 10s \quad S = \frac{S_o}{2}$$

$$\ln \frac{S_o}{2} = -K(10) + C$$

$$\ln \frac{S_o}{2} = -K(10) + \ln S_o$$

$$\ln \frac{S_o}{2} - \ln S_o = -K(10)$$

$$\ln \frac{1}{2} = -10 K$$

$$K = 0,069$$

$$\ln S = -0,069t + \ln S_o$$

$$\ln \frac{S}{S_o} = -0,069t$$

$$S = e^{-0,069t} S_o \rightarrow \text{Ecuación general}$$

$$S = \frac{1}{10} S_o$$

$$\frac{1}{10} S_o = e^{-0,069t} S_o$$

$$\ln \frac{1}{10} = e^{-0,069t}$$

$$t = 33,37 s$$

2. La conversión de una sustancia B sigue la ley de la descomposición. Si solo una cuarta parte de la sustancia ha sido convertida después de 10s. Encuéntrese cuánto tarda en convertir 9/10 de la sustancia.

$$\frac{ds}{dt} = -ks$$

$$\int \frac{ds}{s} = -k \int dt + c$$

$$\ln(s) = -kt + c$$

$$\rightarrow t = 0 \quad s = s_o$$

$$\ln(s) = -kt + c$$

$$\ln(s_o) = -k(0) + c$$

$$c = \ln(s_o)$$

$$\rightarrow t = 10 \text{seg} \quad s = \frac{3}{4}s_o$$

$$\ln(s) = -kt + c$$

$$\ln\left(\frac{3}{4}s_o\right) = -k(10) + \ln(s_o)$$

$$\ln\left(\frac{\frac{3}{4}s_o}{s_o}\right) = -k(10)$$

$$-0,2877 = -k(10)$$

$$k = 0,0288$$

$$\ln(s) = -0,0288t + \ln(s_o)$$

$$\ln\left(\frac{\frac{1}{10}s_o}{s_o}\right) = -0,0288t$$

$$-2.3026 = -0,0288t$$

$$t = 79,9514 \text{seg}$$

2.6.3 Tasas de crecimiento o decrecimiento poblacional

La rapidez de crecimiento del número de bacterias o de la población es proporcional a la población existente.

$P = \text{población}$

$t = \text{tiempo}$

$$\frac{dP}{dt} \propto P$$
$$\frac{dP}{dt} = -KP$$

Ejercicios

1. Una ciudad, aumenta con una razón proporcional a la población presente. Si la población en 6 años 3 veces la población inicial, ¿en cuánto tiempo crecerá hasta 5 veces la población inicial?

Datos:

$$P_0 = P \quad t = 0$$

$$P = 3P_0 \quad t = 6 \text{ años}$$

$$P = 5P_0 \quad t = ?$$

$$\frac{dP}{dt} = KP$$

$$\int \frac{dP}{P} = K \int dt$$

$$\ln P = Kt + C$$

$$P = Ce^{Kt}$$

$$P_o = P \quad t = 0$$

$$P_o = Ce^{K(0)}$$

$$C = P_o$$

$$P = 3P_o \quad t = 6$$

$$3P_o = P_o e^{K(6)}$$

$$3 = e^{K(6)}$$

$$\ln 3 = \ln(e^{K(6)})$$

$$\ln 3 = 6K$$

$$K = \frac{\ln 3}{6}$$

$$K = 0,1831$$

$$P = P_o e^{0,1831t} \rightarrow \text{Ecuación general}$$

$$P = 5P_o \quad t = ?$$

$$5P_o = P_o e^{0,1831t}$$

$$5 = e^{0,1831t}$$

$$\ln 5 = \ln(e^{0,1831t})$$

$$\ln 5 = 0,1831t$$

$$t = \frac{\ln 5}{0,1831}$$

$$t = 8,7899 \text{ años}$$

2. El crecimiento de una ciudad es proporcional al número de habitantes que hay en un instante cualquiera. Si la población inicial es de 400.000 y al cabo de 3 años es de 450,000 ¿Cuánto tardara en duplicarse? ¿Qué población habrá en 10 años?

$$\frac{dp}{dt} = Kp \rightarrow \int \frac{dp}{p} = \int k dt \rightarrow p(t) = p_o e^{kt}$$

$$p_o = 400000 \text{ HABITANTES}$$

$$t = 3 \text{ años} \rightarrow p = 450.000 \text{ habitantes}$$

$$a) t = ? \rightarrow p = 800000 \text{ habitantes}$$

$$b) = ? \rightarrow t = 10 \text{ años}$$

Calcular K:

$$\frac{450000}{400000} = e^{3k} \rightarrow \frac{9}{8} = e^{3k}$$

$$\ln \frac{9}{8} = \ln e^{3k} \rightarrow \ln(1.125) = 3k$$

$$k = \frac{\ln(1.125)}{3} = 0,03926$$

$$p(t) = 400000 e^{0,03926t}$$

$$a) 800000 = 400000 e^{0,03926t}$$

$$\ln(2) = 0,03926t \rightarrow t = \frac{\ln(2)}{0,03926} = 17.655 \text{ años}$$

$$b) t = 10 \text{ años} \rightarrow p = ?$$

$$p(t) = 400000 e^{0,03926t} = 400000 e^{0,03926(10)}$$

$$p = 400000e^{0,3926} = 592330 \text{ habitantes}$$

Aplicaciones de ecuaciones diferenciales

- Problemas de crecimiento y decrecimiento.
- Problemas de transferencia de calor: enfriamiento.
- Circuitos electrónicos:
 - CIRCUITOS L-R EN SERIE
 - CIRCUITOS R-C EN SERIE
- Problemas de mezclas 3.

2.6.4 Ejercicios varios



1) La población de una pequeña ciudad crece en un instante cualquiera con una rapidez proporcional a la cantidad de habitantes en dicho instante. Si su población inicial de 500 habitantes aumentó 20% en 10 años, ¿cuál será la población dentro de 30 años?

Sea x = número de habitantes en un instante dado.

$$\frac{dx}{dt} = kx$$

$$\frac{dx}{x} = kdt$$

$$\ln x = kt + c$$

$$x = e^{kt} e^c \Rightarrow x = ce^{kt} \quad (1)$$

Las condiciones iniciales son $x(0) = 500$ (2)

$$x(10) = 500 + 500(0.2) = 600 \quad (3)$$

Sustituyendo la condición inicial (2) en (1) se tiene

$$500 = c$$

$$x = 500e^{kt} \quad (4)$$

Para la constante de proporcionalidad sustituir (3) en (4)

$$600 = 500e^{10k}$$

$$\frac{600}{500} = e^{10k}$$

$$\ln \left| \frac{600}{500} \right| = e^{10k}$$

Donde $k=0.01823$

$$x = 500 e^{0.01823t} \quad (5)$$

La cantidad de habitantes se obtiene con (5) reemplazando $t=30$ años

$$x = 500 e^{0.01823(30)}$$

$$x = 864 \text{ habitantes}$$

- 2) Un termómetro indica que la temperatura en una habitación es de 80 °E. Si el termómetro se coloca en el exterior donde la temperatura es de 10 E, después de medio minuto se nota que la temperatura es de 50 9F. ¿Cuál será la temperatura cuando $t = 1$ min? ¿En cuánto tiempo se alcanzarán los 15 9F?**

Partiendo de la Ley de Newton:

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_0) \quad T_0 = 10^\circ F$$

$$\frac{dT}{dt} = k(T - 10)$$

$$\frac{dT}{T - 10} = k dt$$

$$\ln|T - 10| = kt + c$$

$$T = ce^{kt} + 10 \quad (1)$$

$$T(0) = 80 \quad (2)$$

$$80 = c + 10 \Rightarrow c = 70$$

$$T = 70e^{kt} + 10 \quad (3)$$

$$T(0.5) = 50 \quad (4)$$

Sustituyendo (4) en (3)

$$50 = 70e^{(0.5)k} + 10$$

$$\frac{40}{70} = e^{(0.5)k}$$

$$k = -1.1192$$

$$T = 70e^{-1.1192t} + 10 \quad (5)$$

La temperatura 1 en (5)

$$T = 32.85^\circ F$$

$$15 = 70e^{-1.1192t} + 10$$

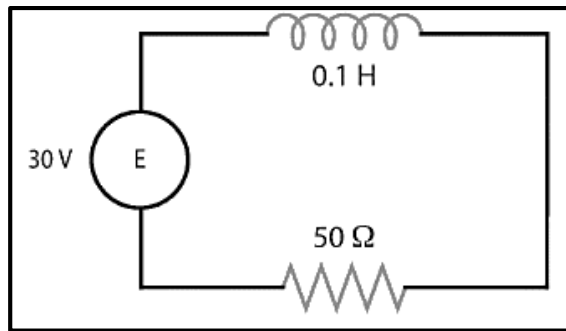
$$\frac{15 - 10}{70} = e^{-1.1192t}$$

$$t = \frac{\ln \left| \frac{5}{70} \right|}{-1.1192}$$

$$t = 2.358 \text{ min}$$

- 3) Se aplica un voltaje de 30V a un circuito en serie, en el cual la inductancia es de 0.1 henrios y la resistencia es 50 Ω . Encontrar la intensidad de corriente $i(t)$ si $i(0) = 0$ y determinar i cuándo $t \rightarrow \infty$ (infinito).

Figura 13
Circuito.



Partiendo de la ecuación que describe el fenómeno:

$$L \frac{di}{dt} + R_i = E(t)$$

$$\frac{di}{dt} + 500i = 300 \quad (1)$$

$$e^{\int 500 dt} = e^{500t}$$

El factor integrante por (1)

$$e^{500t} \frac{di}{dt} + 500ie^{500t} = 300e^{500t} \Rightarrow \frac{d}{dt}(ie^{500t}) = 300e^{500t}$$

$$ie^{500t} = 300 \int e^{500t} dt$$

$$ie^{500t} = \frac{300}{500} ie^{500t} + C$$

Resolviendo para la intensidad de la corriente

$$i = 0.6 + cie^{-500t} \quad i(0) = 0$$
$$c = -0.6$$

Para cualquier tiempo t

$$i = 0.6 - 0.6e^{-500t}$$

$$\text{cuando } t = 0$$

$$i = 0.6 \text{ amperes}$$

- 4) Un tanque contiene 200 litros de un líquido, en el que se disuelven 30 gramos de sal. Luego, en el tanque se introduce una mezcla de agua con sal con una concentración de 1 g de sal por cada litro y con un flujo de 4 litros por cada minuto. La solución, adecuadamente mezclada, se bombea hacia fuera con la misma rapidez de flujo. Encontrar el número de gramos $A(t)$ de sal que hay en un instante cualquiera.

Datos:

$A(t)$ = cantidad de sal en el tanque

$$\frac{dA}{dt} = (\text{rapidez con que entra la sustancia}(R_1)) - (\text{rapidez con que sale la sustancia}(R_2))$$

$$R_1 = \frac{4L}{\text{min}} \left(\frac{1g}{L} \right) = 4 \frac{g}{\text{min}}$$

$$R_2 = \left(\frac{4L}{\text{min}} \right) \left(\frac{A}{200} \frac{g}{L} \right) = \frac{A}{50}$$

$$\frac{dA}{dt} = 4 - \frac{A}{50}$$

$$\frac{dA}{dt} + \frac{A}{50} = 4$$

$$\mu(t) = e^{\int \frac{1}{50} dt} = e^{\frac{1}{50}t}$$

$$e^{\frac{1}{50}t} \frac{dA}{dt} + \frac{e^{\frac{1}{50}t} A}{50} = e^{\frac{1}{50}t} 4$$

$$\frac{d}{dt} \left(e^{\frac{1}{50}t} A \right) = e^{\frac{1}{50}t} 4$$

$$e^{\frac{1}{50}t} A = 4 \int e^{\frac{1}{50}t} dt$$

$$e^{\frac{1}{50}t} A = 200 e^{\frac{1}{50}t} + c$$

$$A = 200 + c e^{-\frac{1}{50}t}$$

$$A(0) = 30$$

$$c = -170$$

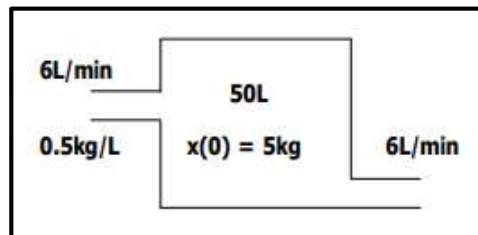
$$A(t) = 200 - 170 e^{-\frac{1}{50}t}$$

- 5) Una solución de salmuera de sal fluye a razón constante de 6 L/min. Hacia el interior de un depósito que inicialmente contiene 50L de solución de salmuera en la cual se disolvieron 5hg de sal. La solución contenida en el deposito se mantiene

bien agitada y fluye hacia el exterior con la misma rapidez. Si la concentración de sal en la salmuera que entra en el depósito es de 0.5kg/L, determinar la cantidad de sal presente en el depósito al cabo de t minutos. ¿Cuándo alcanzará la concentración de sal en el depósito el valor de 0,3kg/L?

Figura 14

Gráfico representativo.



Solución:

$x(t)$ = Kg. de sal dentro del deposito en el instante t

$$\left. \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = + * 0.5 - 6 \frac{x}{50} \\ x(0) = 5 \end{array} \right\}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{75 - 3x}{25}$$

$$\frac{dx}{75 - 3x} = \frac{dt}{25}$$

$$-\frac{1}{3} \ln|75 - 3x| = \frac{t}{25} + c$$

$$\ln|75 - 3x| = -\frac{3t}{25} + C$$

$$75 - 3x = Ce^{-3t/25}$$

$$x(t) = 25 + Ce^{-3t/25}$$

$$x(0) = 5 \Rightarrow 5 = 25 + C \Rightarrow C = -20$$

$$x(t) = 25 - 20e^{-3t/25}$$

Así la concentración es igual a

$$C(t) = \frac{x(t)}{50} = \frac{1}{2} - \frac{2}{5}e^{-3t/25}$$

$$0.3 = 0.5 - 0.4e^{-3t/25}$$

$$-0.2 = -0.4e^{-3t/25}$$

$$0.5 = e^{-3t/25}$$

$$t = \frac{25 \ln 2}{3}$$



1. La corriente sanguínea lleva un medicamento hacia el interior de un órgano a razón de $3\text{cm}^3/\text{seg}$ y sale de él a la misma velocidad. El órgano tiene un volumen líquido de 125cm^3 . Si la concentración del medicamento en la sangre que entra en el órgano es de 0.2 gr/cm^3 ¿Cuál es la concentración del medicamento en el órgano en el instante t si inicialmente no había vestigio alguno del medicamento? ¿Cuándo la concentración del medicamento en el órgano será de $0,1\text{gr/cm}^3$?
2. Inicialmente había 100 miligramos de una sustancia radioactiva. después de 6 horas su masa disminuyó a un 3%. Si en un instante cualquiera la rapidez de desintegración es proporcional a la cantidad de sustancia presente, determinar la cantidad que queda después de 24 horas.
3. Siendo la temperatura del aire de 20°C se enfría una sustancia desde 100°C hasta 60°C en 10 minutos. Halla la temperatura después de 40 minutos.
4. Cuando un objeto absorbe calor del medio que lo rodea sigue la ley de Newton. Una pequeña barra de metal cuya temperatura inicial es de 20°C se deja caer en un recipiente con agua hirviendo. Calcular el tiempo que dicha barra tardará en alcanzar los 90°C si se sabe que su temperatura aumentó 2°C en un segundo ¿cuánto tardará la barra en alcanzar los 98°C ?
5. A un circuito en serie en el que la resistencia es 200 Q y la capacitancia es de $1 \times 10^7\text{ F}$ se le aplica un voltaje de 100 V .

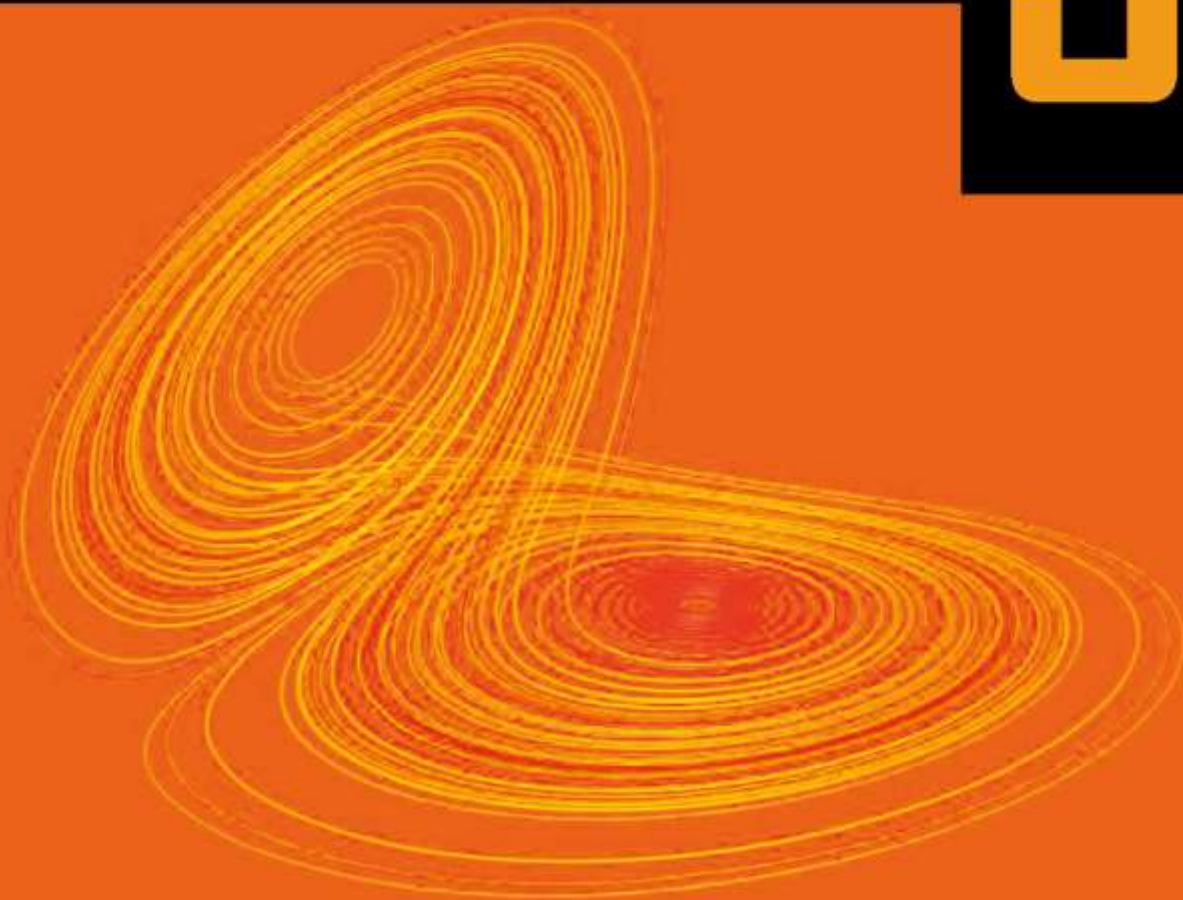
Calcular la carga $q(1)$ en el capacitor si $q(0) = 0$ y obtener la corriente.

