Ecuaciones diferenciales. Teoría, práctica y resolución de problemas

JAIME RODRIGO GUILCAPI MOSQUERA
MAYRA ALEXANDRA VISCAÍNO CUZCO
FREDDY GEOVANNY BENALCÁZAR PALACIOS

ISBN: 978-9942-679-50-5

CIDE
EDITORIAL

Ecuaciones diferenciales. Teoría, práctica y resolución de problemas

Ecuaciones diferenciales. Teoría, práctica y resolución de problemas

Autores

Jaime Rodrigo Guilcapi Mosquera

Mayra Alexandra Viscaíno Cuzco

Freddy Geovanny Benalcázar Palacios

Ecuaciones diferenciales.
Teoría, práctica y resolución de problemas

Centro de Investigación y Desarrollo Ecuador
Tel.: + (593) 04 2037524
http.:/www.cidecuador.org

ISBN: 978-9942-679-50-5

https://doi.org/10.33996/cide.ecuador.PI2679505

Dirección editorial: Lic. Pedro Misacc Naranjo, Msc.
Coordinación técnica: Lic. María J. Delgado
Diseño gráfico: Lic. Danissa Colmenares
Diagramación: Lic. Alba Gil
Fecha de publicación: abril, 2025

Guayaquil – Ecuador

La presente obra fue evaluada por pares académicos experimentados en el área

Catalogación en la Fuente

Ecuaciones diferenciales. Teoría, práctica y resolución de problemas / Jaime Rodrigo Guilcapi Mosquera, Mayra Alexandra Viscaíno Cuzco, Freddy Geovanny Benalcázar Palacios - Ecuador: Editorial CIDE, 2025.

331 p.: incluye tablas, figuras; 21,6 x 29,7 cm.

ISBN: 978-9942-679-50-5

1. Ecuaciones diferenciales-resolución de problemas

UNIVERSIDAD TÉCNICA DE AMBATO

El hablar de Matemática es estar dispuesto al descubrimiento de lo desconocido en función del poder del razonamiento, más aún, si de por medio están las Ecuaciones Diferenciales, que nos permiten realizar modelaciones y simulaciones de cosas reales. He aquí su importancia en un estudiante de matemática del año 2025 mi saludo y mi admiración al saber.

Semblanza de los autores

Jaime Rodrigo Guilcapi Mosquera

https: //orcid.org/0000-0003-2994-2563

jr.guilcapi@uta.edu.ec

Obtuvo su título de Licenciado en ciencias de la educación de Física y Matemática en la Universidad Central del Ecuador en el año 1990, en el año 1998 doctor en matemática pura en la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo de Riobamba, en donde también en 2009 se graduó de Magíster en Matemática Aplicada Mención Modelación Matemática y Simulación Numérica. En 2001 obtuvo su título de Doctor en Ciencias de la Educación Especialidad Administración Educativa en la Escuela Politécnica Javeriana del Ecuador, en el 2002 Maestría en Docencia Universitaria y Administración Educativa en la Universidad Tecnológica Indoamericana de Ambato, obtuvo su título de Diplomado Superior en Proyectos y Transferencia de Tecnologías en la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo en 2011. Se ha desempeñado como docente en la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo, en la Facultad Ciencias, de Administración de Empresas, de Sistemas, de Mecánica, en la Universidad Nacional de Chimborazo en la Facultad de Ingeniería; en la Universidad Amazónica Facultad de Ingeniería; en la Universidad Técnica de Ambato en la Facultad de Ingeniería de Sistemas Electrónica e Industrial, impartiendo asignaturas relacionadas con el área de Matemáticas como: Álgebra Superior, Álgebra Lineal, Análisis Matemático I, Análisis

Matemático II, Cálculo Diferencial, Cálculo Integral, Cálculo Vectorial y Estadística. Docente de las Unidad Educativa San Felipe Neri y María Auxiliadora de Riobamba. Imparte programas de Maestrías en la UNACH-ESPOCH, ESPE sede Quito y UTA. Ha participado como investigador en el proyecto “Reconocimiento de Gestos de la Mano Usando Señales Electromiografías (EMG) e Inteligencia Artificial”, que buscan solucionar problemas de movilidad de los seres humanos. También ha participado en el desarrollo del proyecto de paneles solares a través del convenio de adhesión fondo avante para el desarrollo del programa de capacitación, denominado “construcción, instalación y validación de paneles solares como alternativa de desarrollo” entre la ESPOCH-UTA. Ha participado en la ejecución de proyectos de vinculación en la Universidad Técnica de Ambato, Proyecto de reciclaje de plástico para mejorar la educación pedagógica en la Unidad Educativa María Auxiliadora. Actualmente, trabaja en la Carrera de Ingeniería Telecomunicaciones de la Universidad Técnica de Ambato.

Mayra Alexandra Viscaíno Cuzco

https://orcid.org/0000-0003-4987-7797

ma.viscaino@uta.edu.ec

Obtuvo su título de ingeniera civil en la Universidad de Cuenca en el año 2009, en donde también se graduó de Magíster en Construcciones. En 2016 obtuvo su título de Magíster en Mantenimiento Industrial y en 2022, obtuvo su título de Magíster en Matemática Aplicada en la Universidad Técnica de Ambato. Se ha desempeñado como docente en la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo, en la Facultad de Mecánica y en la Universidad Técnica de Ambato en la Facultad de Ingeniería Civil y Mecánica, impartiendo asignaturas relacionadas con el área de Matemáticas como: Álgebra Superior, Álgebra Lineal, Análisis Matemático I, Análisis Matemático II, Cálculo Diferencial, Cálculo Integral, Cálculo Vectorial y Estadística. Ha participado como investigadora en proyectos que buscan solucionar problemas vinculados con la Ingeniería Civil e Ingeniería de Mantenimiento Industrial, a través de la implementación de modelos matemáticos. Los temas de interés en investigación son: la predicción de la resistencia a compresión del hormigón simple, el pronóstico de precipitaciones y la estimación de la fiabilidad de máquinas. Actualmente, trabaja en la Carrera de Ingeniería Civil de la Universidad Técnica de Ambato.

Freddy Geovanny Benalcázar Palacios

https://orcid.org/0000-0001-7641-3758

fg.benalcazar@uta.edu.ec

Obtuvo su título de Doctor en Física en la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo en el año 1997, en donde también se graduó de Magíster en Matemática Aplicada mención Modelación Matemática y Simulación Numérica en el año 2009. En el año 2008 obtuvo el Título de Magíster en Física Médica en el Instituto Balseiro - Universidad del Cuyo de Argentina. Se ha desempeñado como Físico Médico en los Hospitales Vicente Corral Moscoso y José Carrasco Arteaga de la ciudad de Cuenca. También se ha desempeñado como docente en la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo, en las Facultades de Ciencias y de Mecánica; y en la Universidad Técnica de Ambato en la Facultad de Ingeniería en Sistemas, Electrónica e Industrial, impartiendo asignaturas relacionadas con el área de la Física como: Física Básica, Física Aplicada, Física para Electrónica, Electromagnetismo y Estática, y Dinámica. Ha participado como investigador en proyectos que buscan solucionar problemas vinculados con la Matemática y Sistemas Computacionales, a través de la aplicación e implementación de modelos matemáticos. Los temas de interés en investigación son: la aplicación del Algoritmos de Machine Learning en el campo de detección temprana de problemas de salud y la generación de modelos matemáticos para el tratamiento de dichos problemas. Actualmente, trabaja en las Carreras de Telecomunicaciones y Automatización y Robótica de la Universidad Técnica de Ambato.

Dedicatoria

En la vida siempre debe existir el reto con respeto.

En la familia debe existir el don del Amor.

En el trabajo la gracia de DIOS.

En el estudio la humildad del saber.

En la gloria la dicha del triunfo.

Pensamientos sentidos para dedicarle a mi esposa Eulalia Zavala esta investigación razón de vida en las flores de su fruto y el mío, María Isabella, Andy. A mi madre Rosa Mosquera mis Hermanos Fausto, Wilson, Lorena, Libio, Guilcapi Mosquera, y por supuesto a mi padre en el cielo don Libio como siempre lo digo en mi corazón.

Jaime Guilcapi

A Dios, fuente de sabiduría y guía en cada paso de este camino. A mi amada familia, por su amor incondicional y constante apoyo, pilares fundamentales en mi vida. A mis estudiantes, cuya pasión por el aprendizaje inspira y da propósito a este esfuerzo compartido. Este libro es para ustedes, con la esperanza de que se convierta en una herramienta valiosa en su formación y desarrollo profesional.

Freddy Benalcázar

Dedico mi aporte en este trabajo a Dios, quien siempre me ha mostrado su fidelidad, abundante gracia e inmensurable misericordia; a mi amada familia quienes son mi mayor inspiración y a nuestros apreciados lectores.

Mayra Viscaíno

Índice

Capítulo 2
Resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) de primer orden y de primer grado

Capítulo 3
Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden

Capítulo 4
Aplicaciones de las ecuaciones diferenciales

Capítulo 5
Ecuaciones diferenciales de orden superior

Capítulo 6
Ecuaciones diferenciales lineales de orden n.

Índice de Figuras

Introducción

DEFINICIONES Y TERMINOLOGÍA

Ecuaciones diferenciales y derivadas parciales.

Orden de una ecuación diferencial.

Ecuaciones diferenciales lineales y no lineales.

Formal normal.

Solución de una ecuación ordinaria.

Soluciones explícitas e implícitas.

Solución trivial, familia de soluciones, solución singular.

PROBLEMAS DE VALORES INICIALES

Clasificación según el tipo.

Clasificación según el orden.

Clasificación según la linealidad.

MODELOS DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES

Es el desarrollo de las ecuaciones diferenciales en sus distintas manifestaciones físicas, químicas, económicas, otras.

La creatividad de la matemática está en el desarrollo mental de las aplicaciones, y la sabiduría en la humidad de hacer las cosas bien.

1

Introducción a las ecuaciones diferenciales

Capítulo
1

Introducción a las ecuaciones diferenciales

1.1 Contenido

- Definiciones y terminología.
- Clasificación de las ecuaciones diferenciales.
- Problemas de valores iniciales.
- Ecuaciones diferenciales como modelo matemático.

1.2 Objetivos

- Analizar el comportamiento de una ecuación diferencial en la resolución.
- Determinar las formas de una ecuación diferencial según su clasificación.
- Identificar las diferentes aplicaciones que tiene dentro de las ingenierías.

ACTIVIDAD 1

Responder a las siguientes inquietudes:

1. ¿Qué es una ecuación?
2. ¿Qué tipo de ecuaciones conoce?
3. ¿Cómo son los resultados de una ecuación?
4. ¿Cómo se convierte una ecuación en función?
5. ¿Qué tipo de funciones conoce?

1.3 Introducción

Las palabras ecuaciones diferenciales conducen a pensar en la solución de cierto tipo de igualdades que contienen derivadas; así como al estudiar álgebra, trigonometría y logarítmica, se invierte bastante tiempo en resolver ecuaciones:

Como:

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

Como:

$$senx + cosx = 0$$

Como:

$$log_3 x = 4$$

En el primer caso, el objetivo es encontrar el valor de la variable "x", en el segundo caso encontrar el ángulo "x", y en el caso de la función logarítmica el objetivo es encontrar el argumento "x", que satisfaga las igualdades indicadas; en este libro el objetivo será resolver ecuaciones diferenciales, como: $y'' + 2y' + y = 0$, en este caso la incógnita, no es una variable, sino la función $y = \emptyset(x)$.

1.3.1 Definición

Una ecuación diferencial, es una ecuación que contiene las derivadas de una o más variables dependientes con respecto a una o más variables independientes (Boyce y DiPrima, 2009). Estas ecuaciones se clasifican de acuerdo con el **tipo, orden y linealidad**, como se verá más adelante. En la siguiente tabla se indican los elementos que constituyen a una ecuación diferencial y las maneras en las que se puede expresar el término de la derivada.

Función	Derivada	Variable dependiente	Variable independiente
$f(x)$	$f'(x)$	y	x
y	y'	y	No puedo definir
$f(t)$	$\frac{dy}{dt}$	y	t
$y(t)$	$\frac{dy}{dt}$	y	t

La manera formal de expresar una ecuación diferencial es (Boyce & DiPrima, 2009; Zill, 2009; Spiegel, 1983):

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^n) = 0 \qquad (1)$$

1.3.2 Aplicación

Hallar $\frac{dy}{dx}$ de la función $y = e^{3x^2}$ definida $]-\alpha, \alpha[$.

Solución:

P1. Identificar qué tipo de función es, en este caso se trata de obtener la derivada de una función exponencial.

P2. Aplicar la regla correspondiente y obtener la derivada de la función $\frac{dy}{dx} = 6xe^{3x^2}$.

P3. Si se realiza el reemplazo de la función $y = e^{3x^2}$ en la derivada, se obtiene:

$$\frac{dy}{dx} = 6xy$$

Obsérvese que la derivada de la función $y = e^{3x^2}$, contiene en el resultado $\frac{dy}{dx} = 6xy$, a la variable dependiente "y", para muchos puede ser desconocido lo que esta expresión representa, pero se trata de una ecuación diferencial; ecuaciones como estas son el objeto de estudio de este libro. El objetivo siempre se enfoca en encontrar el valor de la función incógnita $y = \emptyset(x)$.

EJERCICIO RESUELTO

Dada la ecuación diferencial $f'(x) = 2f(x) + x$, escriba de manera formal e identifique la derivada y sus variables dependientes e independientes.

Solución:

P1. Escribir de manera formal la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = y' = 2y + x$$

P2. La derivada es y'.

P3. La variable dependiente es y.

P4. La variable independiente es x.

EJERCICIOS PROPUESTOS

Dada las ecuaciones diferenciales, escriba de manera formal e identifique la derivada y sus variables dependientes e independientes.

a. $\frac{dy}{dx} = 2y + 2x$

b. $xy''' - 5y' + 3 = 0$

1.4¿Qué significa resolver una ecuación diferencial?

Resolver una ecuación diferencial significa encontrar la función o las funciones que satisfacen la igualdad dada Apostol (2002). Los siguientes ejercicios resueltos, ilustran esta definición.

EJERCICIO RESUELTO 1

Sea la ecuación diferencial $y' - 2x = 0$, hallar la solución.

Solución:

P1. Determinar qué función hace válida esa igualdad.

P2. Probar algunas ecuaciones:

$$y = e^x \quad , y = 4 - 7x, \quad y = \sqrt{x^2 - 9}, \quad y = x^2$$

P3. Derivar cada una de las funciones hasta identificar la función que cumple con la ecuación diferencial propuesta, en este caso es $y = x^2 \rightarrow y' = 2x$.

$$y' - 2x = 0 \rightarrow 2x - 2x = 0$$

P4. Finalmente, la solución son todas las antiderivadas: $y = x^2 + c$.