6. Una alberca cuyo volumen es de 10.000L contiene agua con el 0.1% de cloro. Empezando en $t=0$ desde la ciudad se bombea agua que 0.001% de cloro, hacia el interior de la alberca a razón de 5L/min, y el agua de la alberca fluye hacia el exterior a la misma velocidad ¿Cuál es el porcentaje de cloro en la alberca al cabo de una hora? ¿Cuándo tendrá el agua de la alberca 0.002% de cloro?

CAPÍTULO 3

Ecuaciones diferenciales de
orden superior

3



ECUACIONES DIFERENCIALES DE ORDEN SUPERIOR

3.1. Definición

Las ecuaciones diferenciales de orden superior son aquellas cuyo orden es superior a 1.

Estas ecuaciones son de la forma:

$$F(x, y, y', y'', y''', \dots, y^n)$$

3.2. Independencia lineal de las funciones

Consideremos un sistema finito de n funciones: $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ definidas en algún intervalo (a, b) , diremos que estas funciones son linealmente independientes si existen $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ escalares tal que:

$$\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + \dots + \alpha_n f_n(x) = 0 \text{ entonces } \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$$

Si alguno de los $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ es diferente de cero, entonces diremos que $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ son funciones linealmente dependientes.

Procedimiento

- Dada la función $y = f(x)$ se deriva tantas veces como sea necesario hasta obtener un solo término en la función.
- Al derivar cada término va acompañado de un α_n constante

- Si $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_n = 0$ significa que los términos son independientes
- Si $\alpha_1 \neq \alpha_2 = \alpha_n = 0$ esto quiere decir que no exista independencia lineal.

Ejercicios

Determinar si en las siguientes funciones existe o no independencia lineal.

1. $3x, 2x^2, 5x$

$$3x, 2x^2, 5x$$

$$3x\alpha_1 + 2x^2\alpha_2 + 5x\alpha_3 = 0$$

$$1^{era} derivada \quad 3\alpha_1 + 4x\alpha_2 + 5\alpha_3 = 0$$

$$2^{da} derivada \quad 0 + 4\alpha_2 + 0 = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 = -5\alpha_3 \end{array} \right\} no_existe_independencia_lineal$$

2. $2e^z, ze^z, z^2e^z$

$$2e^z, ze^z, z^2e^z$$

$$2e^z\alpha_1 + ze^z\alpha_2 + 5z^2e^z\alpha_3 = 0$$

$$1^{era} derivada \quad (2e^z\alpha_1 + (e^z + ze^z)\alpha_2 + (10ze^z + t^2e^t) = 0)/e^z$$

$$\alpha_1 + (1 + z)\alpha_2 + (10z + z^2)\alpha_3 = 0$$

$$2^{da} derivada \quad 0 + \alpha_2 + 10\alpha_3 + 2z\alpha_3 = 0$$

$$3^{ra} derivada \quad 0 + 0 + 0 + 2\alpha_3 = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 = 0 \end{array} \right\} \text{Existe_independencia_lineal}$$

3. $x, x^2, 4x - 3x^2$

$$x, x^2, 4x - 3x^2$$

$$x\alpha_1 + x^2\alpha_2 + (4x\alpha_3 - 3x^2\alpha_3) = 0$$

$$1^{era} derivada ______ \alpha_1 + 2x\alpha_2 + (4\alpha_3 - 6x\alpha_3) = 0$$

$$2^{da} derivada __ 0 + 2\alpha_2 + (0 - 6\alpha_3) = 0$$

$$2\alpha_2 - 6\alpha_3 = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_3 = \frac{1}{2}\alpha_2 \\ \alpha_1 = 2x\alpha_2 + (2\alpha_2 - 3x\alpha_2) \\ \alpha_1 = -x\alpha_2 + 2\alpha_2 \end{array} \right\} no_existe_idependencia_lineal$$

4. e^{-5y}, e^{5y}

$$e^{-5y}, e^{5y}$$

$$e^{-5y}\alpha_1 + e^{5y}\alpha_2$$

$$1^{era} derivada_(-5e^{-5y}\alpha_1 + 5e^{5y}\alpha_2 = 0)/5e^{5y}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \end{array} \right\} \textit{Existe_independencia_lineal}$$

5. $0, x, e^x$

$0, x, e^x$

$$0\alpha_1 + x\alpha_2 + e^x\alpha_3 = 0$$

$$1^{era}derivada_0 + \alpha_2 + e^x \alpha_3 = 0$$

$$2^{da} derivada_0 + 0 + e^x \alpha_3 = 0$$

$$\begin{cases} \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \end{cases} \text{ existe_independencia_lineal}$$

3.2.1. Método del Wronskiano

Este método es empleado comprobar si existe o no independencia lineal.

Procedimiento

1. Se forma una matriz cuadrática con las derivadas respectivas.
2. Se deriva las veces necesarias para que la matriz se haga cuadrática.
3. Se calcula su determinante, en el cual: si el determinante es igual a 0, significa que no existe independencia lineal; si el determinante es diferente de 0, quiere decir que sí existe independencia lineal.

Ejercicios

Determinar si en las siguientes funciones existe o no independencia lineal.

1. $5, 3x$

$5, 3x$

$= 5\omega_1 + 3x\omega_2$

$\begin{pmatrix} 5 & 3x \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

$= 15 - 0 = 15$

Existe Independencia lineal

2. $2x+1, x$

$2x + 1, x$

$= (2x + 1)\infty_1 + x\infty_2$

$\begin{pmatrix} 2x + 1 & x \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$= 2x + 1 - 2x = 1$

Existe Independencia lineal

3. $\cos 2x, -3$

$\cos 2x, -3$

$= \cos 2x\infty_1 - 3\infty_2$

$\begin{pmatrix} \cos 2x & -3 \\ -2\sin 2x & 0 \end{pmatrix}$

$= 0 + 6\sin 2x = 6\sin 2x$

Existe Independencia lineal

4. $e^{-3x}\sin 2x, e^{-3x}\cos 2x$

$= e^{-3x}\sin 2x\infty_1 + e^{-3x}\cos 2x\infty_2$

$\begin{pmatrix} e^{-3x}\sin 2x & e^{-3x}\cos 2x \\ -3e^{-3x}\sin 2x + 2e^{-3x}\cos 2x & -3e^{-3x}\cos 2x - 2e^{-3x}\sin 2x \end{pmatrix}$

$= e^{-3x}\sin 2x(-3e^{-3x}\sin 2x + 2e^{-3x}\cos 2x)$

$- e^{-3x}\cos 2x(-3e^{-3x}\cos 2x + 2e^{-3x}\sin 2x)$

$= -3e^{-6x}\sin^2 2x + 2e^{-6x}\cos 2x\sin 2x + 3e^{-6x}\cos^2 2x$

$- 2e^{-6x}\sin 2x\cos 2x$

$= 3e^{-6x}\cos^2 2x - 3e^{-6x}\sin^2 2x = 3e^{-6x}(\cos^2 2x - \sin^2 2x)$

Existe independencia lineal

5. $x, \quad 2x, \quad x^2$

$$\begin{bmatrix} x & 2x & x^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & 2x \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & 2x \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$4x + 0 + 0 - 0 - 0 - 4x = 0$$

No existe independencia lineal

3.3. Comprobación de soluciones

Procedimiento

1. Se deriva la solución tantas veces como indique el orden superior de la ecuación diferencial.
2. Se reemplaza las derivadas de la solución en la ecuación diferencial original.
3. Si se obtiene una igualdad o cero, eso quiere decir que es correcta la solución de la ecuación, de caso contrario no lo es.
4. *Tener en cuenta que dicha comprobación sólo es válida para soluciones generales.*

Ejercicios

1. $y = (\arcsin x)^2 + C_1(\arcsin x) + C_2(1 - x^2)y'' - x(y') = 2$

$$y' = 2(\arcsin x)(1 - x^2)^{-1/2} + C_1(1 - x^2)^{-1/2}$$

$$\begin{aligned} y'' &= 2(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} + 2(\arcsin x) \left(-\frac{1}{2}\right)(-2x)(1 - x^2)^{-\frac{3}{2}} \\ &\quad + C_1 \left(-\frac{1}{2}\right)(1 - x^2)^{-\frac{3}{2}}(-2x) \end{aligned}$$

$$y'' = 2(1 - x^2)^{-1} + 2x(\arcsin x)(1 - x^2)^{-\frac{3}{2}} + C_1 x(1 - x^2)^{-\frac{3}{2}}$$

Comprobación:

$$(1 - x^2)y'' - x(y') = 2$$

$$(1 - x^2)[2(1 - x^2)^{-1} + 2x(\arcsin x)(1 - x^2)^{-\frac{3}{2}} + C_1 x(1 - x^2)^{-\frac{3}{2}}] \\ - x[2(\arcsin x)(1 - x^2)^{-1/2} + C_1(1 - x^2)^{-1/2}] = 2$$

$$\left(2 + 2x(\arcsin x)(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} + C_1 x(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}\right) - 2x(\arcsin x)(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \\ - C_1 x(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} = 2$$

$$2 = 2$$

$$2. \quad y = C_1 x^{-\frac{1}{2}} + C_2 x^{-1} + \frac{1}{15} x^2 - \frac{1}{6} x^2 x^2 y'' + 5xy' + y = x^2 - x$$

$$y' = -\frac{1}{2} \left(C_1 x^{-\frac{3}{2}} \right) - C_2 x^{-2} + \frac{2}{15} x - \frac{1}{6}$$

$$y'' = \frac{3}{4} \left(C_1 x^{-\frac{5}{2}} \right) + 2C_2 x^{-3} + \frac{2}{15}$$

Comprobación

$$2x^2 y'' + 5xy' + y = x^2 - x$$

$$\begin{aligned}
& 2x^2 \left[\frac{3}{4} \left(C_1 x^{-\frac{5}{2}} \right) + 2C_2 x^{-3} + \frac{2}{15} \right] \\
& + 5x \left[-\frac{1}{2} \left(C_1 x^{-\frac{3}{2}} \right) - C_2 x^{-2} + \frac{2}{15} x - \frac{1}{6} \right] + [C_1 x^{-\frac{1}{2}} \\
& + C_2 x^{-1} + \frac{1}{15} x^2 - \frac{1}{6} x] = x^2 - x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{3}{2} \left(C_1 x^{-\frac{1}{2}} \right) + 4C_2 x^{-1} + \frac{4}{15} x^2 \right] \\
& + \left[-\frac{5}{2} \left(C_1 x^{-\frac{1}{2}} \right) - 5C_2 x^{-1} + \frac{2}{3} x^2 - \frac{5}{6} x \right] \\
& + \left[C_1 x^{-\frac{1}{2}} + C_2 x^{-1} + \frac{1}{15} x^2 - \frac{1}{6} x \right] = x^2 - x
\end{aligned}$$

$$\frac{4}{15} x^2 + \frac{2}{3} x^2 - \frac{5}{6} x + \frac{1}{15} x^2 - \frac{1}{6} x = x^2 - x$$

$$x^2 - x = x^2 - x$$

3. $y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x} + x^2 e^{2x} + x - 2y'' - 4y' + 4y = 2e^{2x} + 4x - 12$

$$y' = 2C_1 e^{2x} + C_2 e^{2x} + 2C_2 x e^{2x} + 2x e^{2x} + 2x^2 e^{2x} + 1$$

$$\begin{aligned}
y'' &= 4C_1 e^{2x} + 2C_2 e^{2x} + 2C_2 e^{2x} + 4C_2 x e^{2x} + 2e^{2x} + 4x e^{2x} + 4x e^{2x} \\
&+ 4x^2 e^{2x}
\end{aligned}$$

$$y'' = 4C_1 e^{2x} + 4C_2 e^{2x} + 4C_2 x e^{2x} + 2e^{2x} + 8x e^{2x} + 4x^2 e^{2x}$$

Comprobación

$$y'' - 4y' + 4y = 2e^{2x} + 4x - 12$$

$$\begin{aligned}
& (4C_1e^{2x} + 4C_2e^{2x} + 4C_2xe^{2x} + 2e^{2x} + 8xe^{2x} + 4x^2e^{2x}) \\
& - 4(2C_1e^{2x} + C_2e^{2x} + 2C_2xe^{2x} + 2xe^{2x} + 2x^2e^{2x} + 1) \\
& + 4(C_1e^{2x} + C_2xe^{2x} + x^2e^{2x} + x - 2) = 2e^{2x} + 4x - 12
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (4C_1e^{2x} + 4C_2e^{2x} + 4C_2xe^{2x} + 2e^{2x} + 8xe^{2x} + 4x^2e^{2x}) \\
& + (-8C_1e^{2x} - 4C_2e^{2x} - 8C_2xe^{2x} - 8xe^{2x} - 8x^2e^{2x} - 4) \\
& + (4C_1e^{2x} + 4C_2xe^{2x} + 4x^2e^{2x} + 4x - 8) \\
& = 2e^{2x} + 4x - 12
\end{aligned}$$

$$2e^{2x} + 4x - 12 = 2e^{2x} + 4x - 12$$

4. $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x \sin x + (\cos x) \ln (\cos x) y'' + y = \sec x$

$$\begin{aligned}
y' &= -C_1 \sin x + C_2 \cos x + \sin x + x \cos x \\
&- (\sin x) \ln (\cos x) + \frac{\cos x}{\cos x} (-\sin x)
\end{aligned}$$

$$y' = -C_1 \sin x + C_2 \cos x + x \cos x - (\sin x) \ln (\cos x)$$

$$\begin{aligned}
y'' &= -C_1 \cos x - C_2 \sin x + \cos x - x \sin x - (\cos x) \ln (\cos x) \\
&+ \frac{(\sin x)^2}{\cos x}
\end{aligned}$$

Comprobación:

$$y'' + y = \sec x$$

$$\begin{aligned}
& \left[-C_1 \cos x - C_2 \sin x + \cos x - x \sin x - (\cos x) \ln (\cos x) + \frac{(\sin x)^2}{\cos x} \right] \\
& + [C_1 \cos x + C_2 \sin x + x \sin x + (\cos x) \ln (\cos x)] \\
& = \sec x
\end{aligned}$$

$$\cos x + \frac{(\sin x)^2}{\cos x} = \sec x$$

$$\frac{(\cos x)^2 + (\sin x)^2}{\cos x} = \sec x$$

$$\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\cos x}$$

$$5. \quad y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{5x} + 6e^x y'' - 7y' + 10y = 24e^x$$

$$y' = 2C_1 e^{2x} + 5C_2 e^{5x} + 6e^x$$

$$y'' = 4C_1 e^{2x} + 25C_2 e^{5x} + 6e^x$$

Comprobación

$$y'' - 7y' + 10y = 24e^x$$

$$(4C_1 e^{2x} + 25C_2 e^{5x} + 6e^x) - 7(2C_1 e^{2x} + 5C_2 e^{5x} + 6e^x) + 10(C_1 e^{2x} + C_2 e^{5x} + 6e^x) = 24e^x$$

$$(4C_1 e^{2x} + 25C_2 e^{5x} + 6e^x) + (-14C_1 e^{2x} - 35C_2 e^{5x} - 42e^x) + (10C_1 e^{2x} + 10C_2 e^{5x} + 60e^x) = 24e^x$$

$$24e^x = 24e^x$$

3.4. Casos de análisis en ecuaciones diferenciales de orden superior

En las ecuaciones diferenciales de orden superior consideraremos tres casos:

CASO 1

Las ecuaciones diferenciales de la forma: $f(x) = \frac{d^n y}{dx^n}$

Se debe derivar la ecuación tantas veces como sea necesario hasta encontrar el valor de la variable y .