NOTA. Si un problema tiene valor inicial, se le llama problema de Cauchy y en un problema con valor inicial es posible determinar el valor de C.

EJERCICIO RESUELTO 2

Sea la ecuación diferencial $y' - 2x = 0,\ y(0) = 1$, hallar la solución.

Solución:

P1. Determinar qué función hace válida esa igualdad.

P2. Probar algunas ecuaciones.

$$y = e^x \qquad , y = 4 - 7x, \quad y = \sqrt{x^2 - 9}, \quad y = x^2$$

P3. Derivar cada una de las funciones hasta identificar la función que cumple con la ecuación diferencial propuesta, en este caso es $y = x^2 \rightarrow y' = 2x$.

$$y' - 2x = 0 \rightarrow 2x - 2x = 0$$

P4. Finalmente, la solución son todas las antiderivadas: $y = x^2 + c$, que se le conoce como solución general.

P5. En este ejercicio se proporcionaron valores iniciales, lo que permite determinar una solución particular, para ello se deben sustituir los valores iniciales, $y(0) = 1 \rightarrow x = 0$, es decir $1 = (0)^2 + c \rightarrow c = 1$, en este caso la única solución es:

$$y = x^2 + 1$$

1.5 Clasificación de las ecuaciones diferenciales

Figura 1

Clasificación de las ecuaciones diferenciales.

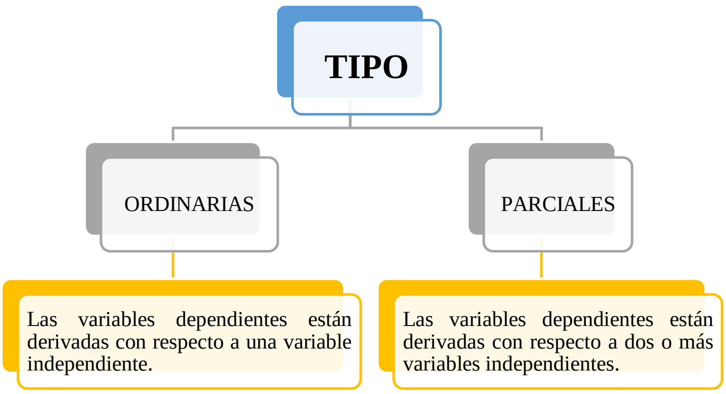


Figura 2

Orden de las ecuaciones diferenciales.

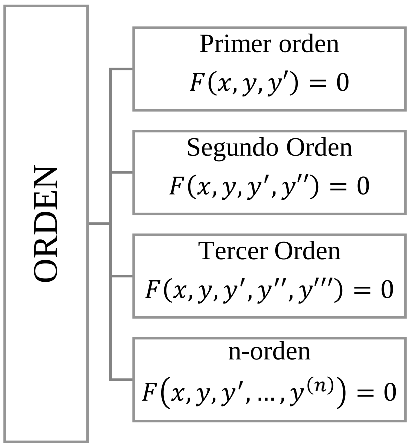
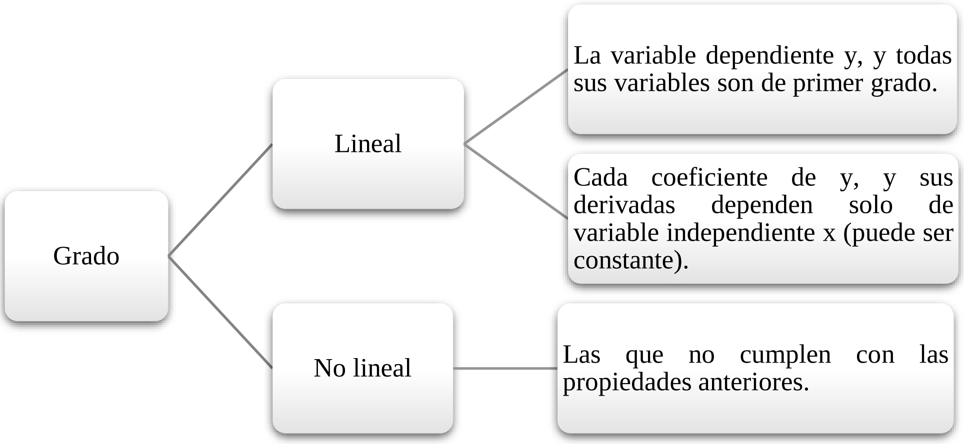


Figura 3

Grado de las ecuaciones.



- ✓ Ecuaciones diferenciales ordinarias y en derivadas parciales.
- ✓ Orden de una ecuación diferencial.
- ✓ Ecuaciones diferenciales lineales y no lineales.
- ✓ Forma normal.
- ✓ Solución de una ecuación ordinaria.
- ✓ Soluciones explícitas e implícitas.
- ✓ Solución trivial, familia de soluciones, solución singular.

Recuerde que en cálculo diferencial se aprendió que la derivada $\frac{dy}{dx}$ de una función $y = \emptyset(x)$ es otra función, representada por $y' = \emptyset'(x)$, que se la determina aplicando una regla adecuada.

1.6 Clasificación según el tipo

Si una ecuación solo contiene derivadas ordinarias de una o más variables dependientes con respecto a una sola variable independiente, entonces estas son **ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO)**, como las ecuaciones que se presentan a continuación:

1. $\frac{dy}{dx} + 4y = e^x$
2. $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + 8y = 0$
3. $\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = 3x + y$

En cambio, una ecuación que contiene las derivadas parciales de una o más variables dependientes, respecto de dos o más variables independientes se llama **ecuación diferencial en derivadas parciales (EDP)**, como las ecuaciones que se presentan a continuación:

1. $\frac{\partial^2 \mu}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mu}{\partial y^2} = 0$
2. $\frac{\partial^2 \mu}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \mu}{\partial t^2} + 2\frac{\partial \mu}{\partial t} = 0$
3. $\frac{\partial \mu}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$

Observación 1: Las derivadas ordinarias se las denotará con la representación de **Leibniz:**
$\frac{\boldsymbol{dy}}{\boldsymbol{dx}}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \dots, \frac{d^{(n)}y}{dx^n}$ (3)

"o" la notación con primas, y', y'', y''', con esta representación las primeras ecuaciones se escriben:

1. $y' + 4y = e^x$
2. $y'' - y' + 8y = 0$

Pero esta notación es válida hasta y''': de este valor en adelante se utilizan número arábigos, expresado de la siguiente manera $y^{(4)}, y^{(5)} \dots, y^{(n)}$, pero la mejor forma representativa dada es la forma de **Leibniz.** Ya que permite ver con claridad a las variables dependientes e independientes, como se muestra:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 16x = 0$$

En la ecuación anterior se observa que "x" es la variable dependiente y "t" la independiente.

Observación 2:

- En fenómenos físicos o "de ingeniería" se utiliza la representación de **Newton** o de puntos. Para indicar derivadas con respecto al tiempo. Así la ecuación diferencial,

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -32$$

  se transforma $\ddot{s} = -32$.

- En cambio, las derivadas parciales se representan con **subíndice,** que indica. Las variables independientes, por ejemplo:

$$\frac{\partial^2\mu}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\mu}{\partial t^2} - 2\frac{\partial\mu}{\partial t}$$

  Sería:

$$\mu_{xx} = \mu_{tt} - 2\mu_t$$

1.7 Aplicaciones de las ecuaciones diferenciales

Las ecuaciones diferenciales tienen muchas aplicaciones en Física (modelado de la mecánica), Química (modelado molecular), Biología (modelado del crecimiento de bacterias). En general, en cualquier Ingeniería. Un ejemplo particular es el análisis de población, que puede ser de: humanos, bacterias, animales u otros.

EJERCICIOS RESUELTOS DE MODELOS

1. Un conjunto de 100 bacterias crece con un ritmo de 10 bacterias más cada hora. ¿Cuántas bacterias hay después de 3 horas?

Solución:

P1. Es un modelo sencillo ya que el razonamiento lógico sería:

Número inicial de bacterias: 100

Primera hora: $100 + 10$

Segunda hora: $100 + 10 + 10 = 110 + 10$

Tercera hora: $100 + 10 + 10 + 10 = 120 + 10 = 100 + 30 = 130$

P2. El modelo general será:

Número inicial de bacterias: 100

Tiempo en horas: x

Crecimiento de bacterias: 10

$$y = 100 + 10x$$

2. Un conjunto de 100 bacterias crece con un ritmo de crecimiento de 10 bacterias por hora; además, "el crecimiento es proporcional a la población", esto quiere decir que se tienen 200 bacterias el crecimiento será de 20 bacterias por hora. Responder a las siguientes preguntas:

¿Cuántas bacterias hay después de 3 horas?

¿Cuántas bacterias hay después de 24 horas?

Solución:

P1. Con la información proporcionada, se plantean los siguientes modelos:

Caso 1

$$y = 100 + 10x$$

Caso 2.

$$y = 200 + 20x$$

P2. Construyendo una tabla de proporcionalidad

Tiempo	Población	Variación
0h	**100**	$\frac{100}{10} = 10$
1h	110	$\frac{110}{10} = 11$

P3. Los valores de la función para h=0 y h=1 son: $f(0) = 100;\ f(1) = 110$

P4. Por la condición se establece la proporcionalidad de crecimiento,

$$\left\{\begin{matrix} \frac{100}{10} = 10 \\ \frac{200}{20} = 10 \end{matrix}\right\}$$

P5. Modelando:

$$f(t) = f(t-1) + \frac{f(t-1)}{10} = \frac{11}{10} f(t-1)$$

$$f(1) = f(1-1) + \frac{f(1-1)}{10} = \frac{11}{10} f(1-1)$$

$$f(1) = f(0) + \frac{f(0)}{10} = \frac{11}{10} f(0)$$

$$f(1) = 100 + \frac{100}{10} = \frac{11}{10} * 100 = 110$$

Modelando para 4 horas:

$$f(4) = f(4-1) + \frac{f(4-1)}{10} = \frac{11}{10} f(4-1)$$

$$f(4) = 133 + \frac{133}{10} = \frac{11}{10} .133 = 146$$

P6. Construir la siguiente tabla:

Tiempo	Población	Variación
0h	100	$\frac{100}{10} = 10$
1h	110	$\frac{110}{10} = 11$
2	121	$\frac{121}{10} = 12{,}1$
3	133	$\frac{133}{10} = 13{,}3$
4	146	
….		
24	984	

1.7.1 Problema (ley del enfriamiento de Newton)

Tiene que ver con la velocidad de enfriamiento. Suponga que tiene una taza con té a una temperatura de 70°C y el ambiente al que se encuentra es 20°C; a medida que transcurre el tiempo, el té se va enfriando hasta llegar a coincidir con la temperatura del ambiente. Lo mismo ocurrirá con cualquier recipiente que “esté” por arriba o debajo de la temperatura ambiente; en tal caso el té tendrá que irse calentando hasta llegar a la temperatura ambiente. La inquietud será ¿Cuál es la temperatura después de 5 minutos?

Solución:

P1. Considere la taza de té a mayor temperatura 70°C, y suponga que en ese tiempo ahora es de 40°C. Es decir, disminuyó en 30°C. Aquí surge otra interrogante, ¿la taza que estaba a 40° será que ahora está a 10°?

P2. La respuesta es incorrecta ya que todos tienen que llegar a la temperatura ambiente, entonces la interrogante es ¿cuál es la temperatura al cabo de 5 minutos para la taza que está a 40°? Para resolverlo se utiliza ecuaciones diferenciales, pero se debe estar convencidos que será una temperatura mayor a 20° y menor a 40°.

P3. Se observa que se establece una proporcionalidad; según Zill (2009), la velocidad de enfriamiento de un cuerpo es proporcional a la diferencia de temperaturas entre el cuerpo y su entorno, lo que implica que, a mayor temperatura inicial, el enfriamiento ocurre más rápidamente, mientras que, a temperaturas más bajas, el calentamiento se produce con mayor rapidez.

CONCLUSIÓN: Pueden aparecer otras inquietudes como:

¿Cuál es su temperatura a los 10 minutos?

¿Cuánto tardará en enfriarse hasta 25°C?

1.8 Clasificación según el orden

Según el orden, las ecuaciones diferenciales se clasifican en ordinarias o en derivadas parciales, y se identifica por la derivada de mayor orden en la ecuación.

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Determinar el orden de la siguiente ecuación diferencial: $\frac{dy}{dx} - 3y = 0$.

Resp: Es una ecuación diferencial de orden 1.

2. Determinar el orden de la siguiente ecuación diferencial: $\frac{d^2y}{dx^2} + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - 3y = 0$.

Resp: Es una ecuación diferencial de orden 2.

3. Determinar el orden de la siguiente ecuación diferencial: $\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + 5\frac{d^5y}{dx^5} - 3y = 0$.

Resp: Es una ecuación diferencial de orden 5.

4. Determinar el orden de la ecuación diferencial: $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^{10} + 2\frac{dy}{dx} + 5\frac{d^5y}{dx^5} - 3y = 0$.

Resp: Es una ecuación diferencial de orden 5.

5. Determinar el orden de la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 7\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - 4y = e^x$$

Solución:
P1. Analizar la máxima derivada que tenga la ecuación:

$$\overbrace{\frac{d^2y}{dx^2}}^{\text{Segundo orden}} + 7\left(\overbrace{\frac{dy}{dx}}^{\text{Primer orden}}\right)^3 - 4y = e^x$$

P2. Por tanto, es una ecuación diferencial de segundo orden.

6. ¿Cuál es el tipo de ecuación, de cuántas variables depende y cuál es el orden?

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 2u$$

Solución:

P1. Ecuación en derivadas parciales, la función desconocida es $u(x, t)$.

P2. Las variables independientes de u es x, t.

P3. El orden de la ED está dado por el orden de la derivada, por tanto, es de primer orden.

7. ¿Cuál es el tipo de ecuación, de cuántas variables depende y cuál es el orden?:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial u}{\partial y} - u$$

Solución:

P1. Ecuación en derivadas parciales, la función desconocida es $u(x, y, t)$.

P2. Las variables independientes de u es x, y, t.

P3. Como el orden da la derivada es de segundo.

P4. Otra forma de escribir $u_t = u_{xx} - 2u_y - u$.

1.9 Notación de una ecuación diferencial ordinaria

Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden se escribe como:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

Ejemplo:

$$(y-x)dx + 4xdy = 0$$

De otra manera. Si se considera a "**y**" como la variable dependiente entonces $y' = \frac{dy}{dx}$, dando lugar a la expresión:

$$(y-x) + 4x\frac{dy}{dx} = \frac{0}{dx}$$

$$(y-x) + 4xy' = 0$$

$$4xy' + y - x = 0$$

En forma general, la ecuación diferencial de orden **"n"** en una variable dependiente se denota:

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0 \qquad (4)$$

F: representa una función de valor real de $(n+2)$ variables $\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right)$, en la que $y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n}$. En ocasiones prácticas se empleará $y^{(n)}$, con las $(n+1)$ variables restantes se escribe:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}\right) \qquad (5)$$

$\boldsymbol{f}$: es una función continua en los reales y se llama forma normal de (4).

Así, cuando sea conveniente se usarán las formas normales:

Primera orden:

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

Segundo orden:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x,y,y')$$

Tercer orden:

$$\frac{d^3y}{dx^3} = f(x,y,y',y''), \text{ etc.}$$

Así la ecuación diferencial $4xy' + y = x$ se representa como:

$$y' = \frac{x-y}{4x}$$

Es fácil entenderlo ya que se despeja el valor de y', así:

$$4xy' = x - y$$
$$y' = \frac{x-y}{4x}$$

1.10 Clasificación según la linealidad

Se dice que una ecuación diferencial de la forma (4) es lineal si F es lineal en $\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right)$ esto quiere decir que una ecuación diferencial ordinaria de orden "n" es lineal de la forma:

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y - g(x) = 0$$

O bien:

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x) \qquad (6)$$

Algunas características que tiene las ecuaciones diferenciales lineales son:

1. La variable dependiente y todas sus derivadas son de primer grado; esto es, que el exponente de todo término donde aparece "y" es uno.
2. Cada coeficiente sólo depende de "x", que es la variable independiente.

Aquí se presentan ejemplos de ecuaciones diferenciales lineales:

a. $(y-x)dx + 4xdy = 0$, es una ecuación diferencial lineal ordinaria de primer orden. Además, recuerde que $(y-x)dx + 4xdy = 0$, puede expresarle alternativamente como: $4xy' + y = x$.
b. $y'' - y' + 8y = 0$, es ecuación diferencial lineal de segundo orden "y".
c. $\frac{d^3y}{dx^3} + x\frac{dy}{dx} - 5y = e^x$, es ecuación diferencial de tercer orden.

Una ecuación diferencial ordinaria **no lineal** simplemente es aquella que no es lineal, las funciones no lineales de la variable dependiente o de sus derivadas, como por ejemplo $sen(y)$ o $e^{y'}$, no pueden aparecer en ninguna ecuación lineal, por consiguiente:

1. Analizar la ecuación:

Existe un término no lineal, y el coeficiente depende de "y".

$$(1-y)y' + 2y = e^x$$

$y' - yy' + 2y = e^x$, ecuación diferencial de primer orden.

2. Analizar la ecuación:

No es lineal cuando la variable dependiente está acompañada de una función trigonométrica.

$\frac{d^2y}{dx^2} + seny = 0$, ecuación diferencial de segundo orden.

3. Analizar la ecuación:

El exponente de la variable dependiente "y" no es uno.

$\frac{d^4y}{dx^4} + y^2 = 0$, ecuación diferencial de cuarto orden.

1.11 Solución de la ecuación diferencial ordinaria

Cualquier función $\emptyset$ definida en un intervalo **I** que posea al menos "n" derivadas continuas en **I**, que al sustituirse en una ecuación diferencial ordinaria de orden "n", se reduce la ecuación a una identidad, es una solución de la ecuación en el intervalo.

Intervalo de definición

El intervalo **I** tiene los nombres intervalo de definición, intervalo de existencia, intervalo de validez o dominio de la solución y puede ser un intervalo abierto (a, b), cerrado $[a, b]$, infinito (a, ∞).

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Compruebe que la función $y = \frac{x^4}{16}$ sea solución de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = xy^{\frac{1}{2}}$ en el intervalo $]-\infty, \infty[$.

Solución:

P1. Una forma de comprobar que la función dada es solución, si al sustituir las ecuaciones son equivalentes, para todo "x" en el intervalo.

P2. Lado izquierdo: $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{16}(4x^3) = \frac{x^3}{4}$

P3. Lado derecho**:** $xy^{\left(\frac{1}{2}\right)} = x\left(\frac{x^4}{16}\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)} = x\left(\frac{x^2}{4}\right) = \frac{x^3}{4}$

Otra forma para comprobar es:

P1. Establecer la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = xy^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{dy}{dx} - xy^{\frac{1}{2}} = 0$$

P2. Derivar la función $y = \frac{x^4}{16}$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{16}(4x^3) = \frac{x^3}{4}$$

P3. Sustituir el resultado del paso P2 en el paso P1:

$$\frac{dy}{dx} - xy^{\frac{1}{2}} = 0$$

$$\frac{x^3}{4} - x\left(\frac{x^4}{16}\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)} = 0$$

Resolver:

$$\frac{x^3}{4} - \frac{x^3}{4} = 0$$

$$0 = 0$$

Verificando que es solución.

2. Compruebe que la función $y = xe^x$ es solución de la ecuación diferencial $y'' - 2y' + y = 0. E$n el intervalo $]-\infty, \infty[$

Solución:

P1. Se determina primero las derivadas de $y'e\ y''$, de la función $y = xe^x$. Aplicar logaritmos a la ecuación y aplicar sus propiedades:

$$lny = lnxe^x$$

$$lny = lnx + lne^x$$

$$lny = lnx + x$$

Derivar:

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{x} + 1$$

$$y' = y\left(\frac{1}{x} + 1\right)$$

Sustituir el valor de "y":

$$y' = xe^x\left(\frac{1}{x} + 1\right) = e^x + xe^x$$

De igual manera se determina la segunda derivada:

$$y'' = xe^x + 2e^x$$

para todo "x" en el intervalo. Sustituyendo sus valores se tiene:

$$y'' - 2y' + y = xe^x + 2e^x - 2(xe^x + e^x) + xe^x = 0$$

Eliminado los términos semejantes en el lado derecho, se tiene el valor de "0".

Conclusión $LI = LD \ \therefore\ 0 = 0$; por tanto, sí es solución.

Nota: La solución de una ecuación diferencial que es idéntica a cero en un intervalo **I**, se llama solución trivial.

OBSERVACIÓN

La gráfica de una solución φ de una ecuación diferencial ordinaria se llama **curva solución.** Como φ es una función diferenciable, entonces es continua en su intervalo de definición **I**. Por consiguiente, puede haber una diferencia entre la gráfica de la función φ y la gráfica de la solución φ. Dicho de otra manera, el dominio de la función φ no necesita ser igual al intervalo de definición.

ACTIVIDAD 2

Verificar si la función es solución de la ecuación diferencial.

1. La función $y = \frac{senx}{x}$ es solución de $xy\acute{} + y = cosx$.
2. La función $y = x\left(\int \frac{e^x}{x} dx + C\right)$ es solución de $xy' - y = xe^x$.
3. La función $y = \frac{C}{cosx}$ es solución de $y' - ytagx = 0$.
4. La función $y = -\frac{1}{3x+C}$ es solución de $y' = 3y^2$.
5. La función $y = e^x \int_0^x e^{t^2} dt + Ce^x$ es solución de $y' - y = e^{x+x^2}$.

EJERCICIOS PROPUESTOS

Verificar si la función es solución de la ecuación diferencial.

1. La función $y = e^{arc(senx)}$ es solución de $xy\acute{} = ytan(lny)$.
2. La función $y = \sqrt{x^2 - Cx}$ es solución de $(x^2 + y^2)dx - 2xydy = 0$.
3. La función $\begin{cases} y = t(1 + sent) + cost \\ x = lnt + sent \end{cases}$ es solución de $x = lny\acute{} + seny\acute{}$.
4. La función $x = ye^{cy+1}$ es solución de $y\acute{} = \frac{y}{x(lnx - lny)}$.
5. La función $x^3 - 4x^2y + 2xy^2 - y^3 = 0$ es solución de
   $(3x^2 - 8xy + 2y^2)dx - (4x^2 - 4xy + 3y^2)dy = 0$.

APORTE AL RAZONAMIENTO

EJERCICIO DE ANÁLISIS

Aplicación: Dominio contra intervalo de definición

Considere la función $y = \frac{1}{x}$, válida para todos los valores reales “x”, excepto 0, que, al graficar mediante un muestreo cuidadoso, pueda determinar la ecuación diferencial.

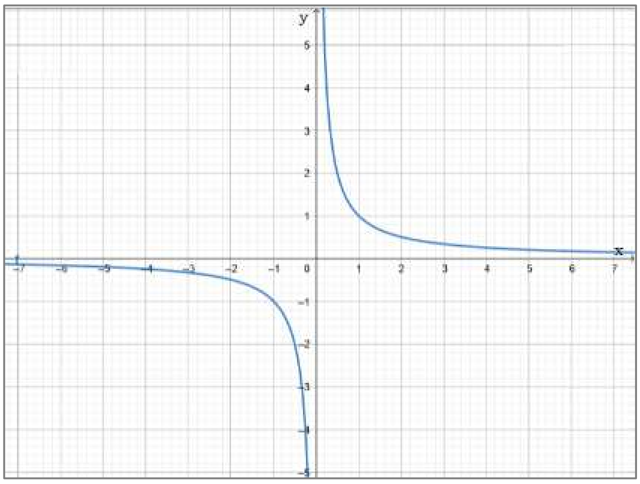
Solución:

Deben entenderse claramente que en $x = 0$, existe una asíntota vertical, dado que no hay división para cero.

P1. Trazar la gráfica de $f(x) = \frac{1}{x}$

Figura 4
Representación del Dominio.

x	f(x)	x	f(x)
-3	-0.333	0	
-2.75	-0.364	0.125	8.000
-2.5	-0.400	0.25	4.000
-2	-0.500	0.5	2.000
-1.75	-0.571	0.75	1.333
-1.5	-0.667	1	1.000
-1.25	-0.800	1.25	0.800
-1	-1.000	1.5	0.667
-0.75	-1.333	1.75	0.571
-0.5	-2.000	2	0.500
-0.25	-4.000	2.5	0.400
-0.125	-8.000	2.75	0.364
0		3	0.333



P2. Por otra parte $y = \frac{1}{x}$, es una solución de la ecuación diferencial lineal de primer orden de:

$$xy' + y = 0$$

P3. Aclarando que la restricción del intervalo es cualquier punto que no involucre a cero. Derivando la función $y = x^{-1}$, se tiene $y' = (-1)x^{-2}dx$.

Luego, sustituir en la ecuación diferencial y se tendrá la igualdad:

$$xy' + y = 0$$

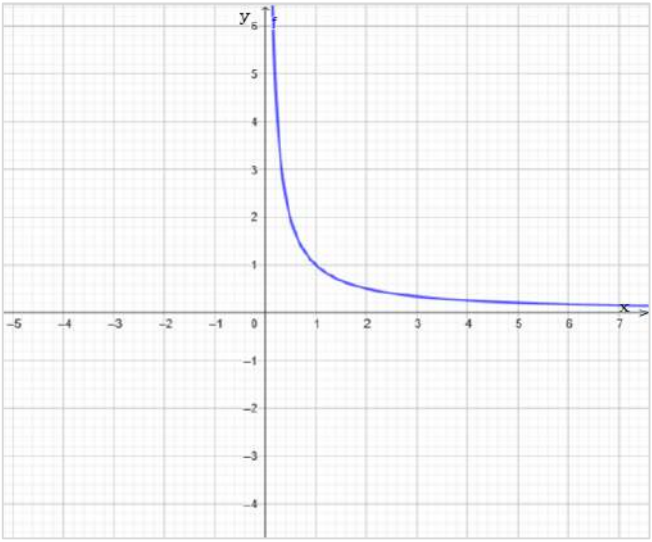
$$x(-x)^{-2} + \frac{1}{x} = 0$$

$$-\frac{1}{x} + \frac{1}{x} = 0$$

$$0 = 0$$

P4. Por ejemplo, el lado derecho de la función es una comprobación de la ecuación diferencial está bien determinada.

Figura 5
Comportamiento derecho.



x	f(x)
0	
0.125	8.000
0.25	4.000
0.5	2.000
0.75	1.333
1	1.000
1.25	0.800
1.5	0.667
1.75	0.571
2	0.500
2.5	0.400
2.75	0.364
3	0.333

1.12 Soluciones explícitas e implícitas

El objetivo de esta sección es identificar las funciones explícitas e implícitas con criterio lógico, para ello es importante las siguientes definiciones:

1. Función explícita: cuando la solución de la variable dependiente se expresa tan sólo en términos de la variable independiente, por ejemplo, para la forma $y = \varphi(x)$, es posible manejar, evaluar y diferenciar empleando las reglas establecidas (Apóstol, 2002).

2. Función implícita: cuando las funciones no llevan a la forma $y = \varphi(x)$. Especialmente cuando se trata de resolver ecuaciones diferenciales no lineales de primer orden, se toma la forma $G(x, y) = 0$, que defina una solución de $\varphi(x)$ implícitamente (Apóstol, 2002).

3. Otra definición de **función implícita**, indica que una relación $G(x, y) = 0$ es una solución implícita de una ecuación diferencial ordinaria. Sí $F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$, en un intervalo **I.** Siempre que exista al menos una función $\varphi(x)$ que satisfaga tanto la relación como la ecuación diferencial en **I (**Zill, 2009).

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Verificar si la relación $x^2 + y^2 = 25$ es una solución implícita de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$, en el intervalo (-5,5).

Solución:

P1. Aplicar la definición de derivada implícita para obtener:

$$\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dy}y^2 = d(25)$$

Es decir, derivando con respecto a la variable que se indica, se obtiene:

$$2x + 2yy\acute{} = 0$$

Despejar $y\acute{}$, de la ecuación:

$$y\acute{} = -\frac{2x}{2y}$$

Sustituir el valor de:

$$\frac{dy}{dx} = y\acute{}$$

Queda demostrado, que:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

P2. Por tanto, toda expresión de la forma $x^2 + y^2 = c, c \geq 0$ satisface normalmente este tipo de ecuaciones.

2. Demuestre que $u(x,t) = t + \frac{x^2}{2}$ es una solución para la ecuación del calor $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

Solución: Para demostrar lo que se pide, se debe realizar la derivada parcial con cada una de las variables por separado.

P1. Calcular $\frac{\partial u}{\partial t}$, en este caso "$x$" es constante:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = dt + d\frac{x^2}{2}$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = 1$$

P2. Calcular $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, en este caso "$t$" es constante:

Primera derivada:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = dt + d\frac{x^2}{2}$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = x$$

Segunda derivada:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial^2 x} = 1$$

P3. Sustituir los resultados en:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$1 = 1$$

P4. Obtenida una igualdad, se concluye que sí es solución de la ecuación del calor.

3. Demuestre que las siguientes funciones son soluciones de la ecuación de Laplace $u(x,y) = e^x cosy$.

La ecuación del Laplace es $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, otras formas de representar:

$$\Delta u = 0$$

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

En forma nafla $\nabla^2 = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

Solución: para demostrar lo que se pide, se debe realizar la derivada parcial con cada una de las variables por separado.