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = \int f(x) + C$$
$$\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} = \int (f(x) + C) + C_1$$

Ejemplo

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = xe^x$$
$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \int xe^x dx + C$$
$$\frac{d^2 y}{dx^2} = xe^x + C$$
$$\frac{dy}{dx} = \int (xe^x + C) dx$$
$$\frac{dy}{dx} = xe^x - e^x - e^x + Cx + C_1$$
$$dy = \int (xe^x - 2e^x + Cx + C_1) dx + C_2$$

$$y = xe^x - e^x - 2Cx + \frac{Cx^2}{2} + C_1x + C_2$$

CASO 2

Las ecuaciones diferenciales que tienen ausencia de (x) y se resuelven de la siguiente forma:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = g(y)$$

$$\frac{dy}{dy} \cdot \frac{d'y}{dx} = g(y)$$

Donde

$$\frac{dy}{dx} = y'$$

$$y' \frac{d'y}{dy} = g(y)$$

Resolvemos como variables separables

$$\int y' dy' = \int g(y) dy + C$$

$$\frac{y'^2}{2} \int g(y) dy + C$$

$$y' = \sqrt{2 \int g(y) dy + C}$$

Resolvemos como homogénea, lineal, etc.

Ejemplo

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -a^2y$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \int -a^2y$$

$$\frac{ydy'}{dy} = \int -a^2y$$

$$\int y' dy' = - \int a^2 y dy + C$$

$$\frac{y'^2}{2} = a^2 \frac{y^2}{2} + \frac{C^2}{2}$$

$$y' = \sqrt{-a^2y^2 + C^2}$$

$$\int \frac{dy}{\sqrt{-a^2y^2 + C^2}} = \int dx + C_1$$

$$\frac{1}{a} \int \frac{dy}{\sqrt{\frac{C^2}{a^2} - y^2}} = dx + C_1$$

$$\frac{1}{a} \arcsen \frac{ay}{C} = x + C_1$$

$$y = \frac{C}{a} \sen(ax + a C_1)$$

CASO 3

Las ecuaciones diferenciales de la siguiente forma:

$$F(x, y^k, y^{k+1}, \dots, y^n) = 0$$

Se caracteriza porque la ecuación carece de y , y se puede rebajar el orden de la ecuación haciendo un cambio de variable, la derivada de orden inferior por una nueva variable.

$$y^k = z$$

Obteniéndose la ecuación:

$$F(x, z, z', z'' \dots \dots z^{n-k}) = 0$$

Cuando la ecuación diferencial es homogénea para la función y sus derivadas, la sustitución $y' = yz$, reduce el orden de una ecuación diferencial una unidad.

Ejemplo

$$xy'' + y' = 0$$

$$z = y'$$

$$y'' = z'$$

$$xz' + z = 0$$

$$z' + \frac{z}{x} = 0$$

$$\frac{dz}{dx} + \frac{z}{x} = 0$$

$$\int \frac{dz}{z} + \int \frac{dx}{x} = 0$$

$$\ln z + \ln x = \ln C$$

$$z = \frac{C}{x}$$

$$y' = \frac{C}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{C}{x}$$

$$\int dy = \int \frac{C}{x} dx$$

$$y = C \ln x + C_1$$

3.4.1. Ejercicios varios

1. $\frac{d^2x}{dt^2} = t^2$; **CASO 1**

$$\frac{dx}{dt} \equiv \int t^2 dt + c$$

$$\frac{dx}{dt} \equiv \frac{t^3}{3} + c$$

$$\int dx = \left(\int \frac{t^3}{3} + c \right) dt + c1$$

$$x = \frac{t^4}{12} + ct$$

2. $y'' = -\frac{1}{2y^3}$; **CASO 2**

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{2y^3}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'}{dx} \frac{dy}{dy} = y' \frac{dy'}{dy}$$

$$y' \frac{dy'}{dy} = -\frac{1}{2y^3}$$

$$\int y' dy = -\frac{1}{2} \int \frac{dy}{2y^3} + c$$

$$\frac{(y')^2}{2} = \frac{1}{4y^2} + c$$

$$y' = \sqrt{\frac{1}{2y^2} + 2c}$$

$$y' = \frac{\sqrt{1 + 4y^2c}}{\sqrt{2y}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{1 + 4y^2c}}{\sqrt{2y}}$$

$$\int dx + c1 = \int \frac{\sqrt{2y}dy}{\sqrt{1 + 4y^2c}}$$

$$u = 1 + 4y^2$$

$$du = 8cydy$$

$$\int dx + c1 = \frac{\sqrt{2}}{8c} \int u^{-1/2} du$$

$$x + c1 = \frac{\sqrt{2}}{8c} \sqrt{1 + 4cy^2}$$

3. $xy'' + y' = 0$; CASO 3

$$y' = z$$

$$y'' = z'$$

$$xz' + z = 0$$

$$(xz' + z = 0) \frac{1}{x}$$

$$z' + \frac{z}{x} = 0$$

$$z' = -\frac{z}{x}$$

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{z}{x}$$

$$-\int \frac{dx}{x} + c = \int \frac{dz}{z}$$

$$\ln z = -\ln x + c$$

$$\ln z + \ln x = c$$

$$zx = c$$

$$z = \frac{c}{x}$$

$$y' = \frac{c}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{c}{x}$$

$$\int dy = c \int \frac{dx}{x}$$

$$y = c \ln x + c1$$

4. $\frac{d^3y}{dx^3} = x \operatorname{sen} x$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$; **CASO 1**

$$\frac{d^2y}{dx^2} \equiv \int (x \operatorname{sen} x) dx + c$$

$$u = x$$

$$du = dx$$

$$dv = \sin x$$

$$v = -\cos x$$

$$\int (x \sin x) dx = -\cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x$$

$$\frac{dy}{dx} = \int (-x \cos x + \sin x + c) dx + c1$$

$$\int -x \cos x dx =$$

$$u = x$$

$$du = dx$$

$$dv = \cos x$$

$$v = \sin x$$

$$\int -x \cos x dx = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x$$

$$\frac{dy}{dx} = -x \sin x - \cos x - \cos x + cx + c1$$

$$y'(0) = 0$$

$$0 = 0 - 1 - 1 + 0 + c1$$

$$c1 = 2$$

$$\frac{dy}{dx} = -x \sin x - \cos x - \cos x + cx + 2$$

$$\int dy \equiv \int (-x \sin x - \cos x - \cos x + cx + 2) dx + c2$$

$$y = x \cos x - \sin x - 2 \sin x + \frac{cx^2}{2} + 2x$$

$$y(0) = 0$$

$$0 = 0 - 0 - 0 + 0 + 0 + c2$$

$$c2 = 0$$

$$y = x \cos x - 3 \sin x + \frac{cx^2}{2} + 2x$$

$$5. \quad y'' = e^{2y} ; y(0) = 0 , \quad y'(0) = 1 , \quad ; \text{CASO 2}$$

$$\int y' dy = \int (e^{2y}) dy + c$$

$$\frac{(y')^2}{2} = \frac{1}{2} e^{2y} + c$$

$$y'(0) = 1$$

$$\frac{(1)^2}{2} = \frac{1}{2} e^{2y} + c$$

$$c = \frac{1}{2} (1 - e^{2y})$$

$$\frac{(y')^2}{2} = \frac{1}{2} e^{2y} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{2y}$$

$$\frac{(y')^2}{2} = \frac{1}{2}$$

$$y' = \sqrt{1}$$

$$y' = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = 1$$

$$\int dy = \int dx + c1$$

$$y = x + c1$$

$$y(0) = 0$$

$$0 = 0 + c1$$

$$c1 = 0$$

$$y = x$$

$$6. \quad xy'' = \sqrt{1 + (y')^2}; y'(0) = 1; y = 1, x = e^2 \quad ; \text{CASO 3}$$

$$y' = z$$

$$y'' = z$$

$$xz' = \sqrt{1 + z^2}$$

$$x \frac{dz}{dx} = \sqrt{1 + z^2}$$

$$\int \frac{dz}{\sqrt{1 + z^2}} = \int \frac{dx}{x} + c$$

$$\ln(z + \sqrt{1 + z^2}) = \ln x + \ln c$$

$$z + \sqrt{1 + z^2} = xc$$

$$y' + \sqrt{1 + (y')^2} = xc$$

$$y'(0) = 1$$

$$0 + \sqrt{1 + 0} = c$$

$$c = 1$$

$$y' + \sqrt{1 + (y')^2} = x$$

$$\sqrt{1 + (y')^2} = x - y'$$

$$1 + (y')^2 = (x - y')^2$$

$$1 + (y')^2 = x^2 - 2xy' + (y')^2$$

$$1 = x^2 - 2xy'$$

$$1 - x^2 = -2xy'$$

$$y' = -\frac{1 - x^2}{2x}$$

$$y' = \frac{x^2 - 1}{2x}$$

$$y' = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2x}$$

$$\int dy = \int \left(\frac{1}{2}x\right) dx - \int \left(\frac{1}{2x}\right) dx + c1$$

$$y = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2} \ln x + c1$$

$$y = 1$$

$$x = e^2$$

$$1 = \frac{e^4}{4} - \frac{1}{2} \ln e^2 + c1$$

$$c1 = 2 - \frac{e^4}{4}$$

$$y = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2} \ln x + 2 - \frac{e^4}{4}$$

7. $xyy'' - x(y')^2 - yy' = 0$; CASO COMBINADO

$$y' = yz$$

$$y'' = y(z^2 + z')$$

$$xy^2(z^2 + z') - xy^2z^2 - y^2z = 0$$

$$xy^2z^2 + xy^2z' - xy^2z^2 - y^2z = 0$$

$$xy^2z' - y^2z = 0$$

$$(xy^2z' - y^2z = 0) \frac{1}{y^2}$$

$$xz' - z = 0$$

$$xz' = z$$

$$x \frac{dz}{dx} = z$$

$$\int \frac{dz}{z} - \int \frac{dx}{x} = 0$$

$$\ln z - \ln x = \ln c$$

$$\frac{z}{x} = c$$

$$z = xc$$

$$\frac{y'}{y} = xc$$

$$\frac{dy}{ydx} = xc$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int (xc) dx + c_2$$

$$\ln y = \frac{cx^2}{2} + c2$$

$$y = e^{\frac{cx^2}{2}} k$$

$$8. \quad x^2 y y'' = (y - x y')^2 \quad ; \quad \text{CASO COMBINADO}$$

$$y' = yz$$

$$y'' = y(z^2 + z')$$

$$x^2 y^2 (z^2 + z') = (y - x y z)^2$$

$$x^2 y^2 z^2 + x^2 y^2 z' = y^2 - 2x y^2 z + x^2 y^2 z^2$$

$$x^2 y^2 z' = y^2 - 2x y^2 z$$

$$(x^2 y^2 z' = y^2 - 2x y^2 z) \frac{1}{x^2 y^2}$$

$$z' = \frac{1}{x^2} - \frac{2z}{x}$$

$$z' + \frac{2z}{x} = \frac{1}{x^2}$$

$$y' = yz$$

$$y'' = y(z^2 + z')$$

$$x^2 y^2 (z^2 + z') = (y - x y z)^2$$

$$x^2 y^2 z^2 + x^2 y^2 z' = y^2 - 2x y^2 z + x^2 y^2 z^2$$

$$x^2 y^2 z' = y^2 - 2x y^2 z$$

$$(x^2 y^2 z' = y^2 - 2x y^2 z) \frac{1}{x^2 y^2}$$

$$z' = \frac{1}{x^2} - \frac{2z}{x}$$

$$z' + \frac{2z}{x} = \frac{1}{x^2}$$

FÓRMULA – DIRECTA

$$z = e^{-\int p(x)dx} \left[\int q(x) \cdot e^{\int p(x)dx} dx + c \right]$$

$$p(x) = \frac{2}{x}$$

$$q(x) = \frac{1}{x^2}$$

$$z = e^{-\int \frac{2}{x} dx} \left[\int \frac{1}{x^2} \cdot e^{\int \frac{2}{x} dx} dx + c \right]$$

$$z = e^{-2 \ln x} \left[\int \frac{1}{x^2} \cdot e^{2 \ln x} dx + c \right]$$

$$z = x^{-2} \left[\int \frac{1}{x^2} x^2 dx + c \right]$$

$$z = x^{-2} \left[\int dx + c \right]$$

$$z = x^{-2}(x + c)$$

$$z = x^{-1} + cx^{-2}$$

$$\frac{y'}{y} = x^{-1} + cx^{-2}$$

$$\frac{dy}{ydx} = x^{-1} + cx^{-2}$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int (x^{-1} + cx^{-2}) dx + c1$$

$$\ln y = \ln x + \frac{c}{x} + c1$$

$$y = xke^{c/x}$$

3.5. Ecuaciones diferenciales lineales de orden n

Este tipo de ecuaciones tienen la siguiente forma:

$$a_0(x)y + a_1(x)y' + a_2(x)y'' \dots a_n(x)y^n = f(x)$$

Sí:

$f(x) = 0$ es homogénea

$f(x) \neq 0$ es Heterogénea

$a_n(x)$ son independiente de y

Su solución tiene la forma:

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + C_3y_3 \dots \dots + C_ny_n$$

3.5.1. Ecuaciones diferenciales lineales homogéneas de coeficientes constantes

$$a_n \frac{d^ny}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + a_{n-2} \frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} \dots \dots a_1 \frac{dy}{dx} + a_0y = 0$$

$a_1, a_2, a_3 \dots a_n$ son constantes

Procedimiento

- Convertir la ecuación en un polinomio $y^n = p^n$
- Resolver el polinomio o ecuación.
- Análisis de raíces.

Tabla 2

Forma de las soluciones generales Yg.

Soluciones Generales y _g			
Primer caso	raíces reales y diferentes	$r_1 \neq r_2 \neq r_3$	$Yg = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} + \dots + c_n e^{r_n x}$
Segundo caso	raíces reales e iguales	$r_1 = r_2 = r_3$	$Yg = c_1 e^{rx} + c_2 x e^{rx} + \dots + c_n x^{n-1} e^{rx}$
Tercer caso	raíces imaginarias	$r_1 = \alpha_1 + i\beta_1$ $r_2 = \alpha_1 - i\beta_1$	$Yg = c_1 e^{\alpha_1 x} \cdot \cos \beta_1 x + c_2 e^{\alpha_2 x} \cdot \sen \beta_1 x$

Ejemplos

Primer caso

$$y'' - y = 0$$

$$p^2 - 1 = 0$$

$$p_1 = 1 \quad ; \quad p_2 = -1$$

$$Yg = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$$

Segundo caso

$$y'' - 4y' + 4y = 0$$

$$p^2 - 4p + 4 = 0$$

$$(p - 2)^2 = 0$$

$$p_1 = p_2 = 2$$

$$Yg = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}$$

Tercer caso

$$y'' + y = 0$$

$$p^2 + 1 = 0$$

$$p_1 = i \quad ; \quad p_2 = -i$$

$$Yg = c_1 e^{0x} \cdot \cos x + c_2 e^{0x} \cdot \sin x$$

$$Yg = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

Ejercicios

1. $y'' + y' + y = 0$

(a) Resolvemos como $g(x) = 0$ Reemplazando $y^n = p^n$

$$y'' + y' + y = 0$$

$$p^2 + p + 1 = 0$$

(b) Encontramos los valores de p de la ecuación.