P1. Calcular $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, en este caso "$y$" es constante de la primera función:

$$u(x,y) = e^x cosy$$

Primera derivada:

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = de^x cosy$$

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = e^x cosy$$

Segunda derivad:

$$\frac{\partial u^2(x,y)}{\partial x^2} = de^x cosy$$

$$\frac{\partial u^2(x,y)}{\partial x^2} = e^x cosy$$

P2. Calcular, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, en este caso "$x$", es constante de la primera función:

$$u(x,y) = e^x cosy$$

Primera derivada:

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = de^x cosy$$

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = -e^x seny$$

Segunda derivada:

$$\frac{\partial u^2(x,y)}{\partial y^2} = de^x seny$$

$$\frac{\partial u^2(x,y)}{\partial y^2} = -e^x cosy$$

P3. Sustituir, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$

$$0 = e^x cosy - e^x cosy$$

Se concluye que sí es solución.

EJERCICIOS PROPUESTOS

Demuestre que las siguientes funciones son soluciones de la ecuación de Laplace:

1. $u(x,y) = e^x cosy$
2. $u(x,y) = 2 + x^2 - y^2$
3. $u(x,y) = ln(x^2 + y^2)$

1.13 Familias de soluciones

El estudio de ecuaciones diferenciales es semejante a la del cálculo integral. A veces, a una solución φ se le llama **integral** de la ecuación y a su gráfica, **curva integral** o **curva solución**.

En el cálculo, al evaluar una antiderivada o una integral indefinida, se emplea una sola constante **c** de integración, en forma similar, al resolver una ecuación diferencial de primer orden:

$$F(x,y,y') = 0$$

En general. Se tiene una solución con una sola constante arbitraria o parámetro **c**. Una solución con una constante arbitraria representa un conjunto de soluciones:

$$G(x,y,c) = 0$$

y se llama **familia monoparamétrica de soluciones.**

Al resolver una ecuación diferencial del orden:

$$F\left(x,y,y',y'',\dots,y^{(n)}\right) = 0$$

se busca una **familia n-paramétrica de soluciones:**

$$G(x, y, c_1, c_2, \dots, c_n) = 0$$

Esto indica que una sola ecuación diferencial puede tener una cantidad infinita de soluciones que corresponden a las elecciones ilimitadas del parámetro o parámetros.

Solución particular:

Cuando la ecuación diferencial no tiene parámetros arbitrarios, este concepto se ilustrará con el siguiente ejemplo:

1.14 Problemas modelo y propuestos

EJERCICIO RESUELTO

1. Comprobar que la familia monoparamétrica $y = cx - xcos(x)$, es una solución explícita de la ecuación lineal de primer orden $xy' - y = x^2 senx$, en el intervalo $]-\infty, \infty[$.

Solución:

P1. Se habla de una **solución singular** cuando la ecuación diferencial posee una solución que no es miembro de una familia de soluciones, por ejemplo, se tiene que $y = \frac{x^4}{16}$, e $y = 0$ son soluciones de la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = xy^{\frac{1}{2}} \text{ . En el intervalo }]-\infty, \infty[$$

P2. Se demostrará que esta ecuación posee la familia monoparamétrica de soluciones:

$$y = \left(\frac{x^2}{4} + c\right)^2$$

Cuando $c = 0$, la solución particular resultante es $y = \frac{x^4}{16}$, pero observe que la solución trivial $y = 0$, es una solución singular, debido a que no es miembro de la familia $y = \left(\frac{x^2}{4} + c\right)^2$ no hay forma de asignar un valor constante c para obtener $y = 0$.

2. De las ecuaciones planteadas, indique cuál de ellas representa una ecuación ordinaria y cuáles ecuaciones diferenciales parciales.

a. $m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$, donde $k = mw^2$

b. $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}=0$

c. $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+p(p+1)y=0$

d. $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$

Solución:

Los literales a y c son ecuaciones diferenciales ordinarias que cumplen con la condición de que, si una ecuación sólo contiene derivadas ordinarias de una o más variables dependientes con respecto a una sola variable independiente, entonces estas son **ecuaciones diferenciales ordinarias.**

Los literales b y d son ecuaciones diferenciales parciales que cumplen con la definición de que, una ecuación que contiene las derivadas parciales de una o más variables dependientes, respecto de dos o más variables independientes se llama **ecuación diferencial en derivadas parciales.**

3. Determine cuál es el orden de las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias.

a. $e^x\frac{d^2y}{dx^2}+senx\frac{dy}{dx}=x$
b.
c. $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2-2\left(\frac{dy}{dx}\right)^4+xy=0$

Solución:

a. $e^x\frac{d^2y}{dx^2}+senx\frac{dy}{dx}=x,$ ecuación diferencial de segundo orden y de primer grado.

b. $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2-2\left(\frac{dy}{dx}\right)^4+xy=0,$ ecuación diferencial de tercer orden y de grado dos.

4. Verificar que las funciones $y_1=e^x,\ y_2=coshx$ son soluciones de la ecuación diferencial

$$y''-y=0$$

Solución:

P1. Considerar la función, $y_1=e^x$ su primera deriva es $y'_1=e^x$, su segunda derivada

$$y''_1=e^x.$$

P2. Sustituyendo en la ecuación:

$$y'' - y = 0$$

$$e^x - e^x = 0$$

P1. Considerar la función, $y_2 = coshx$ su primera deriva es $y'_2 = senhx$, su segunda derivada $y''_2 = coshx$. Reemplazando en $y'' - y = 0$ se tiene $coshx - coshx = 0$

5. Verificar que la función $y = \varphi(x) = e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt + e^{x^2}$ es solución de la ecuación diferencial $y' = 2xy + 1$.

Solución:

P1. Hallar la primera derivada de $y = \varphi(x) = e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt + e^{x^2}$. Entonces,

$$y' = e^{x^2}d\int_0^x e^{-t^2}dt + \int_0^x e^{-t^2}dtde^{x^2} + de^{x^2}$$

$$y' = \varphi'(x) = e^{x^2}.e^{-x^2} + 2xe^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt + 2xe^{x^2}$$

NOTA: Por el teorema fundamental del cálculo $\int_0^x e^{-t^2}dt = e^{-x^2}$

P2. Reducir términos semejantes para tener: $y' = \varphi'(x) = 2xe^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt + 1 + 2xe^{x^2}$

P3. Reemplazar la primera derivada en $y' = 2xy + 1$, se obtiene:

$$2xe^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt + 1 + 2xe^{x^2} - 2x\left(e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt + e^{x^2}\right) = 1$$

$$2xe^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt + 1 + 2xe^{x^2} - 2xe^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt + e^{x^2} - 2xe^{x^2} = 1$$

$$1 = 1$$

P4. Se concluye que sí es solución la función.

6. Encontrar la ecuación diferencial cuya solución general es $y = C_1cos(x + C_2)$.

Solución:

P1. Se debe determinar que la derivada más la función dada sea cero; por tanto, se parte de la función $y = C_1 cos(x + C_2)$, y de esta determinar su primera derivada.

$$y' = -C_1 sen(x + C_2)$$

Si se suma la función con la derivada no se anula, como puede verificarse.

P2. Derivar otra vez $y'' = -C_1 cos(x + C_2)$, se observa que con este valor se anula:

$$y'' + y = 0$$

7. Encontrar la ecuación diferencial cuya solución general es $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x}$.

Solución:

P1. Determinar que su derivada más la función dada sea cero:

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x}$$

P2. Antes de proceder a realizar las derivadas, dejar a C_1 sin variable así:

$$y = \frac{C_1}{e^x} + C_2 e^{-3x}$$

$$ye^x = C_1 + C_2 e^{-2x}$$

P3. Derivar en forma implícita:

$$yde^x + e^x dy = dC_1 + C_2 de^{-2x}$$

$$ye^x dx + e^x dy = -2C_2 e^{-2x} dx$$

$$ye^x + e^x y' = -2C_2 e^{-2x}$$

P4. Igual que en el paso **P2**, se deja a C_2 sin variable:

$$ye^x + e^x y' = \frac{-2C_2}{e^{2x}}$$

$$ye^{3x} + e^{3x} y' = -2C_2$$

P5. Derivando por segunda vez se tiene:

$$yde^{3x} + y'de^{3x} + e^{3x}dy + e^{3x}dy' = -d2C_2$$

$$3ye^{3x} + 3y'e^{3x} + e^{3x}y' + e^{3x}y'' = 0$$

$$3y'e^{3x} + e^{3x}y'' + 3e^{3x}y + e^{3x}y' = 0$$

Eliminando, e^{3x}se tiene,

$$3y' + y'' + 3y + y' = 0$$

Reduciendo términos semejantes:

$$3y' + y'' + 3y + y' = 0$$

$$y'' + 4y' + 3y = 0$$

A continuación, se presenta otra forma de solucionar:

P1. Encontrar sus derivadas primera y segunda:

$$\begin{cases} y = C_1e^{-x} + C_2e^{-3x} \\ y' = -C_1e^{-x} - C_2e^{-3x} \\ y'' = C_1e^{-x} + 9C_2e^{-3x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -y + C_1e^{-x} + C_2e^{-3x} = 0 \\ -y' - C_1e^{-x} - C_2e^{-3x} = 0 \\ -y'' + C_1e^{-x} + 9C_2e^{-3x} = 0 \end{cases}$$

P2. El sistema tiene solución si el determinante es igual a cero, en efecto:

$$\begin{vmatrix} -y & e^{-x} & e^{-3x} \\ -y' & -e^{-x} & -3e^{-3x} \\ -y'' & e^{x} & 9e^{-3x} \end{vmatrix} = 0$$

$$9ye^{-4x} + 3y''e^{-4x} - y'e^{-4x} - y''e^{-4x} - 3ye^{-4x} + 9y'e^{-4x} = 0$$

$$6ye^{-4x} + 2y''e^{-4x} + 8y'e^{-4x} = 0$$

$$2e^{-4x}(3y + y'' + 4y') = 0$$

$$y'' + 4y' + 3y = 0$$

8. Encontrar la ecuación diferencial de la familia de parábolas. Las que tienen su vértice en el origen y sus focos sobre el eje "y".

Solución:
P1. La ecuación de esta familia de parábolas es:

$$x^2 = 4py \qquad (1)$$

P2. Donde los elementos desde el punto de la geometría analítica.

El vértice es $V\ (0,0)$ y el foco $F\ (0, p)$.

P3. Como el parámetro es p, es decir es una constante; entonces se despeja:

$$\frac{x^2}{y} = 4p$$

P4. Eliminar el término 4p, por ser constante, es decir su derivada es cero:

$$\frac{2xy - x^2 y'}{y^2} = 0$$

P5. Realizando las operaciones algebraicas, se obtiene:

$$\frac{x(2y - xy')}{y^2} = 0$$

$$x(2y - xy') = 0$$

P6. Aplicando la ley del anulamiento: $a * b = 0$.

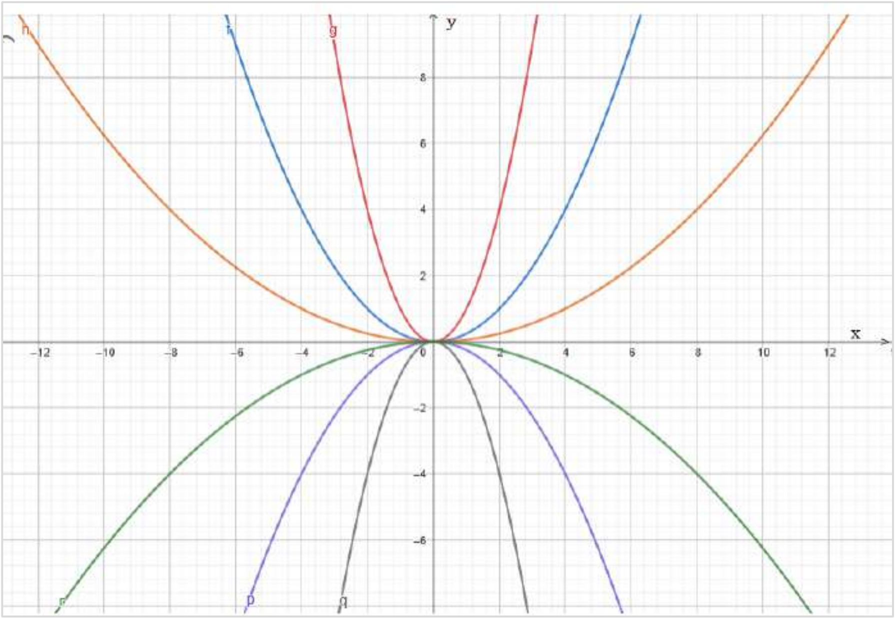
$$x = 0 \quad o \quad 2y - xy' = 0$$

P7. La ecuación diferencial solicitada es:

$$xy' = 2y$$

P8. De acuerdo con estos datos la gráfica pedida es:

Figura 6
Familia de parábolas.



1.15 Aplicación de las ecuaciones diferenciales a problemas físicos

Se debe considerar que un problema de este tipo proviene de diferentes fuentes las cuales pueden ser mecánicas, eléctricas, químicas, etc.

EJERCICIOS RESUELTOS

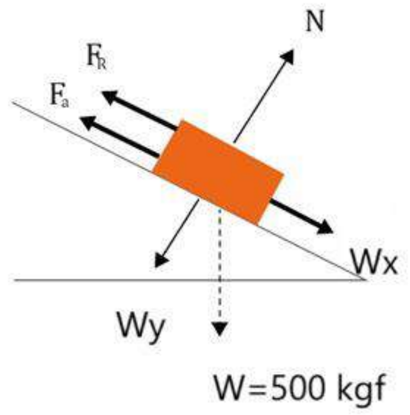
1. Se sabe que los objetos en caída libre cercanos a la superficie de la tierra tienen una aceleración constante $\boldsymbol{g}$. Ahora, la aceleración es la derivada de la velocidad $\boldsymbol{v}$ y esta a su vez, es la derivada de la distancia $\boldsymbol{s}$. Si se considera la posición vertical hacia arriba como positiva, se tiene $\frac{d^2s}{dt^2} = -g$, que representa la ecuación diferencial de la distancia vertical recorrida por el cuerpo que cae.

Observación: se da el signo menos, puesto que el peso del cuerpo es una fuerza de dirección opuesta a la dirección positiva de la gravedad.

2. Una lancha que pesa 500 kgf se desliza por un plano inclinado 5º. Si la fuerza de rozamiento que se opone al movimiento es de 20 kgf y la resistencia del aire expresado en kilogramos fuerza equivale a 0.05 veces la velocidad en centímetros por segundo, hallar la ecuación del movimiento.

Solución:

Figura 7
Representación de las fuerzas.



En la Figura 7, se muestra a la lancha sobre un plano inclinado del cual se pueden extraer los siguientes datos:

F= Componente de peso en la dirección del movimiento.

F_R=Fuerza de rozamiento.

F_a=Resistencia del aire.

P2. Por la segunda ley de Newton se tiene la suma de fuerzas en la dirección del movimiento=(masa)(aceleración); es decir se tiene:

$$\boldsymbol{W_x - F_R - F_a = m.a} \qquad (6)$$

Donde $Wx = 500kgfsen5° = 43{,}6\ kgf$

$F_R = 20$ kgf

$F_a = 0{,}05v$

$$m = \frac{500}{981}$$

P3. Tomando en cuenta que se tiene los valores de: v=velocidad, a=aceleración y m=masa se reemplazan los datos en (6).

$$\boldsymbol{F_y - F_R - F_a = m.a}$$

$$43{,}6 - 20 - 0{,}05v = \frac{500}{981}a$$

$$23{,}6 - 0{,}05v = \frac{500}{981}a$$

P3. La aceleración se define $a = \frac{dv}{dt}$, por lo que la ecuación (2) se transforma:

$$\frac{500}{981}\left(\frac{dv}{dt}\right) + 0{,}5v = 23{,}6$$

Conclusión: Es la ecuación diferencial del movimiento.

3. Según la ley del enfriamiento de Newton, la velocidad a la que se enfría una sustancia al aire libre es proporcional a la diferencia entre la temperatura de la sustancia y la del aire, obtener la ecuación diferencial respectiva.

Solución:

P1. Considerar los siguientes datos:

T = Temperatura de la sustancia en el instante **t.**

T_a= Temperatura del aire.

$\frac{dT}{dt}$ = Velocidad a la que se enfría una sustancia.

P2. De esta última condición se tiene:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_a), k > 0$$

Conclusión: La ecuación obtenida, es la ecuación diferencial pedida, donde k es la constante de proporcionalidad.

Observación: El signo menos, se debe a que la temperatura de la sustancia disminuye al transcurrir el tiempo.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Determinar el orden de las siguientes ecuaciones diferenciales.

   a. $x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + 2y = senx$
   b. $(1 + y^2)\frac{d^2y}{dx^2} + 3x\frac{dy}{dx} + 5y = 2e^x$
   c. $\frac{d^4y}{dx^4} - 3\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + 6y = 1$
   d. $\frac{dy}{dx} + 5xy^2 = 0$

2. Encontrar la ecuación diferencial cuya solución general es la familia de circunferencias:
$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

en el plano xy, siendo $a, b, r \epsilon \mathbb{R}$.

Resp. $(1+y^2)y''' = 3y'.y''$

3. Hallar la ecuación diferencial de la familia de circunferencias en el primer cuadrante, tangentes a las rectas $x = 0$ y $y = 2x$.

   Resp. $\left(x-\left(\sqrt{5}-2\right)y\right)^2(1+y'^2) = \left[\left(\sqrt{5}-2\right)(x+xy')\right]^2$

4. Considere el circuito en serie que consta de un inductor, un resistor y un capacitor. La segunda ley de Kirchoff dice que la suma de las caídas de voltaje a través de cada uno de los componentes del circuito es igual a la tensión E(t) aplicada. Si se llama q(t) a la carga del capacitor en un instante cualquiera, entonces la corriente i(t) determine la ecuación diferencial.
   Resp. $L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = E(t)$

5. De las opciones de la siguiente tabla aparee la ecuación diferencial con su solución general:

Problemas	Soluciones
$y = x^2 + C_1e^x + C_2e^{-2x}$	$y''' + y' - 2y = 2(1+x-x^2)$
$y = C_1e^{2x}cos3x + C_2e^{2x}sen3x$	$y'' - 4y' + 13y = 0$
$y = e^{x^2}\left(C_1 + C_2\int e^{-x^2}dx\right)$	$y'' - 2xy' - 2y = 0$
$y = C_1x + C_2e^{-x}$	$(x+1)y'' + xy' - y = 0$

6. Encontrar la ecuación diferencial de la familia de rectas que pasan por el origen.
   Resp. $xy' - y = 0$

Resolución de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO) de primer orden y de primer grado

2

Capítulo
2

Resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) de primer orden y de primer grado

A las ecuaciones diferenciales de este tipo se las representa, como: $\boldsymbol{F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0}$ (1).
Esta ecuación no indica la relación entre la variable independiente "x", la variable dependiente "y", y su derivada $\left(\frac{dy}{dx}\right)$.

De la ecuación diferencial $\boldsymbol{F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0}$, despejar la derivada para obtener $\frac{dy}{dx} = g(x, y)$.

2.1 Objetivo

- Determinar los distintos métodos de resolver las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden y de primer grado.
- Identificar el método apropiado de resolución conociendo la ecuación.
- Analizar su campo de aplicación en la ingeniería.

2.2 Métodos de resolución

1. **Ecuación diferencial de variable separable**

$$M(x)dx + N(y)dy = 0$$

2. **Ecuación diferencial reducible a variable separable**

   $\frac{dy}{dx} = f(ax + by + c)$, sustitución $z = ax + by + c$

3. **Función homogénea $\boldsymbol{f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k f(x, y)}$.**

   Aplicar $\boldsymbol{u = \frac{y}{x}; y = ux; dy = udx + xdu}$

4. **Funciones Reducibles a homogéneas**
   - Si tiene la forma $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right)$, si son paralelas no aplica.
   - Si no son homogéneas se aplica $y = z^{\alpha}$.

5. **Funciones Exactas**

   Comprobar que se cumpla: $\frac{\boldsymbol{\partial M(x,y)}}{\boldsymbol{\partial y}} = \frac{\boldsymbol{\partial N(x,y)}}{\boldsymbol{\partial x}}$

6. **Factor de Integración $\boldsymbol{u = e^{-\int f(x)dx}}$; $\boldsymbol{u = e^{-\int f(y)dy}}$**

2.3 Primer método de resolución

2.3.1 Ecuaciones diferenciales ordinarias de variable separable

Se parte de la ecuación diferencial ordinaria de primer orden y de primer grado:

$$\frac{dy}{dx} = g(x, y)$$

Y se la expresa en la forma:

$$M(x)dx + N(y)dy = 0 \qquad (2)$$

Donde M es una función sólo de x y N es una función sólo de y, entonces a la ecuación (2) se denomina **ecuaciones diferenciales ordinarias de variable separable** y la solución general se obtiene por integración directa, es decir:

$$\int M(x, y)dx + \int N(x, y)dy = \int 0dx$$

Donde se tiene:

$$\int M(x, y)dx + \int N(x, y)dy = C$$

donde C es la constante de integración.

EJERCICIOS RESUELTOS:

1. Resolver la siguiente ecuación diferencial $(y^2+xy^2)\frac{dy}{dx}+(x^2-x^2y)=0$

Solución:

P1. Expresar en la forma:

$$M(x)dx+N(y)dy=0$$

$$(y^2+xy^2)dy+(x^2-x^2y)dx=0$$

realizar la separación de variables:

$$y^2(1+x)dy+x^2(1-y)dx=0$$

$$y^2(1+x)dy=-x^2(1-y)dx$$

$$\frac{y^2dy}{(1-y)}+\frac{x^2dx}{(1+x)}=0$$

P2. Integrar,

$$\int\frac{y^2dy}{(1-y)}+\int\frac{x^2dx}{(1+x)}=\int 0dx$$

Para facilitar la integral dividir los polinomios,

$$\begin{Bmatrix}\dfrac{y^2}{(1-y)}=-y-1+\dfrac{1}{1-y}\\ \dfrac{x^2}{(1+x)}=x-1+\dfrac{1}{x+1}\end{Bmatrix}$$

Sustituyendo:

$$-\int y\,dy-\int dy+\int\frac{dy}{1-y}+\int xdx-\int dx+\int\frac{dx}{x+1}=\int 0dx$$

$$-\frac{y^2}{2}-y-ln(1-y)+\frac{x^2}{2}-x+ln(1+x)=K$$

$$\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}-x-y+ln(1+x)-ln(1-y)=K$$

$$\frac{x^2-y^2}{2}-(x+y)+ln\left(\frac{1+x}{1-y}\right)=K$$

$$(x^2 - y^2) - 2(x + y) + 2ln\left(\frac{1 + x}{1 - y}\right) = 2K$$

$$(x + y)(x - y) - 2(x + y) + 2ln\left(\frac{1 + x}{1 - y}\right) = 2K$$

$$(x + y)(x - y - 2) + 2ln\left(\frac{1 + x}{1 - y}\right) = C$$

$$ln\left(\frac{1 + x}{1 - y}\right) = \frac{C - (x + y)(x - y - 2)}{2}$$

$$\left(\frac{1 + x}{e^{\frac{C-(x+y)(x-y-2)}{2}}}\right) = 1 - y$$

$$y = 1 - \left(\frac{1 + x}{e^{\frac{C-(x+y)(x-y-2)}{2}}}\right)$$

Se entiende que es una función implícita.

2. Resolver la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = (1 + y^2).\, e^x$

Solución:

P1. Expresar en la forma $M(x)\, dx + N\,(y)\, dy$ =0. En efecto.

$$\frac{dy}{(1 + y^2)} = e^x dx$$

P2. Integrando se tiene:

$$\int \frac{dy}{(1 + y^2)} = \int e^x dx$$

$$arctg(y) = e^x + C$$

$$y = tg(e^x + C)$$

3. Resolver la siguiente ecuación diferencial:

$$e^x secydx + (1 + e^x)secy.\, tgydy = 0, y = 60^\circ\ si\ x = 3$$

Solución:

P1. Expresar en la forma:

$$M(x)\ dx + N\ (y)\ dy = 0$$

P2. Dividiendo la ecuación para $\sec(y)$ se tiene:

$$[e^x secydx + (1+e^x)secy.tgydy = 0]\frac{1}{secy}$$

$$e^x dx + (1+e^x)tgydy = 0$$

$$\frac{e^x dx}{(1+e^x)} + tgydy = 0 \ \ (1)$$

P3. Integrando:

$$\int \frac{e^x dx}{(1+e^x)} = -\int tgydy$$

Luego, integrar por sustitución de variable:

Calcular la primera integral,

$$\int \frac{e^x dx}{(1+e^x)} = \begin{cases} u = 1+e^x \\ du = e^x dx \end{cases}$$

$$\int \frac{du}{u} = lnu = ln(1+e^x)$$

De manera similar resolver la otra integral.

$$\int tgydy = \int \frac{seny}{cosy}dy = \begin{cases} u = cosy \\ du = -senydy \end{cases}$$

$$-\int \frac{du}{u} = -lnu = -lncosy$$

Se sustituye en la EDO general:

$$ln(1+e^x) = lncosy + lnk$$

P4. Sustituyendo en la ecuación del paso P1, se tiene:

$$ln(1 + e^x) - lncosy = lnk$$

$$ln\left(\frac{1 + e^x}{cosy}\right) = lnk$$

$$\frac{1 + e^x}{cosy} = k$$

$$1 + e^x = kcosy$$

$$\frac{1 + e^x}{k} = cosy$$

$$y = arc\ cos\left(\frac{1 + e^x}{k}\right)$$

P5. Reemplazando los valores iniciales:

$$\frac{\pi}{3} = arc\ cos\left(\frac{1 + e^3}{k}\right)$$

$$cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{1 + e^3}{k}\right)$$

$$\frac{1 + e^3}{cos60} = k$$

$$\frac{1 + e^3}{\frac{1}{2}} = k$$

$$k = 2(1 + e^3)$$

P6. Sustituyendo el valor de k en la función solución:

$$y = arc\ cos\left(\frac{1 + e^x}{2(1 + e^3)}\right)$$

4. Encontrar la solución al problema de valor inicial.

$$\frac{dy}{dx} = (1 + y^2)e^x; y(0) = 1$$

Solución:

P1. Expresar en la forma $M(x)\,dx + N\,(y)\,dy = 0$

En efecto: $\frac{dy}{1+y^2} = e^x dx$

P2. Integrando se tiene:

$$\int \frac{dy}{1+y^2} = \int e^x dx$$

$$arctgy = e^x + C$$

P3. Sustituyendo en $\frac{dy}{1+y^2} = e^x dx$, se tiene:

$$arctgy = e^x + C$$

$$y = tg(e^x + C)$$

P4. Reemplazando los valores iniciales:

$$1 = tg(e^0 + C)$$

$$1 = tg(1 + C)$$

$$arctg(1) = 1 + C$$

$$\frac{\pi}{4} = 1 + C$$

$$\frac{\pi}{4} - 1 = C$$

$$arctgy = e^x + \frac{\pi}{4} - 1$$

$$y = tg\left(e^x + \frac{\pi}{4} - 1\right)$$

5. Hallar la solución de $\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2+4x+2}{2(y-1)}$.

Solución:

P1. Expresar la ecuación en la forma:

$$M(x)\,dx + N\,(y)\,dy = 0$$

$$2(y-1)dy - (3x^2 + 4x + 2)dx = 0$$

P2. Integrar las funciones:

$$2\int (y-1)dy = \int (3x^2+4x+2)dx$$

$$y^2-2y = x^3+2x^2+2x+C$$

P3. Expresarla como función:

$$y^2-2y+1 = 1+x^3+2x^2+2x+C$$

$$(y-1)^2 = 1+x^3+2x^2+2x+C$$

$$y-1 = \sqrt{1+x^3+2x^2+2x+C}$$

$$y = 1 \pm \sqrt{1+x^3+2x^2+2x+C}$$

Los otros problemas deberá resolverlos el estudiante:

ACTIVIDAD 3

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales por variables separables:

1. Hallar la solución de $(1+y^2)dx+(1+x^2)dy=0$.
   Resp. $x+y=C(1-xy)$
2. Hallar la solución de $ylnydx+xdy=0$, para $x=1; y=1$.
   Resp. $y=1$
3. Hallar la solución de.
   $(xy^2-y^2+x-1)dx+(x^2y-2xy+x^2+2y-2x+2)dy=0$
   Resp. $(x^2-2x+2)(y^2+1)e^{2arctg(y)}=C$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Encontrar todas las soluciones posibles de $\frac{dy}{dt}=1+\frac{1}{y^2}$.
   Resp. $y-arctg(y)=t+c$
2. Encontrar la solución particular de $\frac{dy}{dx}=\frac{y^2-1}{x}$, $y(1)=2$.