Fórmula general

$$\frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - (4)(1)(1)}}{2(1)} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$$

Donde los valores de p son:

$$p_1 = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \quad p_2 = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$$

- (c) Expresamos la solución final Y_g según sea el resultado de p
(*raíces reales diferentes, raíces reales iguales, raíces complejas*) en este caso raíces complejas

$$Y_g = C_1 e^{-\frac{1}{2}x} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2 e^{-\frac{1}{2}x} \sen \frac{\sqrt{3}}{2}x$$

2. $y^{iv} - y = 0$

- (a) Resolvemos como $g(x) = 0$ Reemplazando $y^n = P^n$

$$y^{iv} - y = 0$$

$$p^4 - 1 = 0$$

- (b) Encontramos los valores de p de la ecuación.

$$(p^2 - 1)(p^2 + 1) = 0$$

$$(p - 1)(p + 1)(p^2 + 1) = 0$$

$$p_1 = -1 \quad p_2 = 1 \quad p_3 = i \quad p_4 = -i$$

- (c) Expresamos la solución final Y_g según sea el resultado de p
(*raíces reales diferentes, raíces reales iguales, raíces complejas*) en este caso raíces complejas y raíces reales diferentes.

$$Y_g = C_1 e^x + C_1 e^{-x} + C_3 e^{(0)x} \cos(x) + C_4 \cos(x)$$

$$Y_g = C_1 e^x + C_1 e^{-x} + C_3 \cos(x) + C_4 \sen(x)$$

3. $16 \frac{d^4 y}{dx^4} + 24 \frac{d^2 y}{dx^2} + 9y = 0$

- (a) Resolvemos como $g(x) = 0$ Reemplazando $y^n = P^n$

$$16 \frac{d^4 y}{dx^4} + 24 \frac{d^2 y}{dx^2} + 9y = 0$$

$$16p^4 + 24p^2 + 9 = 0$$

(b) Encontramos los valores de p de la ecuación.

$$16p^4 + 24p^2 + 9 = 0$$

$$(4p^2 + 3)(4p^2 + 3) = 0$$

$$p_1 = p_3 = \frac{\sqrt{3}i}{2} \quad p_2 = p_4 = -\frac{\sqrt{3}i}{2}$$

(c) Expresamos la solución final Y_g según sea el resultado de p (raíces reales diferentes, raíces reales iguales, raíces complejas) en este caso raíces complejas

(d)

$$Y_g = C_1 e^{(0)x} \cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) + C_2 e^{(0)x} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) + C_3 e^{(0)x} x \cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) + C_4 e^{(0)x} x \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)$$

$$Y_g = C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) + C_2 \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) + C_3 x \cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) + C_4 x \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)$$

$$4. \quad y^V - 3y^{IV} + 3y''' - 3y'' + 2y' = 0$$

(a) Resolvemos como $g(x) = 0$ Reemplazando $y^n = p^n$

$$p^V - 3p^{IV} + 3p''' - 3p'' + 2p' = 0$$

$$p^5 - 3p^4 + 3p^3 - 3p^2 + 2p = 0$$

(b) Encontramos los valores de p de la ecuación.

$$p^5 - 3p^4 + 3p^3 - 3p^2 + 2p = 0$$

1	-3	3	-3	2	0		
	0	0	0	0	0		0
1	-3	3	-3	2	0		
	1	-2	1	-2	-		1
1	-2	1	-2	0			
	2	0	2				2
1	0	1	0				

$$(p + 0)(p - 1)/(p - 2)(p^2 + 1)$$

$$p_1 = 0 \quad p_2 = 1 \quad p_3 = 2 \quad p_4 = i \quad p_5 = -i$$

$$Y_g = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{2x} + C_4 \cos x + C_5 \sin x$$

3.5.2. Ecuaciones diferenciales lineales heterogéneas de coeficientes constantes

$$a_n y^n + a_{n-1} y^{n-1} + \dots + a_1 y' + a_0 y = Q(x)$$

Solución

$$Y = Y_g + Y_p$$

Y_p = Una solución de ecuaciones diferenciales lineales homogéneas

Y_g = Solución que depende de la forma $Q(x)$

Para encontrar la forma de la solución Y_p se pueden guiar en la Tabla 3:

Tabla 3*Forma de las soluciones particulares Y_p .*

$Q(x)$	Raíces de la ecuación característica	Forma de y_p
$P_m(x)$	a) Si $r=0$ no es raíz de la ecuación característica.	$P_n(x)$
	b) Si $r=0$ es raíz de la ecuación característica.	$x^s P_n(x)$
$e^{\alpha x} P_m(x)$	a) Si $r=\alpha$ no es raíz de la ecuación característica.	$e^{\alpha x} P_n(x)$
	b) Si $r=\alpha$ es raíz de la ecuación característica.	$x^s e^{\alpha x} P_n(x)$
$P_m(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sen\beta x$	a) Si $r=\pm\beta i$ no es raíz de la ecuación característica.	$P_n(x)\cos\beta x + Q_n(x)\sen\beta x$
	b) Si $r=\pm\beta i$ es raíz de la ecuación característica.	$x^s [P_n(x)\cos\beta x + Q_n(x)\sen\beta x]$
$e^{\alpha x} [P_m(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sen\beta x]$	a) Si $r=\alpha\pm\beta i$ no es raíz de la ecuación característica.	$e^{\alpha x} [P_n(x)\cos\beta x + Q_n(x)\sen\beta x]$
	b) Si $r=\alpha\pm\beta i$ es raíz de la ecuación característica.	$e^{\alpha x} x^s [P_n(x)\cos\beta x + Q_n(x)\sen\beta x]$

Ejemplo

$$y'' + 3y' = 3$$

Resolver como E.D.L Homogénea

$$p^2 + 3p = 0$$

$$p(p + 3) = 0$$

$$p_1 = 0 \quad ; \quad p_2 = -3$$

$$Yg = C_1 + C_2 e^{-3x}$$

Resolver como E.D.L. Heterogénea

$$y'' + 3y' = 3$$

$$Q(x) = 3$$

$$Yp = x.A$$

Derivamos:

$$Y'p = A$$

$$Y''p = 0$$

Reemplazamos en la ecuación original

$$y'' + 3y' = 3$$

$$0 + 3A = 3$$

$$A = 1$$

$$Yp = x(1)$$

$$Yp = x$$

Solución final

$$Y = Yg + Yp$$

$$Y = C_1 + C_2 e^{-3x} + x$$

Ejercicios

1. $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 3x$

(a) Resolvemos como $g(x) = 0$ (E.D.L. Homogénea). Reemplazando $y^n = P^n$.

$$y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$$

$$P^3 - 6P^2 + 11P - 6 = 0$$

1	-6	11	-6	1
1	1	-5	6	
1	-5	6	0	2
1	2	-6		
1	-3	0		

$$P_1 = 1; P_2 = 2; P_3 = 3$$

(b) Determinamos la solución general de la E.D.L.

$$y_g = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + C_3 e^{3x}$$

(c) Hallamos la forma y_p según $g(x)$, derivamos de acuerdo al orden de la ecuación diferencial original.

$$g(x) = 3x$$

$$y_p = Ax + B$$

$$y'_p = A$$

$$y''_p = y'''_p = 0$$

(d) Sustituimos dichas derivadas en la ecuación diferencial original y hallamos el valor de las constantes.

$$y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 3x$$

$$0 - 6(0) + 11A - 6Ax - 6B = 3x$$

$$11A - 6B - 6Ax = 3x$$

$$x: \quad -6A = 3 \qquad A = -1/2$$

$$x^0: \quad 11A - 6B = 0 \qquad B = -11/12$$

(e) Determinamos la solución particular de la E.D.L.

$$y_p = -\frac{x}{2} - \frac{11}{12}$$

(f) Finalmente sumamos las soluciones parciales.

$$y = y_g + y_p$$

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + C_3 e^{3x} - \frac{x}{2} - \frac{11}{12}$$

$$2. \mathbf{y'' - 3y' + 4y = -16x^2 + 24x - 8 + 2e^{2x} + 2xe^x - e^x}$$

(a) Resolvemos como $g(x) = 0$ (E.D.L. Homogénea). Reemplazando

$$y^n = P^n.$$

$$y'' - 3y' + 4y = 0$$

$$P^2 - 3P + 4 = 0$$

$$P = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(4)}}{2}$$

$$= \frac{3 \pm \sqrt{-7}}{2}$$

$$P = \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{7}}{2}i$$

(b) Determinamos la solución general de la E.D.L.

$$y_g = C_1 e^{\frac{3}{2}x} \cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}x\right) + C_1 e^{\frac{3}{2}x} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{7}}{2}x\right)$$

(c) Hallamos la forma y_p según $g(x)$ y derivamos de acuerdo al orden de la ecuación diferencial original.

$$g(x) = -16x^2 + 24x - 8 + 2e^{2x} + 2xe^x - e^x$$

$$y_p = Ax^2 + Bx + C + De^{2x} + Exe^x + Fe^x$$

$$y'_p = 2Ax + B + 2De^{2x} + Ee^x + Exe^x + Fe^x$$

$$y''_p = 2A + 4De^{2x} + 2Ee^x + Exe^x + Fe^x$$

(d) Sustituimos dichas derivadas en la ecuación diferencial original y hallamos el valor de las constantes.

$$y'' - 3y' + 4y = -16x^2 + 24x - 8 + 2e^{2x} + 2xe^x - e^x$$

$$\begin{aligned} 2A + 4De^{2x} + 2Ee^x + Exe^x + Fe^x - 6Ax - 3B - 6De^{2x} - 3Ee^x \\ - 3Exe^x - 3Fe^x + 4Ax^2 + 4Bx + 4C + 4De^{2x} \\ + 4Exe^x + 4Fe^x \\ = -16x^2 + 24x - 8 + 2e^{2x} + 2xe^x - e^x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2A + 2De^{2x} - Ee^x + 2Exe^x + 2Fe^x - 6Ax - 3B + 4Ax^2 + 4Bx \\ + 4C + 4Fe^x \\ = -16x^2 + 24x - 8 + 2e^{2x} + 2xe^x - e^x \end{aligned}$$

$$x^2: \quad 4A = -16$$

$$A = -4$$

$$\begin{array}{ll}
 x: & -6A + 4B = 24 & B = 0 \\
 x^0: & 2A - 3B + 4C = -8 & C = 0 \\
 e^{2x}: & 2D = 2 & D = 1 \\
 xe^x: & 2E = 2 & E = 1 \\
 e^x: & -E + 2F = -1 & F = 0
 \end{array}$$

(e) Determinamos la solución particular de la E.D.L.

$$y_p = -4x^2 + e^{2x} + xe^x$$

(f) Finalmente sumamos las soluciones parciales:

$$y = y_g + y_p$$

$$y = C_1 e^{\frac{\sqrt{7}}{2}x} \cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}x\right) + C_1 e^{\frac{\sqrt{7}}{2}x} \sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2}x\right) - 4x^2 + e^{2x} + xe^x$$

$$3. \frac{d^2x}{dy^2} - 7 \frac{dx}{dy} + 10x = 24e^y$$

(a) Resolvemos como $g(y) = 0$ (E.D.L. Homogénea). Reemplazando

$$x^n = P^n.$$

$$x'' - 7x' + 10x = 0$$

$$P^2 - 7P + 10 = 0$$

$$(P - 5)(P - 2) = 0$$

$$P_1 = 5; P_2 = 2$$

(b) Determinamos la solución general de la E.D.L.

$$x_g = C_1 e^{5y} + C_2 e^{2y}$$

(c) Hallamos la forma x_p según $g(y)$ y derivamos de acuerdo al orden de la ecuación diferencial original.

$$g(y) = 24e^y$$

$$x_p = Ae^y$$

$$x'_p = x''_p = Ae^y$$

(d) Sustituimos dichas derivadas en la ecuación diferencial original y hallamos el valor de las constantes.

$$x'' - 7x' + 10x = 24e^y$$

$$Ae^y - 7Ae^y + 10Ae^y = 24e^y$$

$$A - 7A + 10A = 24$$

$$4A = 24 \qquad A = 6$$

(e) Determinamos la solución particular de la E.D.L.

$$x_p = 6e^y$$

(f) Finalmente sumamos las soluciones parciales.

$$x = x_g + x_p$$

$$x = C_1e^{5y} + C_2e^{2y} + 6e^y$$

$$4. \frac{d^2z}{dw^2} - 4 \frac{dz}{dw} + 4z = 2e^{2w} + 4w - 12$$

(a) Resolvemos como $g(w) = 0$ (E.D.L. Homogénea). Reemplazando $z^n = P^n$.

$$\frac{d^2z}{dw^2} - 4 \frac{dz}{dw} + 4z = 0$$

$$P^2 - 4P + 4 = 0$$

$$(P - 2)^2 = 0$$

$$P_{1,2} = 2$$

(b) Determinamos la solución general de la E.D.L.

$$z_g = C_1 e^{2w} + C_2 w e^{2w}$$

(c) Hallamos la forma z_p según $g(w)$ y derivamos de acuerdo al orden de la ecuación diferencial original.

$$g(w) = 2e^{2w} + 4w - 12$$

$$z_p = Aw^2 e^{2w} + Bw + C$$

$$z'_p = 2Awe^{2w} + 2Aw^2 e^{2w} + B$$

$$z''_p = 2Ae^{2w} + 4Awe^{2w} + 4Awe^{2w} + 4Aw^2 e^{2w}$$

(d) Sustituimos dichas derivadas en la ecuación diferencial original.

$$\frac{d^2 z}{dw^2} - 4 \frac{dz}{dw} + 4z = 2e^{2w} + 4w - 12$$

$$2Ae^{2w} + 4Awe^{2w} + 4Awe^{2w} + 4Aw^2 e^{2w} - 8Awe^{2w} - 8Aw^2 e^{2w} - 4B + 4Aw^2 e^{2w} + 4Bw + 4C = 2e^{2w} + 4w - 12$$

$$2Ae^{2w} - 4B + 4Bw + 4C = 2e^{2w} + 4w - 12$$

$$e^{2w}: \quad 2A = 2 \qquad A = 1$$

$$w: \quad 4B = 4 \qquad B = 1$$

$$w^0: \quad -4B + 4C = -12 \qquad C = -2$$

(e) Determinamos la solución particular de la E.D.L.

$$z_p = w^2 e^{2w} + w - 2$$

(f) Finalmente sumamos las soluciones parciales.

$$z = z_g + z_p$$

$$z = C_1 e^{2w} + C_2 w e^{2w} + w^2 e^{2w} + w - 2$$

$$5.- \frac{d^2 z}{dw^2} + z = 3\text{sen}(2w) + w\cos(w)$$

(a) Resolvemos como $g(w) = 0$ (E.D.L. Homogénea). Reemplazando $z^n = P^n$.

$$\frac{d^2 z}{dw^2} + z = 0$$

$$P^2 + 1 = 0$$

$$P = \pm i$$

(b) Determinamos la solución general de la E.D.L.

$$z_g = C_1 \cos(w) + C_2 \text{sen}(w)$$

(c) Hallamos la forma z_p según $g(w)$ y derivamos de acuerdo al orden de la ecuación diferencial original.

$$g(w) = 3\text{sen}(2w) + w\cos(w)$$

$$z_p = A\text{sen}(2w) + B\cos(2w) + w(Cw + D)\text{sen}(w) + w(Ew + F)\cos(w)$$

$$\begin{aligned} z'_p &= 2A\cos(2w) - 2B\text{sen}(2w) + (2Cw + D)\text{sen}(w) \\ &\quad + (Cw^2 + D)\cos(w) + (2Ew + F)\cos(w) \\ &\quad - (Ew^2 + F)\text{sen}(w) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z''_p &= -4A\text{sen}(2w) - 4B\cos(2w) + 2C\text{sen}(w) \\ &\quad + (2Cw + D)\cos(w) + 2Cw\cos(w) \\ &\quad - (Cw^2 + D)\text{sen}(w) \\ &\quad + 2E\cos(w) - (2Ew + F)\text{sen}(w) \\ &\quad - (Ew^2 + F)\cos(w) - 2Ew\text{sen}(w) \end{aligned}$$

(d) Sustituimos dichas derivadas en la ecuación diferencial original y hallamos el valor de las constantes.

$$\frac{d^2 z}{dw^2} + z = 3\text{sen}(2w) + w\cos(w)$$

$$\begin{aligned} & -4A\text{sen}(2w) - 4B\cos(2w) + 2C\text{sen}(w) + (2Cw + D)\cos(w) + 2Cw\cos(w) \\ & \quad - (Cw^2 + D)\text{sen}(w) + 2E\cos(w) - (2Ew + F)\text{sen}(w) \\ & \quad - (Ew^2 + F)\cos(w) - 2Ew\text{sen}(w) + A\text{sen}(2w) + B\cos(2w) \\ & \quad + w(Cw + D)\text{sen}(w) + w(Ew + F)\cos(w) \\ & = 3\text{sen}(2w) + w\cos(w) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -4A\text{sen}(2w) - 4B\cos(2w) + 2C\text{sen}(w) + (2Cw + D)\cos(w) + 2Cw\cos(w) \\ & \quad - (Cw^2 + D)\text{sen}(w) + 2E\cos(w) - (2Ew + F)\text{sen}(w) \\ & \quad - (Ew^2 + F)\cos(w) - 2Ew\text{sen}(w) + A\text{sen}(2w) + B\cos(2w) \\ & \quad + w(Cw + D)\text{sen}(w) + w(Ew + F)\cos(w) \\ & = 3\text{sen}(2w) + w\cos(w) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -3A\text{sen}(2w) - 3B\cos(2w) + 4Cw\cos(w) + 2D\cos(w) + 2C\text{sen}(w) + \\ & \quad + 2E\cos(w) - 4Ew\text{sen}(w) - 2F\text{sen}(w) \\ & = 3\text{sen}(2w) + w\cos(w) \end{aligned}$$

$$\text{sen}(2w): \quad -3A = 3 \qquad A = -1$$

$$\cos(2w): \quad -3B = 0 \qquad B = 0$$

$$w\cos(w): \quad 4C = 1 \qquad C = 1/4$$

$$\cos(w): \quad 2D + 2E = 0 \qquad D = 0$$

$$\text{sen}(w): \quad 2C - 2F = 0 \qquad F = 1/4$$

$$w\text{sen}(w): \quad -4E = 0 \qquad E = 0$$

(e) Determinamos la solución particular de la E.D.L.

$$z_p = -\text{sen}(2w) + \frac{1}{4}w^2\text{sen}(w) + \frac{1}{4}w\cos(w)$$

(f) Finalmente sumamos las soluciones parciales.

$$z = z_g + z_p$$

$$z = C_1 \cos(w) + C_2 \text{sen}(w) + -\text{sen}(2w) + \frac{1}{4}w^2\text{sen}(w) + \frac{1}{4}w\cos(w)$$

3.5.3. Método de variación de parámetro

$$a_n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y = f(x)$$

Procedimiento

1. Resolver como Ecuación Diferencial Lineal Homogénea.

$$y_g = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 + \dots + C_n y_n$$

2. Suponer que y_p tiene la misma forma y_g pero las constantes son remplazadas por: $C_n = C'_n$

$$y_p = C'_1 y_1 + C'_2 y_2 + C'_3 y_3 + \dots + C'_n y_n$$

3. Completar un sistema de ecuaciones para que pueda ser resuelta, siendo cada ecuación la derivada de y_p .

$$\left\{ \begin{array}{l} y_p = 0 \\ y'_p = 0 \\ y''_p = 0 \\ y'''_p = 0 \end{array} \right.$$

$$y_p^n = f(x)$$

Resolver el sistema de ecuaciones obteniendo: $C'_1 + C'_2 + C'_3 + \dots + C'_n$

4. Integrar los resultados:

$$C_1 = \int C'_1$$

$$C_n = \int C'_n$$

5. Reemplazar $C_1, C_2, C_3, \dots, C_n$ en y_p .

Ejemplo

$$y'' + 3y' = 3$$

Resolvemos como Ecuación Diferencial Lineal Homogénea.

$$p^2 + 3p = 0$$

$$p(p + 3) = 0$$

$$p_1 = 0 \qquad p_2 = -3$$

$$y_g = C_1 + C_2 e^{-3x}$$

$$y_p = y_g$$

$$y_p = C'_1 + C'_2 e^{-3x}$$

Formamos un sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} C'_1 + C'_2 e^{-3x} = 0 \\ 0 - 3C'_2 e^{-3x} = 3 \end{cases}$$

Obtenemos C'_1 y C'_2

$$C'_2 = -e^{3x}$$

$$C'_1 = C'_2 e^{-3x} \rightarrow C'_1 = e^{3x} \cdot e^{-3x} \rightarrow C'_1 = 1$$

Encontramos C_1 y C_2

$$C_1 = \int dx \rightarrow C_1 = x$$

$$C_2 = \int -e^{3x} dx \rightarrow C_2 = -\frac{1}{3}e^{3x}$$

Remplazamos en y_p

$$y_p = C'_1 + C'_2 e^{-3x}$$

$$y_p = x - \frac{1}{3}$$

$$y = y_g + y_p$$

$$y = C_1 + C_2 e^{-3x} + x - \frac{1}{3}$$

Ejercicios

1. $y'' + 2y' - 3y = 1 + xe^x$

$$p + 2p - 3 = 0$$

$$(p + 3)(p - 1) = 0$$

$$p_1 = -3 \quad ; \quad p_2 = 1$$

$$Y_g = C_1 e^{-3x} + C_3 e^x$$

$$Y_p = C'_1 e^{-3x} + C'_2 e^x$$

$$C'_1 e^{-3x} + C'_2 e^x = 0 \quad (1)$$

$$C_1 = -C'_2 e^{-4x} \quad (3)$$

$$-3C_1'e^{-3x} + C_2'e^x = 1 + xe^x \quad (2)$$

(3) *en* (2)

$$3C_2'e^x + C_2'e^x = 1 + xe^x$$

$$3C_2' + C_2' = e^{-x} + x$$

$$C_2' = \frac{e^{-x} + x}{4} \quad ; \quad C_1' = -\frac{e^{3x} + xe^{4x}}{4}$$

$$C_1 = \int \left(\frac{-e^{3x}}{4} - \frac{xe^{4x}}{4} \right) dx =$$

$$u = x \quad dv = \frac{e^{4x}}{4} dx$$

$$du = dx \quad v = \frac{e^{4x}}{16}$$

$$\frac{xe^{4x}}{16} - \int \frac{e^{4x}}{16} dx$$

$$\frac{xe^{4x}}{16} - \frac{e^{4x}}{64}$$

$$C_1 = -\frac{e^{3x}}{12} - \frac{xe^{4x}}{16} + \frac{e^{4x}}{64}$$

$$C_2 = \int \frac{e^{-x} + x}{4} dx = \frac{-e^{-x}}{4} + \frac{x^2}{8}$$

$$Yp = \left(-\frac{e^{3x}}{12} - \frac{xe^{4x}}{16} + \frac{e^{4x}}{64} \right) e^{-3x} + \left(\frac{-e^{-x}}{4} + \frac{x^2}{8} \right) e^x$$

$$Yp = -\frac{1}{3} - \frac{e^x}{8} \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{8} - x^2 \right)$$

$$Y = Yg + Yp$$

$$Y = C_1e^{-3x} + C_3e^x - \frac{1}{3} - \frac{e^x}{8} \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{8} - x^2 \right)$$

$$2. \quad 3y'' - 6y' + 6y = e^x \sec x$$

$$3p^2 - 6p + 6 = 0$$

$$p = \frac{6 \pm \sqrt{6^2 - 4(3)(6)}}{2(3)}$$

$$p_{1,2} = 1 \pm i$$

$$Yg = C_1 e^x \cos x + C_2 e^x \sin x$$

$$Yp = C'_1 e^x \cos x + C'_2 e^x \sin x$$

$$C'_1 e^x \cos x + C'_2 e^x \sin x = 0 \quad (1) \quad C'_1 = -C'_2 \frac{\sin x}{\cos x} \quad (3)$$

$$C'_1 e^x \cos x - C'_1 e^x \sin x + C'_2 e^x \sin x + C'_2 e^x \cos x = e^x \sec x \quad (2)$$

$$(3) \text{ en } (2)$$

$$-C'_2 \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \cos x + C'_2 \frac{\sin x}{\cos x} \sin x + C'_2 \sin x + C'_2 \cos x = \sec x$$

$$C'_2 \left(\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x} \right) = \frac{1}{\cos x}$$

$$C'_2 = 1 \quad ; \quad C'_2 = -\tan x$$

$$C_1 = -\int \tan x \, dx = -\ln(\sec x)$$

$$C_2 = \int dx = x$$

$$Yp = -e^x \ln(\sec x) + x e^x \sin x$$

$$Y = Yg + Yp$$

$$Y = C_1 e^x \cos x + C_2 e^x \sin x - e^x \ln(\sec x) + x e^x \sin x$$

$$3. \quad 4y'' - 4y' + y = e^{\frac{x}{2}} \cdot \sqrt{1-x^2}$$

$$4p^2 - 4p + 1 = 0$$

$$p = \frac{4 \pm \sqrt{4 - 4(4)(1)}}{2(4)}$$

$$p = \frac{1}{2}$$

$$Yg = C_1 e^{\frac{x}{2}}$$

$$Yp = C'_1 e^{\frac{x}{2}}$$

$$C'_1 e^{\frac{x}{2}} = e^{\frac{x}{2}} \sqrt{1 - x^2}$$

$$C_1 = \int \sqrt{1 - x^2} dx = \frac{1}{2} x \sqrt{1 - x^2} + \frac{1}{2} \arcsin x$$

$$Yp = e^{\frac{x}{2}} \left(\frac{1}{2} x \sqrt{1 - x^2} + \frac{1}{2} \arcsin x \right)$$

$$Y = Yg + Yp$$

$$Y = e^{\frac{x}{2}} \left(\frac{1}{2} x \sqrt{1 - x^2} + \frac{1}{2} \arcsin x \right) + C_1 e^{\frac{x}{2}}$$

$$4. \quad y^{iv} - y'' = 2xe^x$$

$$p^4 + p^2 = 0$$

$$p^2(p^2 - 1) = 0$$

$$p_{1,2} = 0 \quad ; \quad p_3 = 1 \quad ; \quad p_4 = -1$$

$$Yg = C_1 + C_2 x + C_3 e^x + C_4 e^{-x}$$

$$Yp = C'_1 + C'_2 x + C'_3 e^x + C'_4 e^{-x}$$

$$C'_1 + C'_2 x + C'_3 e^x + C'_4 e^{-x} = 0 \quad (1)$$

$$C'_2 + C'_3 e^x - C'_4 e^{-x} = 0 \quad (2)$$

$$C'_3 e^x + C'_4 e^{-x} = 0 \quad (3) \quad C'_3 = -C'_4 e^{-3x} \quad (5)$$

$$C'_3 e^x + C'_4 e^{-4x} = 2xe^x \quad (4)$$

(5)en (4)

$$-C_4'e^{-x} - C_4'e^{-x} = 2xe^x$$

$$C_4' = -xe^{2x} \quad ; \quad C_3' = x$$

$$C_2' + xe^x + xe^x = 0$$

$$C_2' = -2xe^x$$

$$C_1' - 2x^2e^x + xe^x - xe^x = 0$$

$$C_1' = 2x^2e^x$$

$$C_1 = 2 \int x^2 e^x dx =$$

$$u = x^2 \quad dv = e^x dx \quad ; \quad u = x \quad dv = e^x dx$$

$$du = 2x dx \quad v = e^x \quad ; \quad du = dx \quad v = e^x$$

$$x^2 e^x - 2 \int x e^x dx = \quad ; \quad x e^x - \int e^x dx$$

$$x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x \quad ; \quad x e^x - e^x$$

$$C_1 = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x$$

$$C_2 = -2 \int x e^x dx = -2x e^x + 2e^x$$

$$C_3 = \int x dx = \frac{x^2}{2}$$

$$C_4 = - \int x e^{2x} dx =$$

$$u = x \quad ; \quad dv = e^{2x} dx$$

$$du = dx \quad ; \quad v = \frac{e^{2x}}{2}$$

$$x e^{2x} - \frac{1}{2} \int e^{2x} dx$$

$$\frac{xe^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4}$$

$$C_4 = -\frac{xe^{2x}}{2} + \frac{e^{2x}}{4}$$

$$Yp = (x^2e^x - 2xe^x + 2e^x) + (-2xe^x + 2e^x)x + \left(\frac{x^2}{2}\right)e^x$$

$$-e^x \left(-\frac{xe^{2x}}{2} + \frac{e^{2x}}{4} \right)$$

$$Yp = \frac{-x^2e^x}{2} - \frac{xe^x}{2} + \frac{7e^x}{2}$$

$$Yp = e^x \left(-\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{7}{4} \right)$$

$$Y = Yg + Yp$$

$$Y = e^x \left(-\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{7}{4} \right) + C_1 + C_2x + C_3e^x + C_4e^{-x}$$

$$5. \quad y'' + 5y' + 6y = (x + 1)^2$$

$$p^2 + 5p + 6 = 0$$

$$(p + 3)(p + 2) = 0$$

$$p_1 = -3 \quad ; \quad p_2 = -2$$

$$Yg = C_1e^{-3x} + C_2e^{-2x}$$

$$Yp = C'_1e^{-3x} + C'_2e^{-2x}$$

$$C'_1e^{-3x} + C'_2e^{-2x} = 0 \quad (1) \quad ; \quad C'_1 = -C'_2e^x \quad (3)$$

$$-3C'_1e^{-3x} - 2C'_2e^{-2x} = (x + 1)^2 \quad (2)$$

$$3C'_2e^{-2x} - 2C'_2e^{-2x} = (x + 1)^2$$

$$C'_2 = e^{2x}(x + 1)^2 \quad ; \quad C'_1 = -e^{3x}(x + 1)^2$$

$$C_1 = - \int e^{3x}(x+1)^2 dx =$$

$$u = (x+1)^2 \quad dv = e^{3x} dx \quad ; \quad u = (x+1) \quad dv = e^{3x} dx$$

$$du = 2(x+1)dx \quad v = \frac{e^{3x}}{3} \quad ; \quad du = dx \quad v = \frac{e^{3x}}{3}$$

$$\frac{e^{3x}(x+1)^2}{3} - \frac{2}{3} \int e^{3x}(x+1) dx \quad ; \quad \frac{e^{3x}(x+1)}{3} - \frac{1}{3} \int e^{3x} dx$$

$$\frac{e^{3x}(x+1)^2}{3} - \frac{2}{3} \left(\frac{e^{3x}(x+1)}{3} - \frac{e^{3x}}{9} \right) \quad ; \quad \frac{e^{3x}(x+1)}{3} - \frac{e^{3x}}{9}$$

$$C_1 = - \frac{e^{3x}(x+1)^2}{3} + \frac{2}{9} e^{3x}(x+1) - \frac{2}{27} e^{3x}$$

$$C_2 = \int e^{2x}(x+1)^2 dx =$$

$$u = (x+1)^2 \quad dv = e^{2x} dx \quad ; \quad u = (x+1) \quad dv = e^{2x} dx$$

$$du = 2(x+1)dx \quad v = \frac{e^{2x}}{2} \quad ; \quad du = dx \quad v = \frac{e^{2x}}{2}$$

$$\frac{e^{2x}(x+1)^2}{2} - \int e^{2x}(x+1) dx$$

$$\frac{e^{2x}(x+1)}{2} - \frac{1}{2} \int e^{2x} dx$$

$$\frac{e^{2x}(x+1)^2}{2} - \left[\frac{e^{2x}(x+1)}{2} - \frac{e^{2x}}{4} \right]$$

$$C_2 = - \frac{e^{2x}(x+1)^2}{2} + \frac{e^{2x}(x+1)}{2} - \frac{e^{2x}}{4}$$

$$Yp = \frac{(x+1)^2}{6} - \frac{5(x+1)}{8} - \frac{35}{108}$$

$$Y = Yg + Yp$$

$$Y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-2x} + \frac{(x+1)^2}{6} - \frac{5(x+1)}{8} - \frac{35}{108}$$

3.5.4. Ecuaciones diferenciales de coeficientes variables

$$a_n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y = f(x)$$

$a_n + a_{n-1} \dots$ Son constantes.

Procedimiento

1. Dada la ecuación a y los valores de:

$$y_1 = f(x), y_2 = f(x)_1, y_3 = f(x)_2, \dots, y_n = f(x)_n$$

$$\text{Para } y_g = C_1 y + C_2 y_2 + C_3 y_3 + \dots + C_n y_n$$

Sustituir: $y = f(x) \dots$

2. $y_p = y_g$ solo que sustituimos $a_n = u_n$

$$y_p = U_1 y + U_2 y_2 + U_3 y_3 + \dots + U_n y_n$$

3. Formar un sistema de ecuaciones que pueda resolverse.

$$\left\{ \begin{array}{l} y_p = 0 \\ y'_p = 0 \\ y''_p = 0 \\ y^n_p = f(x) \end{array} \right.$$

4. Resolver el sistema y obtener $U'_1 + U'_2 + U'_3 + \dots + U'_n$
5. Encontrar $U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n$
6. Reemplazar $U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n$ en y_p

Ejemplo

$$(\cos(x) - \sin(x))y'' + 2\sin(x)y' - (\sin(x) + \cos(x))y = e^x(\cos(x) - \sin(x))^2, y_1 = e^x, y_2 = \sin(x)$$

$$y'' + \frac{2\sin(x)}{\cos(x) - \sin(x)}y' - \frac{\sin(x) + \cos(x)}{\cos(x) - \sin(x)}y' = e^x(\cos(x) - \sin(x))$$

$$y_g = C_1y + C_2y_2$$

$$y_g = C_1e^x + C_2\sin(x)$$

Encontramos y_p

$$y_p = U_1e^x + U_2\sin(x)$$

Formamos un sistema de ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{l} U'_1e^x + U'_2\sin(x) = 0 \\ U'_1e^x + U'_2\cos(x) = e^x(\cos(x) - \sin(x)) \end{array} \right.$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones

$$U'_1e^x + U'_2\sin(x) = 0 \rightarrow U'_1 = -\frac{U'_2\sin(x)}{e^x}$$

Remplazamos U'_1 en la segunda ecuación

$$-\frac{U'_2\sin(x)}{e^x}e^x + U'_2\cos(x) = e^x(\cos(x) - \sin(x))$$

$$U'_2(-\sin(x) + \cos(x)) = e^x(\cos(x) - \sin(x))$$

$$U'_2 = \frac{e^x(\cos(x) - \sin(x))}{(-\sin(x) + \cos(x))} \rightarrow U'_2 = e^x$$

Remplazamos U'_2 en la primera ecuación

$$U'_1 = -\frac{U'_2 \sin(x)}{e^x} \rightarrow U'_1 = -\frac{e^x \sin(x)}{e^x} \rightarrow U'_1 = -\sin(x)$$

Integramos para hallar U_1 y U_2

$$U_1 = -\int \sin(x) dx \rightarrow U_1 = \cos(x)$$

$$U_2 = \int e^x dx \rightarrow U_2 = e^x$$

Remplazamos en y_p los valores de U_1 y U_2

$$y_p = U_1 e^x + U_2 \sin(x)$$

$$y_p = e^x \cos(x) + e^x \sin(x)$$

$$y = y_g + y_p$$

$$y = U_1 e^x + U_2 \sin(x) + e^x \cos(x) + e^x \sin(x)$$

3.5.5. Ejercicios varios

Ejercicio 1

$$q'' + q' = 3 + e^{-x} \quad \text{con} \begin{cases} q(0) = 1 \\ q'(0) = 0 \end{cases}$$

Solución:

$$\text{Soluc. Gral: } \rightarrow q = C_1 + C_2 e^{-p} + 3p - p e^{-p}$$

$$\text{Soluc. partic: } \rightarrow q' = -C_2 e^{-p} + 3 - e^{-p} + p e^{-p}$$

$$\begin{cases} 1 = C_1 + C_2 \\ 0 = -C_2 + 2 \end{cases} \quad (C_1, C_2) = (-1, 2)$$

$$q = -1 + 2e^{-p} + 3p - p e^{-p}$$

Ejercicio 2

$$v''' + 3v'' - 4v = 0$$

Solución:

$$m^3 + 3m^2 - 4 = 0 \rightarrow \pm 1, \pm 2, \pm 4$$

$$(m - 1)(m^2 + 4m + 4) = 0$$

$$(m - 1)(m + 2)(m + 2) = 0$$

$$m - 1 = 0 ; m + 2 = 0 ; m + 2 = 0$$

$$m_1 = 1 ; m_2 = -2 = m_3$$

$$v = C_1 e^u + C_2 e^{-2u} + C_3 = u e^{-2u}$$

Ejercicio 3

$$v'' = uv' - v = 0 ; v = e^{mu}$$

Solución:

$$m^2 - 4m - 1 = 0$$

$$(m^2 - 4m + 4) = 1 + 4$$

$$(m - 2)^2 = 5$$

$$m - 2 = \pm \sqrt{5}$$

$$m = 2 \pm \sqrt{5}$$

$$m_1 = 2 + \sqrt{5} , m_2 = 2 - \sqrt{5}$$

$$v_1 = e^{(w+\sqrt{5})u} , v_2 = e^{(w-\sqrt{5})u}$$

$$v = C_1 C_1 + C_2 V_2$$

$$v = C_1 e^{(w+\sqrt{5})} + C_2 e^{(w-\sqrt{5})}$$

Ejercicio 4

$$v^4 - 2v'' + v = 0$$

Solución:

$$\begin{aligned}
 m^4 - 2m^2 + 1 &= 0 \\
 (m^2 - 1)^2 &= 0 & v_1 = e^u, v_2 = ue^u, v_3 = e^{-u}, v_4 = ue^{-u} \\
 [(m-1)(m+1)]^2 &= 0 & v = C_1e^u + C_2ue^u + C_3e^{-u} + C_4ue^{-u} \\
 (m-1)^2(m+1)^2 &= 0 \\
 (m-1)^2 = 0, (m+1)^2 &= 0 \\
 m = 1, m = -1
 \end{aligned}$$