   Resp. $y=\frac{3+x^2}{3-x^2}$
3. Encontrar la solución de: $ylnydx+xdy=0$; $y=1; x=1$.
   Resp. $y=1$
4. Encontrar la solución particular de $\frac{dy}{dx}=\frac{x-e^{-x}}{y+e^x}$.
   Resp. $y^2-x^2+2(e^y-e^{-x})=C$

5. Encontrar la solución particular de:

   $(xy^2 - y^2 + x - 1)dx + (x^2y - 2xy + x^2 + 2y - 2x + 2)dy = 0$
   Resp. $(x^2 - 2x + 2)(y^2 + 1)e^{2tgy} = K$

2.3.2 Ecuaciones diferenciales ordinarias reducibles a variable separable

Las ecuaciones diferenciales de la forma: $\frac{dy}{dx} = f(ax + by + c)$ (2)
Donde a, b y c son constantes, no son de variables separables, por lo que para resolver este tipo de ecuaciones diferenciales se transforma a una ecuación diferencial de variables separables, mediante la sustitución $\boldsymbol{z = ax + by + c}$. De donde diferenciando de tiene:

$$dz = adx + bdy + dc$$

$$dz = adx + bdy$$

Ahora, despejando $\frac{dy}{dx}$:

$$\frac{dz}{dx} = a\frac{dx}{dx} + b\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dz}{dx} = a + b\frac{dy}{dx}$$

$$\left(\frac{dz}{dx} - a\right) = b\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{b}\left(\frac{dz}{dx} - a\right)$$

Que al remplazar en (2) se obtiene una nueva ecuación diferencial que es de variables separables así:

$$f(z) = \frac{1}{b}\left(\frac{dz}{dx} - a\right)$$

Expresarla en la forma ordinaria: $M(x)dx + N(y)dy = 0$
de donde;

$$bf(z) = \left(\frac{dz}{dx} - a\right)$$

$$a + bf(z) = \frac{dz}{dx}$$

Obteniendo el proceso para las variables separables

$$\frac{dz}{a+bf(z)} = dx$$

$$\frac{dz}{a+bf(z)} - dx = 0$$

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Resolver la siguiente ecuación diferencial $(x+y)^2 y' = a^2$

Solución:

P1. Expresar en la forma $z = x + y$

P2. Derivando $dz = dx + dy$, se obtiene $\frac{dy}{dx}$. Para eso se divide la ecuación para dx.

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dx}{dx} + \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dz}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx}$$

Despejando,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} - 1$$

P3. Reemplazando en la ecuación diferencial $(x+y)^2 y' = a^2$.

Se tiene:

$$z^2\left(\frac{dz}{dx} - 1\right) = a^2$$

P4. Separar las variables:

$$\left(\frac{dz}{dx} - 1\right) = \frac{a^2}{z^2}$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{a^2}{z^2} + 1$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{a^2 + z^2}{z^2}$$

$$dx = \left(\frac{z^2}{z^2 + a^2}\right) dz$$

P5. Integrando las funciones,

$$\int \left(\frac{z^2}{z^2+a^2}\right) dz = \int dx$$

Dividir $\frac{z^2}{z^2+a^2}$ para facilitar la integral:

$$\frac{z^2}{z^2+a^2} = 1 - \frac{a^2}{z^2+a^2}$$

sustituir en la integral:

$$\int \left(1 - \frac{a^2}{z^2+a^2}\right) dz = \int dx$$

Aplicando la propiedad distributiva:

$$\int dz - \int \frac{a^2 dz}{z^2+a^2} = \int dx$$

$$\int dz - a^2 \int \frac{dz}{z^2+a^2} = \int dx$$

$$z - a^2 \left[\frac{1}{a} arctg\left(\frac{z}{a}\right)\right] = x + C$$

$$z - a\left(arctg\left(\frac{z}{a}\right)\right) = x + C$$

P6. Sustituir $z = x + y$:

$$x + y - a\left(arctg\left(\frac{x+y}{a}\right)\right) = x + C$$

P7. Reduciendo términos semejantes:

$$y - a\left(arctg\left(\frac{x+y}{a}\right)\right) = C$$

$$y + C = a\left(arctg\left(\frac{x+y}{a}\right)\right)$$

$$\frac{y+C}{a} = \left(arctg\left(\frac{x+y}{a}\right)\right)$$

$$tg\left(\frac{y+C}{a}\right)=\left(\frac{x+y}{a}\right)$$

$$a.tg\left(\frac{y+C}{a}\right)=x+y$$

$$y=a.tg\left(\frac{y+C}{a}\right)-x$$

2. Resolver la siguiente ecuación diferencial $(x+y)^2=y´$

Solución:

P1. Expresar en la forma $z=x+y$.

P2. Derivando $dz=dx+dy$:

$$\frac{dz}{dx}=1+\frac{dy}{dx}$$

Despejando,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dz}{dx}-1$$

P3. Reemplazando en la ecuación diferencial $(x+y)^2=y´$ se tiene:

$$z^2=\left(\frac{dz}{dx}-1\right)$$

P4. Aplicar la separación de variables:

$$M(x)dx+N(y)dy=0$$

$$z^2=\left(\frac{dz}{dx}-1\right)$$

$$\frac{dz}{dx}=z^2+1$$

$$\frac{dz}{z^2+1}=dx$$

P5. Integrando:

$$\int\frac{dz}{z^2+1}=\int dx$$

$$arctg(z)=x+C$$

P6. Sustituir z:

$$arctg(x+y) = x + C$$
$$x + y = tg(x + C)$$
$$y = tg(x + C) - x$$

3. Resolver la siguiente ecuación diferencial $(2x - 2y + 2)^3 = y´$.

Solución:

P1. Expresar en la forma.

$$z = 2x - 2y + 2$$

P2. Derivando la función de P1.

$$\frac{dz}{dx} = 2 - 2\frac{dy}{dx}$$

Despejando el valor de $\frac{dy}{dx}$.

$$2\frac{dy}{dx} = 2 - \frac{dz}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2 - \frac{dz}{dx}}{2}$$

P3. Reemplazando en la ecuación diferencial.

$$(2x - 2y + 2)^3 = y´$$

El valor de z:

$$z^3 = \frac{2 - \frac{dz}{dx}}{2}$$

P4. Separando las variables:

$$2z^3 = 2 - \frac{dz}{dx}$$
$$2 - 2z^3 = \frac{dz}{dx}$$
$$2(1 - z^3) = \frac{dz}{dx}$$

Observe que una solución de esta ecuación es $z = 1$. Ya que al sustituir este valor

$$\frac{dz}{dx} = 0$$

$$dz = 0dx$$

Integrando:

$$\int dz = \int 0dx$$

$$z = C$$

Determinar el valor C.

$$1 = C$$

Sustituir el valor z y el valor de C:

$$2x - 2y + 2 = 1.$$

$$2x + 1 = 2y$$

$$y = \frac{2x + 1}{2}$$

Para $z \neq 1$:

$$2(1 - z^3)dx = dz$$

$$2dx = \frac{dz}{(1 - z^3)}$$

P5. Integrando las funciones:

$$\int \frac{dz}{1 - z^3} = 2\int dx$$

$$\int \frac{dz}{(1 - z)(1 + z + z^2)} = 233\int dx$$

P6. Resolver por descomposición de fracciones parciales, como se indica:

$$\int \frac{dz}{(1 - z)(1 + z + z^2)} = \int \frac{A}{1 - z}dz + \int \frac{Bz + C}{(1 + z + z^2)}dz$$

Sacar el m.c.m.

$$\frac{1}{(1-z)(1+z+z^2)} = \frac{A}{1-z} + \frac{Bz+C}{(1+z+z^2)}$$

$$\frac{1}{(1-z)(1+z+z^2)} = \frac{A(1+z+z^2)+(Bz+C)(1-z)}{(1-z)(1+z+z^2)}$$

Se tiene entonces,

$1 = A(1+z+z^2) + (Bz+C)(1-z)3333$

$$1 = Az^2 + Az + A + Bz - Bz^2 + C - Cz$$

$$0z^2 + 0z + 1 = (A-B)z^2 + (A+B-C)z + A + C$$

Si $z = 1$ se reduce,

$$1 = A(1+1+1^2) + (Bz+C)(1-1)$$

$$1 = 3A$$

$$A = \frac{1}{3}$$

Construir un sistema de ecuaciones:

$$0 * z^2 + 0 * z + 1 = z^2(A-B) + z(A+B-C) + A + C$$

$$\begin{Bmatrix} A-B=0 \\ A+B-C=0 \\ A+C=1 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} A=B \\ A+B-C=0 \\ 1-A=C \end{Bmatrix}$$

Como $A = \frac{1}{3}$ sustituir y se obtienen los otros valores:

$$\begin{Bmatrix} B=\dfrac{1}{3} \\ A+B-C=0 \\ 1-\dfrac{1}{3}=C \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} A=\dfrac{1}{3} \\ B=\dfrac{1}{3} \\ C=\dfrac{2}{3} \end{Bmatrix}$$

Sustituyendo estos valores en la integral:

$$\int \frac{dz}{(1-z)(1+z+z^2)} = \int \frac{A}{1-z} + \int \frac{Bz+C}{(1+z+z^2)}$$

$$\int \frac{dz}{(1-z)(1+z+z^2)} = \int \frac{\frac{1}{3}}{1-z}dz + \int \frac{\frac{z}{3}+\frac{2}{3}}{(1+z+z^2)}dz$$

$$\int \frac{dz}{(1-z)(1+z+z^2)} = \int \frac{\frac{1}{3}}{1-z}dz + \int \frac{\frac{1}{3}(z+2)}{(1+z+z^2)}dz$$

$$\int \frac{dz}{(1-z^3)} = \frac{1}{3}\int \frac{dz}{1-z} + \frac{1}{3}\int \frac{z+2}{1+z+z^2}dz$$

$$\int \frac{dz}{(1-z^3)} = \frac{1}{3}\int \frac{dz}{1-z} + \frac{1}{3*2}\int \frac{2(z+2)}{1+z+z^2}dz$$

$$\int \frac{dz}{(1-z^3)} = -\frac{1}{3}\ln(1-z) + \frac{1}{6}\int \frac{2z+4}{(1+z+z^2)}dz$$

$$\int \frac{dz}{(1-z^3)} = -\frac{1}{3}\ln(1-z) + \frac{1}{6}\int \frac{(2z+1)+3}{(1+z+z^2)}dz$$

$$\int \frac{dz}{(1-z^3)} = -\frac{1}{3}\ln(1-z) + \frac{1}{6}\int \frac{(2z+1)}{z^2+z+1}dz + \frac{1}{6}\int \frac{3dz}{z^2+z+1}$$

$$\int \frac{dz}{(1-z^3)} = -\frac{1}{3}\ln(1-z) + \frac{1}{6}ln(z^2+z+1) + \frac{1}{2}\int \frac{dz}{z^2+z+1}$$

$$\int \frac{dz}{(1-z^3)} = -\frac{1}{3}\ln(1-z) + \frac{1}{6}ln(1+z+z^2) + \frac{1}{2}\int \frac{dz}{(z^2+z)+1}$$

Completar el trinomio cuadrado perfecto:

$$\int \frac{dz}{(1-z^3)} = -\frac{1}{3}\ln(1-z) + \frac{1}{6}ln(z^2+z+1) + \frac{1}{2}\int \frac{dz}{z^2+z+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+1}$$

$$\int \frac{dz}{(1-z^3)} = -\frac{1}{3}\ln(1-z) + \frac{1}{6}ln(z^2+z+1) + \frac{1}{2}\int \frac{dz}{\left(z^2+z+\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{4}+1}$$

$$\int \frac{dz}{(1-z^3)} = -\frac{1}{3}\ln(1-z) + \frac{1}{6}ln(1+z+z^2) + \frac{1}{2}\int \frac{dz}{\left(z^2+z+\frac{1}{4}\right)+\frac{3}{4}}$$

$$\int \frac{dz}{(1-z^3)} = -\frac{1}{3}\ln(1-z) + \frac{1}{6}ln(1+z+z^2) + \frac{1}{2}\int \frac{dz}{\left(z+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

Se conoce que la integral $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} arc\ tag\left(\frac{x}{a}\right)$

$$\frac{1}{2}\int \frac{dz}{\left(z+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} arctag\left(\frac{z+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)\right]$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{dz}{\left(z+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = \left[\frac{1}{\sqrt{3}} arctag\left(\frac{\frac{2z+1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)\right]$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{dz}{\left(z+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = \left[\frac{\sqrt{3}}{3} arctag\left(\frac{2z+1}{\sqrt{3}}\right)\right]$$

Sustituyendo en la integral total,

$$\int \frac{dz}{(1-z^3)} = -\frac{1}{3}ln(1-z) + \frac{1}{6}ln(1+z+z^2) + \left[\frac{\sqrt{3}}{3} arctag\left(\frac{2z+1}{\sqrt{3}}\right)\right]$$

La otra parte $2\int dx = 2x + C$

Sustituyendo en la ecuación se tiene,

$$-\frac{1}{3}ln(1-z) + \frac{1}{6}ln(z^2+z+1) + \left[\frac{\sqrt{3}}{3} arctag\left(\frac{2z+1}{\sqrt{3}}\right)\right] = 2x + C$$

$$\frac{1}{6}ln\left(\frac{z^2+z+1}{(z-1)^2}\right) + \left[\frac{\sqrt{3}}{3} arctag\left(\frac{2z+1}{\sqrt{3}}\right)\right] = 2x + C$$

P6. Sustituir $z = 2x - 2y + 2$, en la ecuación diferencial buscada:

$$\frac{1}{6}ln\left|\frac{1 + 2x - 2y + 2 + (2x - 2y + 2)^2}{(2x - 2y + 2 - 1)^2}\right| + \frac{\sqrt{3}}{3}arctg\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{4x - 4y + 4 + 1}{1}\right)\right) = 2x + c$$

$$\frac{1}{6}ln\left|\frac{2x - 2y + 3 + (2x - 2y + 2)^2}{(2x - 2y + 1)^2}\right| + \frac{\sqrt{3}}{3}arctg\left(\left(\frac{4x - 4y + 5}{\sqrt{3}}\right)\right) = 2x + c$$

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Transformar a ecuaciones de variable separable y hallar la solución de la ecuación diferencial $xy^2(xy' + y) = a^2$

Solución:
P1. Expresar la ecuación en la forma:

$$M(x)\,dx + N\,(y)\,dy = 0$$

Se observa que no es posible despejar, por tanto, aplicar primero el principio de transformación:

$$xy^2(xy' + y) = a^2$$

P2. Recurrir a la sustitución de z:

$$z = xy$$

Diferenciando,

$$dz = xdy + ydx$$

$$\frac{dz}{dx} = x\frac{dy}{dx} + y\frac{dx}{dx}$$

Encontrar el valor de. $\frac{dy}{dx}$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}\left(\frac{dz}{dx} - y\right)$$

P3. Sustituyendo los valores determinados en la ED $xy^2(xy' + y) = a^2$

$$zy\left[x\left(\frac{1}{x}\left(\frac{dz}{dx} - y\right)\right) + y\right] = a^2$$

Operando,

$$zy\left[\frac{dz}{dx} - y + y\right] = a^2$$

$$zy\left[\frac{dz}{dx}\right] = a^2$$

$$zydz = a^2dx$$

Realizar una sustitución de $y = \frac{z}{x}$:

$$\frac{z^2}{x}dz = a^2dx$$

$$z^2dz = xa^2dx$$

P4. Integrando las funciones:

$$\int z^2dz = a^2\int xdx$$

$$\frac{z^3}{3} = \frac{a^2x^2}{2} + C$$

P5. Sustituir el valor de $z = xy$:

$$\frac{x^3y^3}{3} = \frac{a^2x^2}{2} + C$$

$$2x^3y^3 = 3a^2x^2 + C$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Resolver la siguiente ecuación diferencial $y' = cos^2(ax + by + c)$, en donde a y b constantes positivas y diferentes.
   Resp.
   $$\frac{1}{\sqrt{a(a+b)}}arctg\sqrt{\frac{a}{a+b}}.tg(ax + by + c) = x + k$$

2. Resolver la siguiente ecuación diferencial $xy^2(xy' + y) = a^2$.
   Resp. .$x^3y^3 = 3a^2x^2 + k$

3. Resolver la siguiente ecuación diferencial $(lnx + y^3)dx - 3xy^2dy = 0$.
   Resp. $y^3 = kx - lnx - 1$

4. Resolver la siguiente ecuación diferencial $cos(x + y)dx = xsen(x + y)dx + xsen(x + y)dy$.

   Resp. $xcos(x + y) = C$

2.4 Segundo método de resolución

2.4.1 Ecuaciones diferenciales ordinarias homogéneas

OBJETIVO

- Reconocer cómo es el comportamiento de una ecuación diferencial homogénea.
- Resolver ecuaciones diferenciales homogéneas aplicando los procesos correctos.