Ejercicio 5

$$\frac{d^4v}{du^4} + \frac{2d^2v}{du^2} + v = 0$$

Solución:

$$\begin{aligned}
 m^4 + 2m^2 + 1 &= 0 \\
 m^2 + 1 &= 0 \\
 (m^2 + 1)^2 &= 0 \\
 m^2 + 1 = 0 & \quad m^2 + 1 = 0 \\
 m^2 = -1 & \quad m^2 = -1 \\
 m = \pm\sqrt{-1} & \quad m = \pm\sqrt{-1} \\
 m = 0 \pm i & \quad m = 0 \pm i
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 v &= e^{0u}(C_1\cos u + C_2\sen u) + e^{0u}u(C_3\cos u + C_4\sen u) \\
 v &= C_1\cos u + C_2\sen u + C_3\cos u + C_4\sen u
 \end{aligned}$$

Ejercicio 6

$$3v''' + 5v'' + 10v' - 4v = 0$$

Solución:

$$3m^3 + 5m^2 + 10m - 4 = 0$$

$$\begin{array}{l} \pm 1, \pm 3 \qquad \qquad \qquad \pm 1, \pm 2, \pm 3 \\ \text{posibles raices: } \pm 1, \pm \frac{1}{3}, \pm 2, \pm \frac{2}{3}, \pm 3 \end{array}$$

$$\left(m - \frac{1}{3}\right)(3m^2 + 6m + 12) = 0$$

$$m - \frac{1}{3} = 0 \quad 3m^2 + 6m + 12 = 0$$

$$m_1 = \frac{1}{3} \quad m^2 + 2m + 4 = 0$$

$$v = C_1 e^{\pi^3 u} + e^{-u}(C_2 \cos \sqrt{3}u + C_3 \sin \sqrt{3}u)$$

Ejercicio 7

$$y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$$

Solución:

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:

$$y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$$

$$P(t) = t^3 - 2t^2 - t + 2$$

$$P(t) = (t - 1)(t + 1)(t - 2) = 0$$

De donde: $t = 1, \quad t = -1, \quad t = 2$

Por lo tanto: $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 e^{2x}$

$$y''' + 3y'' - 3y' + y = 0$$

Ejercicio 8

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = y$$

Solución:

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:

$$\frac{d^4 y}{dx^4} - y = 0$$

$$P(t) = t^4 - 1$$

$$P(t) = (t + 1)(t - 1)(t^2 + 1) = 0$$

De donde: $t = 1$, $t = -1$, $t = i$, $t = -i$

Por lo tanto:

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 \cos x + c_4 \operatorname{sen} x$$

Ejercicio 9

$$xy'' = y' \ln\left(\frac{y'}{x}\right)$$

Solución:

$$y' = z \rightarrow xz' = z \ln\left(\frac{z}{x}\right) \rightarrow z' = \frac{z}{x} \ln \frac{z}{x}$$

$$z = ux, \text{ donde } dz = udx + xdu$$

$$dz = \frac{z}{x} \ln\left(\frac{z}{x}\right) dx$$

$$u \, dx + x \, du = u \ln u \, dx$$

$$x \, du = (u \ln u - u) dx, \text{ separando la variable.}$$

$$\frac{du}{u \ln u - u} = \frac{dx}{x}$$

$$\ln(\ln u - 1) = \ln cx$$

$$\ln u - 1 = cx$$

$$\ln u = 1 + cx$$

$$u = e^{1+cx} \rightarrow \frac{z}{x} = e^{1+cx}$$

$$z = x e^{1+cx}$$

$$\frac{dy}{dx} = x e^{1+cx}$$

$$dy = x e^{1+cx} dx$$

$$\text{integrando: } y = \frac{x}{c} e^{1+cx} - \frac{1}{c^2} e^{1+c} + k$$

Ejercicio 10

$$xy'(yy'' - y(y')^2) = x^4 y^3$$

Solución:

$$y = e^{\int Z(x) dx}$$

$$y' = Z(x) e^{\int Z(x) dx}$$

$$y'' = Z'(x)e^{\int Z(x)dx} + (z(x))^2 e^{\int Z(x)dx}$$

$$XZ(x)e^{\int Z(x)dx} [e^{\int Z(x)dx} (z'(x)e^{\int Z(x)dx} + (z(x))^2 e^{\int Z(x)dx}) - (z(x))^2 e^{2\int Z(x)dx}] - e^{\int Z(x)dx} (z(x))^2 e^{2\int Z(x)dx} = x^4 e^{3\int Z(x)dx}$$

$$e^{3\int Z(x)dx} [x = (x)z'(x) + x(z(x))^3 - x(z(x))^3 - (z(x))^2]$$

$$x e^{3\int Z(x)dx} [x = (x)z'(x) - (z(x))^2] = x^4$$

$$z'(x) - \left(\frac{1}{x}\right)z(x)$$

$$= x^3(z(x))^{-1} \text{ (Ecuación diferencial de Bernoulli en } z \text{ con } n = -1)$$

$$z^2 = e^{-2\int \frac{1}{x}dx} \left[2e^{2\int \frac{1}{x}dx} x^3 dx + c \right] = x^2(x^2 + c)$$

$$z = x\sqrt{x^2 + c}$$

$$y = e^{\int x\sqrt{x^2+cdx}} = e^{\frac{1}{3}(x^2+c)^2}$$

Ejercicio 11

$$xyy'' - x(y')^2 - yy' = 0$$

Solución:

$$y' = yz$$

$$y'' = y'z + yz' = yz^2 + yz'$$

$$y'' = y(z^2 + z)$$

Reemplazando en la ecuación diferencial

$$xy^2(z^2 + z') - xy^2z^2 - y^2z = 0$$

$$\text{donde } xz^2 + xz' - z = 0$$

$$xz' - z = 0$$

$$\text{donde } \frac{dz}{z} - \frac{dx}{x} = 0$$

$$\text{integrando } \ln = \ln x = \ln c_1 \text{ es decir } \frac{z}{x} = c_1$$

$$\text{Como: } z = \frac{y'}{y} \rightarrow \frac{y'}{yx} = c_1 \rightarrow \frac{dy}{y} = c_1 x dx$$

$$\text{integrando: } \ln y = \frac{c_1}{2} x^2 + c_2$$

$$y = k_1 e^{\frac{c_1}{2} x^2}$$

- **Observación:** cuando la ecuación diferencial es homogénea para la función y sus derivadas, la sustitución $y' = yz$ ó $v = e^{\int z dx}$
- *reduce el orden de una ecuación diferencial una unidad*

Ejercicio 12

$$yy'' - 2yy' \ln y - y^2 = 0$$

Solución:

$$P = y'$$

$$y'' = P \frac{dp}{dy}$$

$$yP \frac{dp}{dy} - 2yP \ln y - p^2 = 0$$

$$\text{factorizando: } P \left(y \frac{dp}{dy} - 2 \ln y - P \right) = 0$$

$$P = 0 \rightarrow y = c_1$$

$$\text{ó } \frac{dp}{dy} - \frac{1}{y}P = 2 \ln y \text{ (lineal en } P\text{)}$$

$$P = e^{\int \frac{dy}{y}} \cdot 2 \ln y \, dy + c_1 = y \left[\frac{2}{2} \ln^2 y + c_1 \right]$$

$$\frac{dy}{dx} = y \ln^2 y + c_1$$

$$\text{integrando: } \int \frac{dy}{y \ln^2 y + c_1 y} = dx$$

$$\int \frac{dy}{y \ln^2 y + c_1 y} = dx \rightarrow \operatorname{arctg} \left(\frac{\ln y}{c_1} \right) = x + c_2$$

$$\ln y = c_1 \operatorname{tg}(x + c_2)$$

Ejercicio 13

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = x e^x, y(0) = 1, y'(0) = 0$$

Solución:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = x e^{-x} \rightarrow \frac{dy}{dx} = \int x e^{-x} dx$$

integrando:

$$\begin{aligned}u: x \rightarrow du &= dx; v \\&= \int e^{-x} dx = -e^{-x} \rightarrow \frac{dy}{dx} = -xe^{-x} + \int e^{-x} dx \\ \frac{dy}{dx} &= xe^{-x} + e^{-x} + c_1 \\ y'(0) &= 0 \\ 0 &= 0 - 1 + C_1 \rightarrow C_1 = 1 \\ \frac{dy}{dx} &= -xe^{-x} - e^{-x} + 1 \\ \int dy &= \int (1 - xe^{-x} - e^{-x}) dx \\ y &= x + xe^{-x} + e^{-x} + C_2 \\ y(0) &= 1 \\ 1 &= 0 + 2 + C_2 \\ C_2 &= -1 \\ y &= x + xe^{-x} + 2e^{-x} - 1.\end{aligned}$$

Ejercicio 14

$$\frac{d^3y}{dx^3} = x \text{Sen}(x), y(0) = 0, y'(0) = 0$$

Solución:

Integrando:

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dx^2} &= \int [x \text{Sen}(x)] dx \text{ Por partes: } u = x \quad du = dx \quad v = \int \text{Sen}(x) dx = -\text{Cos}(x) \\ \frac{d^2x}{dx^2} &= -\text{Cos}(x) + \int \text{Cos}(x) dx = -x \text{Cos}(x) + \text{Sen}(x) + C_1\end{aligned}$$

$$C_1: y^2(0) = 0$$

$$0 = 0 + \text{Sen}(0) + C_1 \rightarrow C_1 = 0$$

Entonces:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\text{Cos}(x) + \text{Sen}(x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \int [\text{Sen}(x) - x\text{Cos}(x)] dx$$

Ejercicio 15

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2\text{Sen}(x)\text{Cos}^2(x) - \text{Sen}^3(x)$$

Solución:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2\text{Sen}(x)\text{Cos}^2 - \text{Sen}^3(x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \int [2\text{Sen}(x)\text{Cos}^2(x) - \text{Sen}^3(x)] dx$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2\text{Cos}^3(x)}{3} - \int \text{Sen}^2(x)\text{Sen}(x) dx$$

$$= -\frac{2\text{Cos}^3(x)}{3} - \int [1 - \text{Cos}^2(x)] \text{Sen}(x) dx$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2\text{Cos}^3(x)}{3} + \text{Cos}(x) - \frac{\text{Cos}^3(x)}{3} + C_1$$

$$= \text{Cos}(x) - \text{Cos}^3(x) + C_2$$

$$\frac{dy}{dx} = \text{Cos}(x)[1 - \text{Cos}^2(x)] + C_1 = \text{Cos}(x)\text{Sen}^2(x) + C_2$$

$$y = \int [\text{Cos}(x)\text{Sen}^2(x) + C_1] dx = \frac{\text{Sen}^3(x)}{3} + C_1x + C_2$$

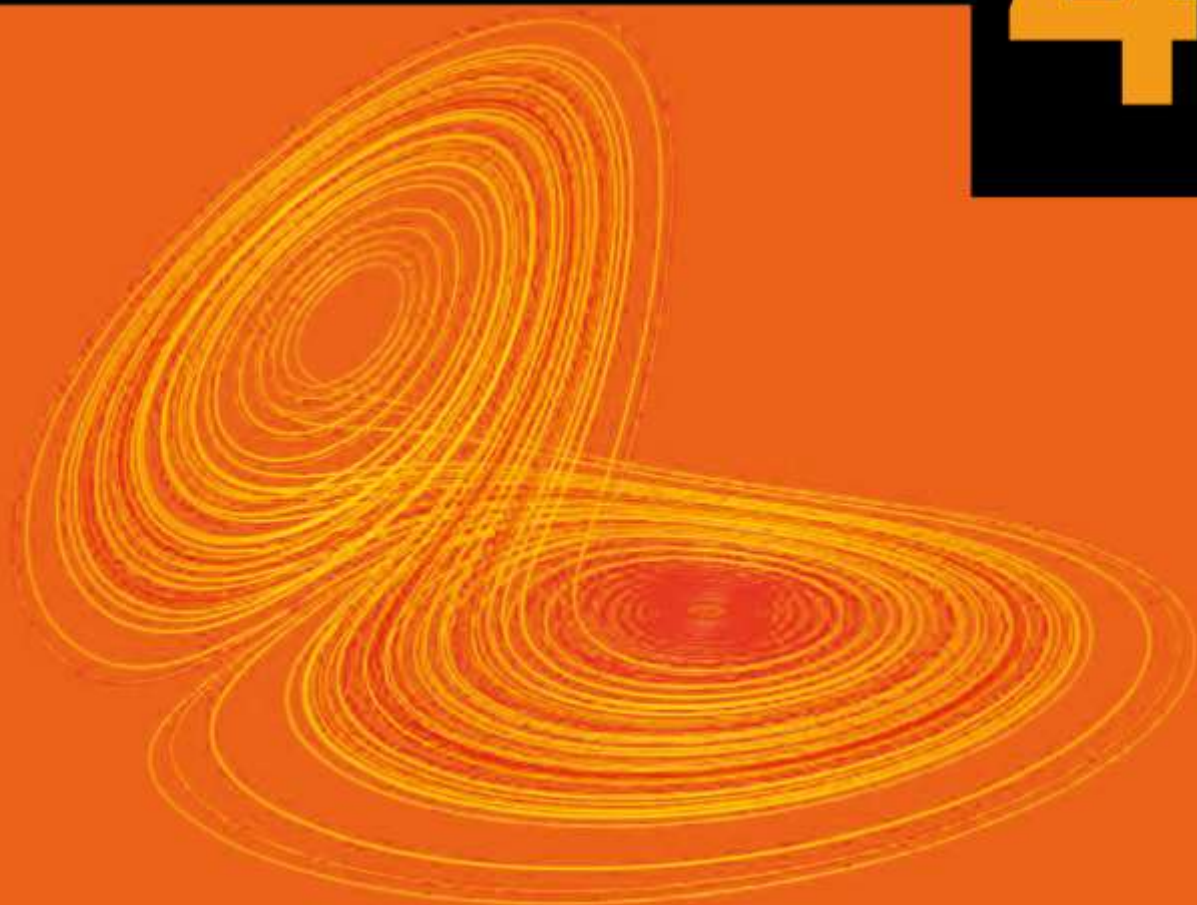
Ejercicios propuestos

1. $\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = 0$
2. $\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 4y = 0$
3. $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + y = 0$
4. $v'' + v' - 2v = 1 + v^2 + e^u$
5. $v'' - v = u \operatorname{sen}(u)$
6. $y''' - y = 0$
7. $y^{iv} - y = 0$
8. $6y''' - y'' - 6y' + y = 0$
9. $y''' - y'' - 3y' - y = 0$
10. $\frac{d^3y}{dx^3} - 2\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} = 0$
11. $y''' - y = 0$
12. $y^{iv} - y = 0$
13. $6y''' - y'' - 6y' + y = 0$
14. $y''' - y'' - 3y' - y = 0$
15. $\frac{d^3y}{dx^3} - 2\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} = 0$
16. $y''' - y = 0$
17. $y^{iv} - y = 0$
18. $6y''' - y'' - 6y' + y = 0$
19. $y''' - y'' - 3y' - y = 0$
20. $\frac{d^3y}{dx^3} - 2\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} = 0$

CAPÍTULO 4

Sistema de ecuaciones diferenciales

4



SISTEMA DE ECUACIONES DIFERENCIALES

4.1. Sistema de ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax + by + f(t) \\ \frac{dy}{dt} = cx + dy + g(t) \end{cases}$$

4.2. Tipos de sistemas de ecuaciones diferenciales

- $f(t) = 0$ Homogéneo
- $f(t) \neq 0$ No Homogéneo

4.3. Métodos de resolución

- Reducción o eliminación.
- Matricial.
- Eliminación mediante el operador diferencial D.

4.3.1. Método de reducción o eliminación

$$\frac{dx}{dt} = ax + by + f(t)$$

→ a, b, c, d son constantes, $f(t)$ y $g(t)$ son funciones constantes de t

$$\frac{dy}{dt} = cx + dy + g(t) \rightarrow x(t) \text{ Y } y(t) \text{ son incógnitas.}$$

Procedimiento

1. De cualquiera de las dos ecuaciones se despeja una de las incógnitas x o y .
2. La incógnita despejada se reemplaza en la otra ecuación.
3. Se deriva respectivamente.
4. Se resuelve.

Ejemplo

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3 - 2y \\ \frac{dy}{dx} = 2x - 2t \end{cases}$$

Despejamos y de la primera ecuación.

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 3 - 2y \\ y &= \frac{3}{2} - \frac{dx}{2dt} \end{aligned}$$

Remplazamos y en la segunda ecuación.

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= 2x - 2t \\ \frac{d}{dx} \left(\frac{3}{2} - \frac{dx}{2dt} \right) &= 2x - 2t \\ 0 - \frac{d^2x}{2dt^2} &= 2x - 2t \end{aligned}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4x = 4t$$

$$x'' + 4x = 4t$$

Se resuelve como una ecuación diferencial lineal homogénea.

$$p^2 + 4 = 0$$

$$p = \pm 2i$$

$$x_g = C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t)$$

$$f(t) = 4t$$

$$x_p = At + B$$

$$x'_p = A$$

$$x''_p = 0$$

Se reemplaza x' y x'' en la ecuación original.

$$x'' + 4x = 4t$$

$$0 + 4(At + B) = 4t$$

$$t^1: \quad 4A = 4 \rightarrow A = 1$$

$$t^0: \quad 4B = 0 \rightarrow B = 0$$

$$x_p = t$$

$$x = x_g + x_p$$

$$x = C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t) + t$$

Despejamos x de la segunda ecuación.

$$\frac{dy}{dx} = 2x - 2t$$

$$x = \frac{dy}{2dt} + t$$

Remplazamos x en la primera ecuación.

$$\frac{dx}{dt} = 3 - 2y$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{2dt} + t \right) = 3 - 2y$$

$$\frac{d^2y}{2dt^2} + 1 = 3 - 2y$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 4y = 4$$

$$y'' + 4y = 4$$

Se resuelve como una ecuación diferencial lineal homogénea.

$$p^2 + 4 = 0$$

$$p = \pm 2i$$

$$y_g = C_3 \cos(2t) + C_4 \sin(2t)$$

$$f(t) = 4t$$

$$x_p = At + B$$

$$y'_p = A$$

$$y''_p = 0$$

Se reemplaza x' y x'' en la ecuación original.

$$y'' + 4y = 4$$

$$0 + 4A = 4$$

$$t^1: \quad 4A = 4 \rightarrow A = 1$$

$$y_p = t$$

$$y = y_g + y_p$$

$$\mathbf{y = C_3 \cos(2t) + C_4 \sin(2t) + t}$$

Ejercicios

Ejercicio 1

$$\left. \begin{array}{l} 1) \frac{dx}{dt} = ax + by \\ 2) \frac{dx}{dt} = cx + dy \end{array} \right\} \quad f(t) = 0 \text{ Homogénea}$$

De 1 despejamos y

$$3) y = \frac{dx}{ddt} - \frac{ax}{b}$$

Derivamos x con respecto a t

$$4) y' = \frac{dx^2}{ddt^2} - \frac{a}{b} \frac{dx}{dt}$$

Reemplazamos 3 y 4 en la segunda ecuación

$$\begin{aligned} \frac{dx^2}{ddt^2} - \frac{a}{b} \frac{dx}{dt} &= cx + d \left(\frac{dx}{ddt} - \frac{ax}{b} \right) \\ a_n \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x &= 0 \\ a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \dots + a_1 r + a_0 &= 0 \end{aligned}$$

Finalmente se analizan las raíces

$$x_T = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} + \dots + C_n e^{r_n x}$$

Ejercicio 2

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} &= e^{-t} - y \\ 2 \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} &= \sin t - 2y \end{aligned} \right\}$$

Derivamos la primera ecuación

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{d^2y}{dt^2} = -e^{-t} - \frac{dy}{dt}$$

Sumamos la primera y tercera ecuación

$$\begin{array}{rcl} \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} & = & -e^{-t} - y \\ \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{d^2y}{dt^2} & = & -e^{-t} - \frac{dy}{dt} \\ \hline \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} + \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{d^2y}{dt^2} & = & -\frac{dy}{dt} - y \end{array}$$

Derivamos la segunda ecuación

$$2 \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{d^2y}{dt^2} = \cos t - 2 \frac{dy}{dt}$$

Sumamos la segunda con la quinta ecuación

$$\begin{array}{rcl} 2 \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} & = & \sin t - 2y \\ 2 \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{d^2y}{dt^2} & = & \cos t - 2 \frac{dy}{dt} \\ \hline 2 \frac{dx}{dt} + 2 \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + \frac{d^2y}{dt^2} & = & \sin t - 2y + \cos t - 2 \frac{dy}{dt} \end{array}$$

Sumamos la cuarta con la sexta ecuación

$$-2 \frac{dx}{dt} - 2 \frac{dy}{dt} - 2 \frac{d^2x}{dt^2} - 2 \frac{d^2y}{dt^2} = 2 \frac{dy}{dt} + 2y \quad (* - 2)$$

$$\begin{array}{r} 2 \frac{dx}{dt} + 2 \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + \frac{d^2y}{dt^2} = \sin t - 2y + \cos t - 2 \frac{dy}{dt} \\ \hline -\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dy}{dt} = \sin t + \cos t \end{array}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dy}{dt} = -\sin t - \cos t$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dy}{dt} \ll == \gg r^2 + r$$

$$r^2 + r = 0$$

$$r(r + 1) = 0$$

$$r_1 = 0$$

$$r_2 = -1$$

$$y_G = C_1 + C_2 e^{-t}$$

$$y_p = A \cos t + B \sin t$$

$$y' = -A \sin t + B \cos t$$

$$y'' = -A \cos t - B \sin t$$

Reemplazamos en la ecuación

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dy}{dt} = -\sin t - \cos t$$

$$-A \cos t - B \sin t - A \sin t + B \cos t = -\sin t - \cos t$$

$$A = 1$$

$$B = 0$$

$$y_p = \cos t$$

$$y_T = y_G + y_p$$

$$y_T = C_1 + C_2 e^{-t} + \cos t$$

Para hallar x_T se reemplaza y_T en la primera ecuación

$$\frac{dx}{dt} + \frac{d(C_1 + C_2 e^{-t} + \cos t)}{dt} = e^{-t} - (C_1 + C_2 e^{-t} + \cos t)$$

$$\frac{dx}{dt} - C_2 e^{-t} - \sin t = e^{-t} - C_1 - C_2 e^{-t} - \cos t$$

$$\frac{dx}{dt} = \sin t + e^{-t} - C_1 - \cos t$$

$$\int dx = \int (\sin t + e^{-t} - C_1 - \cos t) dt$$

$$x_T = -\cos t - e^{-t} - C_1 t - \sin t$$

Ejercicio 3.

$$\left. \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = -5x - y \Rightarrow 1 \\ \frac{dy}{dt} = 4x - y \Rightarrow 2 \end{array} \right\} \quad x(1) = 0 \text{ y } y(1) = 1$$

De la primera ecuación despejamos y y derivamos

$$y = -\frac{dx}{dt} - 5x \Rightarrow 3$$

$$y' = -\frac{d^2x}{dt^2} - 5\frac{dx}{dt} \Rightarrow 4$$

Reemplazo 3 y 4 en 2

$$-\frac{d^2x}{dt^2} - 5\frac{dx}{dt} = 4x + \frac{dx}{dt} + 5x$$

$$-\frac{d^2x}{dt^2} - 6\frac{dx}{dt} - 9x = 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 6\frac{dx}{dt} + 9x = 0$$

$$x'' + 6x' + 9x = 0$$

$$r^2 + 6r + 9$$

$$(r + 3)(r + 3)$$

$$r_1 = -3 \quad r_2 = -3$$

$$X_g = C_1e^{-3t} + C_2te^{-3t}$$

Para hallar Y_g derivo X_g las veces que sean necesarias

$$\frac{dx}{dt} = -3C_1e^{-3t} - 3C_2te^{-3t}$$

$$Y_g = 3C_1e^{-3t} + 3C_2te^{-3t} + 3C_2e^{-3t} - 5C_1e^{-3t} - 5C_2te^{-3t}$$

$$Y_g = -2C_1e^{-3t} - 2C_2te^{-3t} - C_2e^{-3t}$$

Cuando $x(1) = 0$ y $y(1) = 1$

Reemplazo en X_g y Y_g

$$X_g = C_1 e^{-3t} + C_2 t e^{-3t}$$

$$0 = C_1 e^{-3(1)} + C_2(1) e^{-3(1)} \Rightarrow 5$$

$$Y_g = -2C_1 e^{-3t} - 2C_2 t e^{-3t} - C_2 e^{-3t}$$

$$1 = -2C_1(1) e^{-3(1)} - 2C_2(1) e^{-3(1)} - C_2 e^{-3(1)}$$

$$1 = -2C_1 e^{-3} - 3C_2 e^{-3} \Rightarrow 6$$

Multiplico la ecuación 5 por 2 y sumo 6

$$0 = 2C_1 e^{-3} + 2C_2 e^{-3}$$

$$1 = -2C_1 e^{-3} - 3C_2 e^{-3}$$

$$1 = -C_2 e^{-3}$$

$$C_2 = -e^3$$

Reemplazo C_2 en 6

$$1 = 2C_1 e^{-3} + 3(-e^3)(e^{-3})$$

$$1 = 2C_1 e^{-3} - 3$$

$$C_1 = 2e^3$$

Reemplazo C_1 y C_2 en las ecuaciones generales

$$X_g = 2e^3 e^{-3t} + (-e^3) t e^{-3t}$$

$$X_g = 2e^3 e^{-3t} - e^3 t e^{-3t}$$

$$Y_g = -2(2e^3) e^{-3t} - 2(-e^3) t e^{-3t} - (-e^3) e^{-3t}$$

$$Y_g = -4e^3 e^{-3t} + 2e^3 t e^{-3t} + e^3 e^{-3t}$$

Ejercicio 4

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones no homogéneo por el método de eliminación si $x(0) = 3$ y $y(0) = 3$

$$\begin{cases} 2 \frac{dx}{dt} = 6x - y - 6t^2 - t + 3 \Rightarrow 1 \\ \frac{dy}{dt} = 2y - 2t - 1 \Rightarrow 2 \end{cases}$$

De la ecuación 1 despejo y y derivamos

$$y = -2 \frac{dx}{dt} + 6x - 6t^2 - t + 3 \Rightarrow 3$$

$$y' = -2 \frac{d^2x}{dt^2} + 6 \frac{dx}{dt} - 12t - 1 \Rightarrow 4$$

Reemplazo 3 y 4 en 2

$$-2 \frac{d^2x}{dt^2} + 6 \frac{dx}{dt} - 12t - 1 = -4 \frac{dx}{dt} + 12x - 12t^2 - 2t + 6 - 2t - 1$$

$$-2 \frac{d^2x}{dt^2} + 10 \frac{dx}{dt} - 12x + 12t^2 - 8t - 6 = 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 5 \frac{dx}{dt} + 6x = 6t^2 - 4t - 3$$

Resolvemos la ecuación como homogénea

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 5\frac{dx}{dt} + 6x = 0$$

$$r^2 - 5r + 6 = 0$$

$$(r^2 - 3)(r^2 - 2)$$

$$r_2 = 3 \qquad r_2 = 2$$

$$X_h = C_1 e^{3t} + C_2 e^{2t}$$

Resolvemos la ecuación no homogénea

$$X_p = (At^2 + Bt + C)$$

$$X'_p = 2At + B$$

$$X''_p = 2A$$

$$2A - 5(2At + B) + 6(At^2 + Bt + C) = 6t^2 - 4t - 3$$

$$2A - 10At - 5B + 6At^2 + 6Bt + 6C = 6t^2 - 4t - 3$$

$$t^2(6A) + t(-10A + 6B) + 2A - 5B + 6C = 6t^2 - 4t - 3$$

$$t^2: 6 = 6A \qquad t: -4 = -10A + 6B \qquad t^0: -3 =$$

$$2A - 5B + 6C$$

$$A = 1 \qquad -4 = -10(1) + 6B \qquad -3 =$$

$$2(1) - 5(1) + 6C$$

$$B = 1 \qquad C = 0$$

$$X_p = (At^2 + Bt + C)$$

$$X_p = (1)t^2 + (1)t + 0$$

$$X_p = t^2 + t$$

$$X_g = X_h + X_p$$

$$X_g = C_1 e^{3t} + C_2 e^{2t} + t^2 + t$$

Derivo X_g para hallar Y_g

$$X_g = C_1 e^{3t} + C_2 e^{2t} + t^2 + t$$

$$X'_g = 3C_1 e^{3t} + 2C_2 e^{2t} + 2t + 1$$

Reemplazo en

$$y = -2 \frac{dx}{dt} + 6x - 6t^2 - t + 3$$

$$Y_g = -6C_1 e^{3t} - 4C_2 e^{2t} - 4t - 2 + 6C_1 e^{3t} + 6C_2 e^{2t} + 6t^2 + 6t - 6t^2 - t + 3$$

$$Y_g = 2C_2 e^{2t} + t + 1$$

Cuando $x(0) = 3$ y $y(0) = 3$

Reemplazo en X_g y Y_g

$$Y_g = 2C_2 e^{2t} + t + 1$$

$$3 = 2C_2 e^{2(0)} + 0 + 1$$

$$C_2 = 1$$

$$X_g = C_1 e^{3t} + C_2 e^{2t} + t^2 + t$$

$$3 = C_1 e^{3(0)} + C_2 e^{2(0)} + 0^2 + 0$$

$$3 = C_1 + C_2$$

$$C_1 = 3 - C_2$$

$$C_1 = 3 - 1$$

$$C_1 = 2$$

Reemplazo en las ecuaciones generales

$$X_g = C_1 e^{3t} + C_2 e^{2t} + t^2 + t$$

$$X_g = 2e^{3t} + e^{2t} + t^2 + t$$

$$Y_g = 2C_2 e^{2t} + t + 1$$

$$Y_g = 2e^{2t} + t + 1$$

4.3.2. Método matricial

Dado el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + f_1(t) \\ x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + f_2(t) \\ \vdots \\ x_n' = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n + f_n(t) \end{cases}$$

Procedimiento

- 1) Determinar la matriz fundamental

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{pmatrix} \quad f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ f_n(t) \end{pmatrix}$$

- 2) Calcular λ

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & - & - \\ - & a_{22} - \lambda & - \\ - & - & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(A - I\lambda) = 0$$

- Puede haber tres casos:
- a) Raíces Reales e iguales
 - b) Raíces Reales y diferentes
 - c) Raíces complejas
- 3) λ cada valor reemplazar, los valores pueden ser 1 o 2 (los valores más utilizados)
- 4) Solución general

$$x = k_1 \qquad y = k_2$$

$$y_g = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_n \end{pmatrix} C_1 e^t + \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_n \end{pmatrix} C_2 e^t$$

5) $y_T = y_g + y_c$

$$y_c = \phi t \int \phi^{-1}(t) F(t) dt$$

Ejercicios

Ejercicio 1

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 6x - y \\ \frac{dy}{dt} &= 5x + 4y \end{aligned} \right\}$$

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 6 - k & -1 \\ 5 & 4 - k \end{pmatrix}$$

$$K_1 = X$$

$$K_2 = Y$$

Formamos matrices con los coeficientes de las ecuaciones

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 6K_1 & -1K_2 \\ 5K_1 & 4K_2 \end{vmatrix}$$

En la diagonal principal restamos lambda

$$\det(A - I\lambda) = \begin{vmatrix} 6 - \lambda & -1 \\ 5 & 4 - \lambda \end{vmatrix}$$

Igualamos la determinante a cero

$$\det(A - I\lambda) = 0$$

Procedemos a resolver la determinante para encontrar las raíces o valores de lambda.

$$(6 - \lambda)(4 - \lambda) - (5)(-1) = 0$$

$$24 - 6\lambda - 4\lambda + \lambda^2 + 5 = 0$$

$$\lambda^2 - 10\lambda + 29 = 0$$

$$\lambda = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 116}}{2}$$

$$\lambda = 5 \pm 2i$$

$$\alpha = 5 \text{ Y } \beta = 2i$$

$$\lambda_1 = 5 + 2i$$

$$\lambda_2 = 5 - 2i$$

Reemplazamos la primera raíz de lambda

Para $\lambda_1 = 5 + 2i$

$$\det(A - I\lambda) = \begin{vmatrix} 6 - 5 + 2i & -1 \\ 5 & 4 - 5 + 2i \end{vmatrix}$$

$$\det(A - I\lambda) = \begin{vmatrix} (1 - 2i)K_1 & -1K_2 \\ 5K_1 & (-1 - 2i)K_2 \end{vmatrix}$$

Resolver el sistema de ecuaciones.

$$(1 - 2i)K_1 - K_2 = 0$$

$$(1 - 2i)K_1 = K_2$$

Damos un valor aleatorio para las constantes; (en este caso un valor de 1 para que no afecte la ecuación y satisfaga a la vez)

$$K_1 = 1$$

$$(1 - 2i) = K_2$$

Ordenamos los valores de beta

$$K = \frac{K_1}{K_2}$$

$$K = \frac{1}{(1 - 2i)}$$

Separamos los valores de beta en parte real y parte imaginaria

$$\frac{1}{(1 - 2i)} = \frac{1}{1} + \frac{0}{-2i}(i)$$

$$R_1 \quad R_2$$

Reemplazamos los valores obtenidos en las siguientes fórmulas

$$X_1 = e^{\alpha t} [R_1 \cos \beta t - R_2 \sin \beta t]$$

$$X_2 = e^{\alpha t} [R_2 \cos \beta t + R_1 \sin \beta t]$$

$$X_1 = e^{5t} \left[\frac{1}{1} \cos 2t - \frac{0}{-2} \sin 2t \right]$$

$$X_2 = e^{5t} \left[\frac{0}{-2} \cos 2t + \frac{1}{1} \sin 2t \right]$$

$$X_T = X_1 + X_2$$

$$X_T = e^{5t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cos 2t - \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} \sin 2t + e^{5t} \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} \cos 2t + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \sin 2t$$