Introducción.

La función $f(x, y)$ es homogénea de grado k**,** en "x" e "y", si y sólo si, cumple con la siguiente condición (Boyce & DiPrima, 2009):

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k f(x, y)$$

EJERCICIOS RESUELTOS

Determinar cuáles de las siguientes funciones son homogéneas.

1. $f(x, y) = x^2y - 4y^3$ Es homogénea de grado 3 en x e y
2. $f(x, y) = y^2tg\left(\frac{x}{y}\right)$ Es homogénea de grado 2 en x e y
3. $f(x, y) = x^2 + senx.cosy$ No es homogénea

EJERCICIOS PROPUESTOS

Determinar cuáles de las siguientes funciones son homogéneas.

1. $f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 - y^3}$
2. $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{xy}$
3. $f(x, y) = e^x$
4. $f(x, y) = x^2 - xy$

2.4.2 Comprobación si la EDO es homogénea

Para comprobar si una ecuación diferencial es homogénea, se debe verificar si se cumple la definición de homogeneidad, dada por la siguiente expresión (Boyce & DiPrima, 2009):

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k f(x, y)$$

EJERCICIOS RESUELTOS 2

1. Demostrar que la función $f(x, y) = x^3 + y^3$ es homogénea.

Solución:
P1. Considerar la definición de homogeneidad.

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k f(x, y)$$

A partir de $f(x, y) = x^3 + y^3$, se obtiene que: $\begin{cases} x = \lambda x \\ y = \lambda y \end{cases}$

P2. Sustituir este principio en la función: $f(x, y) = x^3 + y^3$

$$f(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x)^3 + (\lambda y)^3$$

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^3 x^3 + \lambda^3 y^3$$

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^3 (x^3 + y^3)$$

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^3 f(x, y)$$

2. Demostrar que la función $f(x, y) = x^3 dx + y^3 dy$, es homogénea.

Solución:

P1. Considerar la definición de homogeneidad:

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k f(x, y)$$

A partir de $f(x, y) = x^3 dx + y^3 dy$, se obtiene que: $\begin{cases} x = \lambda x \\ y = \lambda y \end{cases}$

Diferenciando: $\begin{cases} dx = dx \\ dy = dy \end{cases}$

P2. Sustituir este principio en la función: $f(x,y) = x^3dx + y^3dy$

$$f(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x)^3 dx + (\lambda y)^3 dy$$

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^3 x^3 dx + \lambda^3 y^3 dy$$

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^3 (x^3 dx + y^3 dy)$$

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^3 f(x,y)$$

3. Demostrar que la función $f(x,y) = x^2 e^{\left(\frac{x}{y}\right)} + y^2 ln\left(\frac{y}{x}\right)$ es homogénea

Solución:

P1. Considerar la definición de homogeneidad.

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k f(x,y)$$

Que significa. $\begin{cases} x = \lambda x \\ y = \lambda y \end{cases}$

P2. Sustituir este principio en la función:

$$f(x,y) = x^2 e^{\left(\frac{x}{y}\right)} + y^2 ln\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^2 x^2 e^{\left(\frac{\lambda x}{\lambda y}\right)} + \lambda^2 y^2 ln\left(\frac{\lambda y}{\lambda x}\right)$$

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^2 x^2 e^{\left(\frac{x}{y}\right)} + \lambda^2 y^2 ln\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^2 \left[x^2 e^{\left(\frac{x}{y}\right)} + y^2 ln\left(\frac{y}{x}\right)\right]$$

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^2 f(x,y)$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

4. Demostrar que la función $f(x,y) = x^2 sen\left(\frac{x}{y}\right) + y^2 ln\left(\frac{y}{x}\right)$, es homogénea.

5. Demostrar que la función $f(x,y) = 3x^2 + xy - 2$, es homogénea.

DEFINICIÓN

Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden y de primer grado de la forma:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

Es homogénea sí M y N son funciones homogéneas del mismo grado en x e y (Zill, 2009); como el ejemplo que se presentan a continuación:

EJERCICIO RESUELTO

1. Demostrar que es homogénea $(x^3 - y^3)dx + y^2xdy = 0$

Solución:

P1. Si se determina el exponente de cada monomio y la suma es la misma; entonces es homogénea.

P2. Determinar los grados de los factores:

Grado de x^3 es 3
Grado de y^3 es 3
Grado de xy^2es 3
Por tanto, es homogénea.

2.4.3 Solución de una ecuación diferencial homogénea

Considerar la ecuación diferencial ordinaria homogénea:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \qquad (1)$$

Entonces:

$$M(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k M(x,y);\ N(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k N(x,y) \quad (2)$$

Esto es porque la ecuación diferencial (1) es homogénea, haciendo $\lambda = \frac{1}{x}$ en la ecuación (2) se tiene:

$$M\left(1, \frac{y}{x}\right) = \frac{1}{x^k} M(x,y) \to M(x,y) = x^k M\left(1, \frac{y}{x}\right)$$

Haciendo $u = \frac{y}{x}$, toma la forma:

$$M(x,y) = x^k M\left(1, \frac{y}{x}\right) = x^k M(1,\mu) = x^k \psi(\mu)$$

Es decir:

$$M(x,y) = x^k \psi(\mu) \text{ con } u = \frac{y}{x} \qquad (3)$$

De igual manera para $N(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k N(x, y)$, se tiene (1)

Esto es porque la ecuación diferencial (1) es homogénea, haciendo $\lambda = \frac{1}{x}$ en la ecuación (2) se tiene:

$$N\left(1, \frac{y}{x}\right) = \frac{1}{x^k} N(x, y) \rightarrow N(x, y) = x^k N\left(1, \frac{y}{x}\right)$$

Haciendo $u = \frac{y}{x}$, toma la forma:

$$N(x, y) = x^k N\left(1, \frac{y}{x}\right) = x^k N(1, \mu) = x^k \psi(\mu)$$

Es decir:
$N(x, y) = x^k \psi(\mu)$ con $u = \frac{y}{x}$ (3)

Como $\mu = \frac{y}{x}$ despejando $y = \mu x$ derivando:

$dy = d(x\mu) = xd\mu + \mu dx$ (4)

Reemplazando (3), (4) en (1) se tiene:

$$x^k \varphi(u)dx + x^k \psi(u)(udx + xdu) = 0$$

Simplificando,

$$\varphi(u)dx + \psi(u)(udx + xdu) = 0$$

agrupando y separando las variables se tiene:

$$\frac{dx}{x} + \frac{\psi(u)}{\varphi(u) + u\psi(u)} du = 0$$

que es una ecuación de variable separable, análogamente:

$$\lambda = \frac{1}{x}, u = \frac{y}{x}$$

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Resolver la siguiente ecuación diferencial $(x^2 + 3xy + y^2)dx - x^2 dy = 0$

Solución:

P1. Ver si es homogénea de grado 2

P2. Sustituir el principio $u = \frac{y}{x}$

P3. Despejar la variable dependiente,

$$y = ux$$

P4. Diferenciar esta expresión

$$dy = (udx + xdu)$$

P5. Remplazar en la ecuación diferencial el P4 y P3.

$$(x^2 + 3xy + y^2)dx - x^2dy = 0$$

$$(x^2 + 3x.xu + (xu)^2)dx - x^2(udx + xdu) = 0$$

$$(x^2 + 3x^2u + x^2u^2)dx - x^2(udx + xdu) = 0$$

Simplificando:

$$x^2(u^2 + 3u + 1)dx - x^2(udx + xdu) = 0$$

$$(u^2 + 3u + 1)dx - (udx + xdu) = 0$$

Agrupando:

$$(u^2 + 3u + 1)dx - udx - xdu = 0$$

$$(u^2 + 2u + 1)dx - xdu = 0$$

$$(u + 1)^2dx - xdu = 0$$

P6. Separando las variables:

$$\frac{dx}{x} - \frac{du}{(u+1)^2} = 0$$

P7. Integrando las funciones se tiene:

$$\int \frac{dx}{x} - \int \frac{du}{(u+1)^2} = \int 0$$

$$\int \frac{dx}{x} - \int (u+1)^{-2}du = \int 0$$

$$lnx - \frac{(u+1)^{-1}}{-1} = C$$

$$lnx + \frac{1}{(u+1)} = C$$

P8. Sustituir el valor de $u = \frac{y}{x}$

$$lnx + \frac{1}{\left(\frac{y}{x} + 1\right)} = C$$

$$lnx + \frac{1}{\left(\frac{y + x}{x}\right)} = C$$

$$lnx + \frac{x}{y + x} = c$$

2. Resolver la siguiente ecuación diferencial $(x - ylny + ylnx)dx + x(lny - lnx)dy = 0$

Solución:
P1. Se puede expresar de la forma:

$$\left(x - yln\left(\frac{y}{x}\right)\right)dx + xln\left(\frac{y}{x}\right)dy = 0$$

P2. Sea $u = \frac{y}{x};\ y = ux \rightarrow dy = (udx + xdu)$. Reemplazando en la ecuación diferencial,

$$(x - uxlnu)dx + xlnu(udx + xdu) = 0$$

simplificando,

$$(x - uxlnu + xulnu)dx + (x^2lnudu) = 0$$

$$dx + xlnudu = 0$$

P3. Separando las variables:

$$\frac{dx}{x} + lnudu = 0$$

Integrando se tiene:

$$\int \frac{dx}{x} + \int lnudu = \int 0$$

de donde:

$$\int \frac{dx}{x} = lnx$$

Integrar por partes la segunda integral:

$$\int lnudu = v.x - \int v.dx$$

Es decir. $\begin{cases} x = lnu \rightarrow dx = \frac{du}{u} \\ du = dv \rightarrow u = v \end{cases}$

Sustituir el valor.

$$\int lnu.du = u.lnu - \int u.\frac{du}{u} = ulnu - u = u(lnu - 1)$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial:

$$\int \frac{dx}{x} + \int lnudu = \int 0$$

se tiene:

$$lnx + ulnu - u = C$$

Sustituyendo el valor $u = \frac{y}{x}$

$$lnx + \frac{y}{x} ln\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x} = C$$

$$xlnx + yln\left(\frac{y}{x}\right) - y = Cx$$

P4. Resolviendo los logaritmos:

$$xlnx + ylny - ylnx - y = Cx$$

Agrupando:

$$(x - y)lnx + ylny = Cx + y$$

ACTIVIDAD 4

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias de primer grado:

1. $(4x - 3y) + y´(2y - 3x) = 0$

   Resp. $y^2 - 3xy + 2x^2 = k$

2. $4x^2 + xy - 3y^2 + y´(-5x^2 + 2xy + y^2) = 0$

   Resp. $(y - x)^8(y - 2x)^9 = C(y + 2x)^5$

3. $xy´ = \sqrt{y^2 - x^2}$

   Resp. $y + \sqrt{y^2 - x^2} = cx^3 e^{\frac{y\left(y+\sqrt{y^2-x^2}\right)}{x^2}}$

4. $2xy'(x^2+y^2) = y(2x^2+y^2)$

   Resp. $y^2 = xC$

EJERCICIOS PROPUESTOS

Determinar la solución de las siguientes ecuaciones homogéneas:

1. Sea la ecuación diferencial. $\left(x - y.arctg\left(\frac{y}{x}\right)\right)dx + x.arctg\left(\frac{y}{x}\right)dy = 0$

   Resp. $y.arctg\left(\frac{y}{x}\right) = xln\left(\frac{x^2+y^2}{x^4}\right)c^2$

2. Sea la ecuación diferencial. $xe^{\frac{x}{y}}dx + ye^{\frac{y}{x}}dy = 0.$

   Resp. $lnx = -\int_a^{\frac{y}{x}} \frac{te^t dt}{e^{\frac{1}{t}}+t^2e^t}$

3. Sea la ecuación diferencial. $\left(ycos\left(\frac{y}{x}\right) + xsen\left(\frac{y}{x}\right)\right)dx = cos\left(\frac{y}{x}\right)dy.$

   Resp. $x = ksen\left(\frac{y}{x}\right)$

4. Sea la ecuación diferencial. $xy' = y + \sqrt{y^2 - x^2}.$

   Resp. $2Cy = kx^2 + 1$

5. Sea la ecuación diferencial. $y' = \frac{y}{3x^2-y^2}$

   Resp. $2Cy = kx^2 + 1$

6. Sea la ecuación diferencial. $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x}$

7. Sea la ecuación diferencial. $\frac{dy}{dx} = \frac{3y-x}{3x-y}$

8. Sea la ecuación diferencial. $\frac{dy}{dx} = \frac{2y-x+5}{2x-y-4}$

2.4.4 Ecuaciones diferenciales reducibles a homogéneas

Las ecuaciones diferenciales de la forma:

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right) \quad (\mathbf{1})$$

No son homogéneas, porque tanto en el numerador como en el denominador aparecen dos constantes Cy c_1 , estas constantes se pueden eliminar mediante una traslación, transformando a la ecuación (1) en una ecuación diferencial homogénea, para lo cual se consideran las ecuaciones:

$$L_1: ax + by + c = 0 \; y \; L_2: a_1x + b_1y + c_1 = 0 \quad (2)$$

Donde el punto de intersección es (h, k). Si se traslada el origen de coordenadas (h, k) las ecuaciones (2) se transforman:

$$L_1: az + bw = 0 \; y \; L_2: a_1 z + b_1 w = 0$$

Haciendo el cambio:

$$x = z + h; \quad y = w + k$$

Diferenciando,

$$dx = dz; \;\; dy = dw$$

Se tiene de (1):

$$\frac{dw}{dz} = f\left(\frac{az+bw}{a_1 z+b_1 w}\right) = f\left(\frac{a+\frac{bw}{z}}{a_1+\frac{b_1 w}{z}}\right) = F\left(\frac{w}{z}\right) \; (3)$$

Que es una ecuación diferencial homogénea.