Sistemas de ecuaciones diferenciales no homogéneas

$$X = X_{H1} + X_{H2} + X_P$$

$$x_1 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -8 \\ 3 \end{bmatrix} t$$

$$X_H \rightarrow \text{Det}|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -1 - \lambda & 2 \\ -1 & 1 - \lambda \end{vmatrix}$$

$$= (-1 - \lambda)(1 - \lambda) - (-1)(2) = -1 + \lambda - \lambda + \lambda^2 + 2 = \lambda^2 + 1$$

$$\rightarrow \lambda = \pm i$$

Elegimos $\lambda = i$

$$\begin{bmatrix} -1 - i & 2 \\ -1 & 1 - i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1 - i)k_1 + 2k_2 \\ -k_1 + (1 - i)k_2 \end{bmatrix} = 0$$

Damos valores a k

Elegimos cualquiera de las ecuaciones.

$$-k_1 - ik_1 + 2k_2 = 0$$

Despejamos k_2

$$k_2 = \frac{(1 + i)k_1}{2} \text{ entonces damos valores y tenemos:}$$

$$k_2 = \frac{1 + i}{2} \text{ y } k_1 = 1 \rightarrow k = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \end{bmatrix} i$$

$$x_{H1} = e^{\alpha t}(B_1 \cos \beta t - B_2 \sin \beta t) = e^{0t} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \end{bmatrix} \cos t - \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \end{bmatrix} \sin t \right)$$

$$x_{H2} = e^{\alpha t}(B_2 \cos \beta t + B_1 \sin \beta t) = e^{0t} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \end{bmatrix} \cos t + \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \end{bmatrix} \sin t \right)$$

Calculamos x_p

$$x_p \rightarrow f(t) = \begin{bmatrix} -8 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$x_p = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -8 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolvemos el sistema

$$(-a_1 + 2b_1 - 8 = 0) \cdot (-1)$$

$$\frac{-a_1 + b_1 + 3 = 0}{}$$

$$0 - b_1 + 11 = 0 \rightarrow b_1 = 11$$

$$-a_1 + 11 + 3 = 0 \rightarrow a_1 = 14$$

$$x_p = \begin{bmatrix} 14 \\ 11 \end{bmatrix}$$

La solución del sistema es

$$X = X_{H1} + X_{H2} + X_P$$

$$X = e^{0t} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \end{bmatrix} \cos t - \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \end{bmatrix} \sin t \right) + e^{0t} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \end{bmatrix} \cos t + \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \end{bmatrix} \sin t \right) + \begin{bmatrix} 14 \\ 11 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 2

Sistemas de ecuaciones diferenciales homogéneas con raíces diferentes

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - y + z \\ \frac{dy}{dt} = -x + 5y - z \\ \frac{dz}{dt} = x - y + 3z \end{cases}$$

$$X_H \rightarrow \text{Det}|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & -1 & 1 \\ -1 & 5 - \lambda & -1 \\ 1 & -1 & 3 - \lambda \end{vmatrix}$$

$$= (3 - \lambda)^2(5 - \lambda) + 1 + 1 - (5 - \lambda) - (3 - \lambda) - (3 - \lambda) \\ (-1)(-\lambda^3 + 11\lambda^2 - 36\lambda + 36) = 0$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & -11 & +36 & -36 \\ 2 & -18 & 36 & 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & -9 & 18 & 0 & \end{array}$$

$$(\lambda - 2)(\lambda^2 - 9\lambda + 18) = (\lambda - 2)(\lambda - 6)(\lambda - 3) = 0$$

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 6, \quad \lambda_3 = 3$$

Para $\lambda_1 = 2$

$$\begin{bmatrix} 3-2 & -1 & 1 \\ -1 & 5-2 & -1 \\ 1 & -1 & 3-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 - k_2 + k_3 \\ -k_1 + 3k_2 - k_3 \\ k_1 - k_2 + k_3 \end{bmatrix} = 0$$

Sumo la ecuación 1 y 2

$$k_1 - k_2 + k_3 = 0$$

$$-k_1 + 3k_2 - k_3 = 0$$

$$\begin{array}{rcl} & & \\ & & \\ 2k_2 & = & 0 \rightarrow k_2 = 0 \end{array}$$

$k_1 = -k_3$ le damos a k_1 el valor de uno y tenemos: $k_1 = 1$ Y

$$k_3 = -1$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Para $\lambda_2 = 6$

$$\begin{bmatrix} 3-6 & -1 & 1 \\ -1 & 5-6 & -1 \\ 1 & -1 & 3-6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3k_1 - k_2 + k_3 \\ -k_1 - k_2 - k_3 \\ k_1 - k_2 - 3k_3 \end{bmatrix} = 0$$

Sumo la ecuación 1 y 2

$$-3k_1 - k_2 + k_3 = 0$$

$$-k_1 - k_2 - k_3 = 0$$

$$\begin{array}{rcl} & & \\ & & \\ -4k_1 - 2k_2 & = & 0 \rightarrow -2k_1 = k_2 \end{array}$$

$$-k_1 + 2k_1 - k_3 = 0 \rightarrow k_1 = k_3$$

$k_1 = k_3$ le damos a k_1 el valor de uno y tenemos: $k_1 = 1$,
 $k_3 = 1$ y $k_2 = -2$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Para $\lambda_3 = 3$

$$\begin{bmatrix} 3-3 & -1 & 1 \\ -1 & 5-3 & -1 \\ 1 & -1 & 3-3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_2 + k_3 \\ -k_1 - k_2 - k_3 \\ k_1 - k_2 \end{bmatrix} = 0$$

Igualando a cero 1 y 3 tenemos

$$-k_2 + k_3 = 0 \rightarrow k_2 = k_3$$

$$k_1 - k_2 = 0 \rightarrow k_1 = k_2$$

le damos a k_1 el valor de uno y tenemos: $k_1 = 1$, $k_3 = 1$ y $k_2 = 1$

$$B_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Usamos la fórmula general

$$x_H = B_1 C_1 e^{\lambda t} + B_2 C_2 e^{\lambda t} + B_3 C_3 e^{\lambda t}$$

$$x_H = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} C_1 e^{2t} + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} C_2 e^{6t} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} C_3 e^{3t}$$

Ejercicio 3

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales homogéneas por el método matricial

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - y + z \\ \frac{dy}{dt} = -x + 5y - z \\ \frac{dz}{dt} = x - y + 3z \end{cases}$$

$$\text{Det}(A - I\vartheta) = 0$$

$$A(\vartheta) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-\vartheta & -1 & 1 \\ -1 & 5-\vartheta & -1 \\ 1 & -1 & 3-\vartheta \end{pmatrix} \begin{matrix} 3-\vartheta & -1 \\ -1 & 5-\vartheta \\ 1 & -1 \end{matrix} =$$

$$\begin{aligned} &= (3-\vartheta)(5-\vartheta)(3-\vartheta) + (-1)(-1)(1) + (1)(-1)(-1) \\ &\quad - (1)(5-\vartheta)(1) - (-1)(-1)(3-\vartheta) - (3-\vartheta)(1)(-1) \end{aligned}$$

$$= (3-\vartheta)(5-\vartheta)(3-\vartheta) + 1 + 1 - 5 + \vartheta - 3 + \vartheta - 3 + \vartheta$$

$$= (15 - 8\vartheta + \vartheta^2)(3-\vartheta) - 9 + 3\vartheta$$

$$= (45 - 15\vartheta - 24\vartheta + 8\vartheta^2 + 3\vartheta^2 - \vartheta^3) - 9 + 3\vartheta$$

$$= 36 - 36\vartheta + 11\vartheta^2 - \vartheta^3$$

$$\begin{array}{cccc|c} -1 & 11 & -36 & 36 & 2 \\ & -2 & 18 & -36 & \\ \hline -1 & 9 & -18 & 0 & \end{array}$$

$$(\vartheta - 2)(-\vartheta^2 + 9\vartheta - 18) = 0$$

$$(\vartheta - 2)(-\vartheta + 6)(\vartheta + 3) = 0$$

$$\vartheta = 2 \quad \vartheta = 6 \quad \vartheta = 3$$

Luego de obtener las raíces procedemos a reemplazarlas en la primera matriz y obtener el valor de las constantes k

$$\vartheta = 2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$k_1 - k_2 + k_3 = 0 \quad \text{Ec. 1}$$

$$-k_1 + 3k_2 - k_3 = 0 \quad \text{Ec. 2}$$

$$k_1 - k_2 + k_3 = 0 \quad \text{Ec. 3}$$

Ecuación 2 con 3

$$\begin{cases} -k_1 + 3k_2 - k_3 = 0 \\ k_1 - k_2 + k_3 = 0 \end{cases}$$

$$2k_2 = 0$$

$$k_2 = 0$$

Reemplazar k_2 en la primera ecuación

$$k_1 - k_2 + k_3 = 0$$

$$k_1 = -k_3$$

Como tenemos una ecuación con dos incógnitas procedemos a resolver la ecuación con el método del tanteo, le damos un valor de $k_1 = 1$ y obtenemos que $k_3 = -1$

$$\vec{k}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Repetimos el procedimiento hasta resolver reemplazar todas las raíces

$$\vartheta = 3$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-k_2 + k_3 = 0 \quad \text{Ec. 1}$$

$$-k_1 + 2k_2 - k_3 = 0 \quad \text{Ec. 2}$$

$$k_1 - k_2 = 0 \quad \text{Ec. 3}$$

Podemos observar que las variables se despejan con facilidad en la ecuación 1 y en la ecuación 3

$$k_2 = k_3$$

$$k_1 = k_2$$

Al observar los resultados, nos podemos dar cuenta que cualquier valor numérico satisface la ecuación así que damos el valor de $k_1 = 1$, obtenemos que $k_3 = 1$ y $k_2 = 1$

$$\vec{k_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Para finalizar

$$\vartheta = 6$$

$$\begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-3k_1 - k_2 + k_3 = 0 \quad \text{Ec. 1}$$

$$-k_1 - k_2 - k_3 = 0 \quad \text{Ec. 2}$$

$$k_1 - k_2 - 3k_3 = 0 \quad \text{Ec. 3}$$

Ecuación 2 con 3

$$\begin{cases} -k_1 - k_2 - k_3 = 0 \\ k_1 - k_2 - 3k_3 = 0 \end{cases}$$

$$-2k_2 - 4k_3 = 0$$

$$k_2 = -2k_3$$

En la ecuación 1 reemplazamos el resultado anterior

$$-3k_1 - k_2 + k_3 = 0$$

$$-3k_1 + 2k_3 + k_3 = 0$$

$$-3k_1 + 3k_3 = 0$$

$$k_1 = k_3$$

Le damos valores de $k_1 = 1$ entonces $k_3 = 1$ y $k_2 = -2$

$$\vec{k_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$Y_g = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t} + C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{6t}$$

Soluciones parciales

$$X(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t} + C_3 e^{6t}$$

$$Y(t) = C_2 e^{3t} - 2C_3 e^{6t}$$

$$Z(t) = -C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t} + C_3 e^{6t}$$

4.3.3. Método de eliminación mediante el operador diferencial D

Dado el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_n}{dt} = f(t, x, x_1, x_2, \dots, x_n)_n \\ \frac{dx_1}{dt} = f(t, x, x_1, x_2, \dots, x_n)_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{dx}{dt} = f(t, x, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{array} \right.$$

El operador diferencial: $D = \frac{dx_n}{dt}$

Procedimiento:

1. Encontrar la Ecuación diferencial homogénea $\Delta D(x_n(t)) = 0$.
2. $\Delta D = \text{determinante}$.

	x		x_1	x_2	$\dots$	x_n
	1		1-D	1	1	1
$\Delta D =$	1		1	1-D	1	1
	1		1	1	1-D	1
	-		-	-	-	1-D

$$\Delta D = f(D) = 0$$

3. Resolver la ecuación en función de D.

$$D_1 = ? \quad D_2 = ? \quad D_n = ?$$

4. De acuerdo a las raíces escribir la solución de la ecuación.

$$x_n = C_1 \dots$$

5. La solución se remplaza en la ecuación que contenga el respectivo diferencial.

Ejemplo

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dy}{dx} = y - 2z \rightarrow y - 2z - \frac{dy}{dx} = 0 \\ \frac{dz}{dx} = y + 3z \rightarrow y + 3z - \frac{dz}{dx} = 0 \end{array} \right.$$

$$\Delta D(zf(x)) = 0$$

	y	Z
$\Delta D =$	1-D	-2
	1	3-D

$$\Delta D = (1 - D)(3 - D) + 2$$

$$\Delta D = 3 - D - 3D + D^2 + 2$$

$$\Delta D = D^2 - 4D + 5$$

$$\Delta D(zf(x)) = 0$$

$$(D^2 - 4D + 5)(zf(x)) = 0$$

$$D^2 - 4D + 5 = 0$$

$$D = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 20}}{2} = \frac{4 \pm 2i}{2}$$

$$D = 2 \pm i$$

$$zf(x) = C_1 e^{2x} \cos(x) + C_2 e^{2x} \sin(x)$$

Remplazamos $z(x)$ en la segunda ecuación

$$\frac{dz}{dx} = y + 3z$$

$$\frac{d}{dx}(C_1 e^{2x} \cos(x) + C_2 e^{2x} \sin(x)) = y + 3(C_1 e^{2x} \cos(x) + C_2 e^{2x} \sin(x))$$

$$C_1 (2e^{2x} \cos(x) - e^{2x} \sin(x)) + C_2 (2e^{2x} \sin(x) + e^{2x} \cos(x)) - y - 3C_1 e^{2x} \cos(x) - 3C_2 e^{2x} \sin(x) = 0$$

$$2C_1 e^{2x} \cos(x) - C_1 e^{2x} \sin(x) + 2C_2 e^{2x} \sin(x) + C_2 e^{2x} \cos(x) - y - 3C_1 e^{2x} \cos(x) - 3C_2 e^{2x} \sin(x) = 0$$

$$(C_2 - C_1)e^{2x} \cos(x) + (-C_1 - C_2)e^{2x} \sin(x) = y$$

$$y = (C_2 - C_1)e^{2x} \cos(x) + (-C_1 - C_2)e^{2x} \sin(x)$$

Referencias

- Arrieta Algarra, J. M., Ferreira de Pablo, R., Pardo San Gil, R. M., Rodríguez Bernal, A. (2020). *Análisis numérico de ecuaciones diferenciales ordinarias*. Ediciones Paraninfo, S.A.
- Ayres, F. (1991). *Ecuaciones diferenciales*. McGraw-Hill.
- Becerril, J. & Elizarraraz, D. (2004). *Ecuaciones Diferenciales – Técnicas de Solución y Aplicaciones*. Editorial Nopase
- Boyce, W. E., & Di Prima, R. C. (1983). *Ecuaciones diferenciales*
- Bronson, R., & Costa, G. (2008). *Ecuaciones diferenciales*. McGraw-Hill.
- Calderón, G., Arango, J., Gómez, A. (2023). *Ecuaciones diferenciales para estudiantes de Ciencias e Ingenierías*. Universidad del Valle.
- Carmona, I. (2011). *Ecuaciones diferenciables*. Pearson.
- Edwards, C. H., & Penney, D. E. (1994). *Ecuaciones diferenciales elementales*. Prentice-Hall.
- Espinoza, E. (2012). *Análisis matemático IV, para estudiantes de ciencia e ingeniería*. EdukPerú
- Hirsch, M., & Smale, S. (1983). *Ecuaciones diferenciales, sistemas dinámicos y álgebra lineal*. Alianza Universidad.

- Kiseliov, A., Krasnov, M., & Makarenko, G. (1973). *Problemas de ecuaciones diferenciales ordinarias*. Mir.
- Malacrida, S. (2023). *Introducción a las Ecuaciones Diferenciales*. Simone Malacrida.
- Malacrida, S. (2023). *Ejercicios de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*. Simone Malacrida.
- Marcellán, F., Casasús, L., & Zarzo, A. (1990). *Ecuaciones diferenciales: Problemas lineales y aplicaciones*. McGraw-Hill.
- Moya, L., & Rojas, E. (2022). *Ecuaciones diferenciales ordinarias. Técnicas de solución*. (1ed., Ed.) Universidad Nacional de Colombia.
- Nagle, R. K., & Saff, E. B. (1992). *Fundamentos de ecuaciones diferenciales*. Addison-Wesley Iberoamericana.
- Ramírez, J. (2022). *Ecuaciones Diferenciales*. Red Educativa Digital Descartes.
- Ricardo, H. (2018). *Ecuaciones diferenciales: una introducción moderna*. Reverte.
- Rodríguez Ricard, M. (2022). *Ecuaciones diferenciales ordinarias y aplicaciones*. Editorial Universitaria.
- Ross, S. L. (2021). *Ecuaciones diferenciales*. Reverte.

- Simmons, G. (1991). *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones y notas históricas*. McGraw-Hill.
- Simmons, G. (2014). *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*. McGraw-Hill Education.
- Tello del Castillo, J. I. (2023). *Introducción a las ecuaciones diferenciales*. España: Diputación Provincial de Ciudad Real.
- Vergel, M., Rincón, O., & Ibargüen, E. (2022). *Ecuaciones diferenciales* (1ed. ed.). Universidad de Nariño.
- Zill, D. G. (2015). *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado*: (10 ed.). Cengage Learning.
- Zuleta, C. A. (2018). *Ecuaciones Diferenciales: Teoría y Aplicaciones*. Alemania: Cuvillier Verlag.

ISBN: 978-9942-679-73-4



9789942679734