Nota: Cuando:

$$L_1: ax + by + c = 0 \;\wedge\; L_2: a_1 x + b_1 y + c_1$$

son paralelas no se aplica este método, sin embargo, se tiene:

$$\frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1} \to \frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \lambda$$

$$a = \lambda a_1; b = \lambda b_1$$

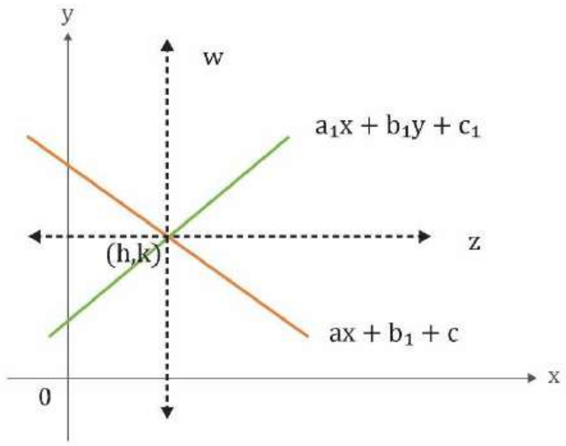
de donde se deduce,

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax + by + c}{a_1 x + b_1 y + c_1}\right)$$

$$f\left(\frac{\lambda(a_1 x + b_1 y) + c}{a_1 x + b_1 y + c_1}\right) = g(a_2 x + b_2 y)$$

que es una ecuación diferencial reducible a variable separable.

Figura 8
Rectas intersecantes.



OBSERVACIÓN

Otra forma de transformar a una ecuación diferencial homogénea, cuando no son homogéneas, es mediante la sustitución de la variable $y = z^{\alpha}$, esto puede aplicarse cuando todos los términos de la ecuación son del mismo grado atribuyendo el grado 1 a la variable "x" , el grado α a la variable "y", y el grado $(\alpha - 1)$ a la derivada $\frac{dy}{dx}$.

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Resolver la siguiente ecuación diferencial $(x - 4y - 9)dx + (4x + y - 2)dy = 0$

Solución:

P1. Identificar las rectas:

$$\begin{cases} L_1: x - 4y - 9 = 0 \\ L_2: 4x + y - 2 = 0 \end{cases}$$

Determinar si son o no son paralelas mediante la existencia.

$$\exists p(h, k) \epsilon L_1 \wedge L_2,$$

para lo cual se debe resolver el sistema formado por las rectas:

$$\begin{cases} x - 4y - 9 = 0 \\ 4x + y - 2 = 0 \end{cases}$$

Aplicar el método de sumas y restas, para esto multiplicar la fila 2 por 4,

$$\begin{cases} x-4y-9=0 \\ 16x+4y-8=0 \end{cases}$$
$$17x-17=0$$

Se tiene $17x=17$, entonces $x=1$, sustituir este valor en una de las ecuaciones para determinar el valor se tiene:

$$x-4y-9=0$$

$$1-4y-9=0$$

$$-4y-8=0$$

$$-4y=8$$

Así:

$$y=-2$$

El punto buscado de la intersección es: $P(1,-2)$.

P2. Considerando las nuevas sustituciones de "x" e "y" se tiene:

$$\begin{cases} x=z+h \\ y=w+k \end{cases}$$

entonces:

$$\begin{cases} x=z+1 \\ y=w-2 \end{cases}$$

sus diferenciales, son:

$$\begin{cases} dx=dz \\ dy=dw \end{cases}$$

P3. Reemplazando en la ecuación diferencial:

$$(x-4y-9)dx+(4x+y-2)dy=0$$

$$(z+1-4(w-2)-9)dz+(4(z+1)+(w-2)-2)dw=0$$

$$(z+1-4w+8-9)dz+(4z+4+w-2-2)dw=0$$

Reduciendo términos semejantes:

$$(z-4w)dz+(4z+w)dw=0 \qquad (1)$$

que es una ecuación diferencial homogénea.

P4. Aplicar la regla de las ecuaciones homogéneas: $u = \frac{z}{w}$

$$z = uw$$

y diferenciando:

$$dz = udw + wdu \quad (2)$$

P5. Reemplazando **(P4)** en **(P3)** y simplificando se tiene:

$$(uw - 4w)(udw + wdu) + (4uw + w)dw = 0$$

Operando

$$\cancel{w}(u - 4)(udw + wdu) + \cancel{w}(4u + 1)dw = 0$$

$$u^2dw - 4udw + uwdu - 4wdu + 4udw + dw = 0$$

$$(u^2 + 1)dw + (u - 4)wdu = 0$$

separando la variable:

$$\frac{dw}{w} + \left(\frac{u - 4}{u^2 + 1}\right)du = 0$$

P6. Integrando las funciones:

$$\int \frac{dw}{w} + \int \left(\frac{u - 4}{u^2 + 1}\right)du = \int 0$$

$$\int \frac{dw}{w} + \int \left(\frac{u}{u^2 + 1}\right)du - \int \left(\frac{4du}{u^2 + 1}\right) = \int 0$$

$$\int \frac{dw}{w} + \frac{1}{2}\int \left(\frac{2u}{u^2 + 1}\right)du - 4\int \left(\frac{du}{u^2 + 1}\right) = \int 0$$

$$lnw + \frac{1}{2}ln(u^2 + 1) - 4arctagu = C$$

P7. Aplicando las propiedades de los logaritmos:

$$2lnw + ln(u^2 + 1) - 8arctagu = C$$

$$lnw^2 + ln(u^2 + 1) - 8arctagu = C$$

$$lnw^2(u^2 + 1) - 8arctagu = C$$

P8. Hay que recordar que: $z = u.w$

Despejar, $u = \frac{z}{w} = \frac{x-1}{y+2}$, y reemplazar en la ecuación diferencial:

$$ln(y+2)^2\left(\left(\frac{x-1}{y+2}\right)^2 + 1\right) - 8arctag\left(\frac{x-1}{y+2}\right) = C$$

$$ln\cancel{(y+2)^2}\left(\frac{(x-1)^2 + (y+2)^2}{\cancel{(y+2)^2}}\right) - 8arctag\left(\frac{x-1}{y+2}\right) = C$$

$$ln((x-1)^2 + (y+2)^2) - 8arctag\left(\frac{x-1}{y+2}\right) = C$$

2. Resolver la siguiente ecuación diferencial $4xy^2dx + (3x^2y - 1)dy = 0$

Solución:

P1. Sea:
$y = z^{\alpha}$

Derivando esta función se tiene:

$dy = \alpha z^{\alpha-1}dz$

P2. Reemplazando en la ecuación diferencial se tiene:

$$4xz^{2\alpha}dx + (3x^2z^{\alpha} - 1)(\alpha z^{\alpha-1}dz) = 0$$

$$4xz^{2\alpha}dx + (3x^2z^{\alpha}z^{\alpha-1} - z^{\alpha-1})(\alpha dz) = 0$$

$$4xz^{2\alpha}dx + (3x^2z^{2\alpha-1} - z^{\alpha-1})\alpha dz = 0$$

P3. Luego establecer:

El grado de $4xz^{2\alpha}$ es $2\alpha + 1$

El grado de $3x^2z^{2\alpha-1}$ es $2 + 2\alpha - 1 = 2\alpha + 1$

El grado de $z^{\alpha-1}$ es $\alpha - 1$

P4. Para que la ecuación del paso **P2** sea homogénea debe cumplirse:

$$2\alpha + 1 = 2\alpha + 1 = \alpha - 1$$

$$2\alpha + 1 = \alpha - 1$$

$$2\alpha - \alpha = -1 - 1$$

$$\alpha = -2$$

Es decir, si:

$$y = z^{\alpha}$$

Entonces se tiene:

$$y = z^{-2}$$

Es decir, la derivada:

$$dy = -2z^{-3}dz$$

P 5. Sustituir en la ecuación del paso P2:

$$4xz^{2\alpha}dx + (3x^2z^{2\alpha-1} - z^{\alpha-1})\alpha dz = 0$$

$$4xz^{-4}dx - 2(3x^2z^{-5} - z^{-3})dz = 0$$

Para no tener exponente negativo como es una ecuación se multiplica z^5:

$$[4xz^{-4}dx - (3x^2z^{-5} - z^{-3})2dz = 0] * z^5$$

$$[4xz^{-4}dx * z^5 - (3x^2z^{-5} - z^{-3})2dz * z^5 = 0]$$

$$[4xz^{-4} * z^5dx - (3x^2z^{-5} * z^5 - z^{-3} * z^5)2dz = 0]$$

$$4xzdx - 2(3x^2 - z^2)dz = 0$$

Que es una ecuación diferencial homogénea.

P6. Aplicar la definición de homogénea, $u = \frac{z}{x}$:

$$z = u.x$$

Entonces:

$$dz = udx + xdu$$

Reemplazando en la ecuación diferencial homogénea del paso P5:

$$4xzdx - 2(3x^2 - z^2)dz = 0$$

$$4x^2udx - 2(3x^2 - x^2u^2)(udx + xdu) = 0$$

de donde simplificando y separando las variables:

$$4udx - 2(3 - u^2)(udx + xdu) = 0$$

$$4udx - 6udx - 6xdu + 2u^3dx + 2u^2xdu = 0$$

$$-2udx - 6xdu + 2u^3dx + 2u^2xdu = 0$$

$$2(u^3 - u)dx + 2x(u^2 - 3)du = 0$$

$$\frac{dx}{x} + \frac{(u^2 - 3)}{(u^3 - u)}du = 0$$

P7. Integrar:

$$\int \frac{dx}{x} + \int \frac{(u^2 - 3)}{(u^3 - u)}du = \int 0$$

$$\int \frac{dx}{x} + \int \frac{(u^2 - 3)}{u(u^2 - 1)}du = \int 0$$

$$\int \frac{dx}{x} + \int \frac{(u^2 - 3)}{u(u - 1)(u + 1)}du = \int 0$$

Resolver la segunda integral:

$$\frac{(u^2 - 3)}{u(u - 1)(u + 1)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{u - 1} + \frac{C}{u + 1}$$

$$\frac{(u^2 - 3)}{u(u - 1)(u + 1)} = \frac{A(u^2 - 1) + Bu(u + 1) + Cu(u - 1)}{u(u - 1)(u + 1)}$$

$$u^2 - 3 = A(u^2 - 1) + Bu(u + 1) + Cu(u - 1)$$

$$u^2 - 3 = Au^2 - A + Bu^2 + Bu + Cu^2 - Cu$$

$$\begin{cases} 1 = A + B + C \\ 0 = B - C \\ -3 = -A \end{cases}$$

Resolver el sistema:

$$\begin{cases} 1 = A + B + C \\ B = C \\ A = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 = 3 + B + B \\ B = C \\ A = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2 = 2B \\ B = C \\ A = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} B = -1 \\ C = -1 \\ A = 3 \end{cases}$$

Sustituir en la integral:

$$\int \frac{dx}{x} + \int \frac{3}{u}du - \int \frac{du}{u-1} - \int \frac{du}{u+1} = \int 0$$

$$lnx + 3lnu - \ln(\mathrm{u}-1) - \ln(u+1) = lnk$$

$$ln\frac{xu^3}{u^2-1} = lnk$$

$$\frac{xu^3}{u^2-1} = k$$

P8. Sustituir el valor de $z = u.x;\ u = \frac{z}{x}$

$$\frac{x\left(\frac{z}{x}\right)^3}{\left(\frac{z}{x}\right)^2 - 1} = k$$

$$\frac{\frac{z^3}{x^2}}{\frac{z^2}{x^2} - 1} = k$$

$$\frac{\frac{z^3}{x^2}}{\frac{z^2 - x^2}{x^2}} = k$$

$$\frac{z^3}{z^2 - x^2} = k$$

Sustituir $y = z^{-2}$; $y = \frac{1}{z^2} \rightarrow z^2 = \frac{1}{y}$

$$\frac{z^2 . z}{z^2 - x^2} = k$$

$$\frac{\frac{1}{y . \sqrt{y}}}{\frac{1}{y} - x^2} = k$$

$$\frac{\frac{1}{y . \sqrt{y}}}{\frac{1 - x^2 y}{y}} = k$$

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{y}}}{1 - x^2 y} = k$$

$$\frac{1}{(1 - x^2 y)\sqrt{y}} = k$$

$$\frac{1}{k} = (1 - x^2 y)\sqrt{y}$$

$$c = (1 - x^2 y)\sqrt{y}$$

$$y(1 - x^2 y)^2 = k$$

ACTIVIDAD 5

Aplicar los conocimientos adquiridos y resolver las ecuaciones:

1. Resolver la ecuación diferencial: $(3y - 7x + 7)dx - (3x - 7y - 3)dy = 0$.

   Resp. $(x + y - 1)^6 (x - y - 1)^2 = C$.

2. Resolver la ecuación diferencial $(3x + y - 2) - y'(x - 1) = 0$.

   Resp. $(x - 1)(3x + 2y - 1) = C$.

3. Resolver la ecuación diferencial: $\left((x-y)cos\left(\frac{y}{x}\right)\right)dx + xcos\left(\frac{y}{x}\right)dy = 0.$
   Resp. $y = Cx + x$

4. Resolver la ED. $\frac{dy}{dx} = -\frac{4x+3y+15}{2x+y+71}.$
   Resp. $|y+x+4||y+4x+13|^2 = K.$

5. Resolver la ecuación diferencial: $(x+y^3)dx + (3y^5 - 3y^2x)dy = 0.$
   Resp. $arctag\frac{y^3}{x} = \frac{1}{2}ln(x^2+y^6) + k$

EJERCICIOS PROPUESTOS

Determinar la solución de las siguientes ecuaciones homogéneas:

1. $\frac{dy}{dx} = \frac{x+3y-5}{x-y-1}$
   Res. $lnC(x+y-3) = -2\left(\frac{x-2}{x+y-3}\right)$

2. $(y^4 - 3x^2)dy = -xydx$
   Res. $x^2 = y^4 + Ky^6$

3. $ycosxdx + (2y - senx)dy = 0.$
4. **Res.** $2ylny + senx = 2Cy$

5. $(2x^2+3y^2-7)xdx - (3x^2+2y^2-8)ydy = 0$
   Res. $\boldsymbol{ln}|y^4 - x^4 + 4x^2 - 2y^2 - 3| + \frac{3}{2}ln\frac{y^2-x^2+1}{y^2+x^2-3} = k.$

6. $(3x^2 - 2y^2)\frac{dy}{dx} = 2xy$, con las condiciones $y(0) = -1$
   Resp $x^2 = 2y^2(y+1)$

7. $\frac{dy}{dx} = \frac{y+xcos^2\left(\frac{y}{x}\right)}{x}$, con la condición, $y(1) = \frac{\pi}{4}$.
   Res. $1 + lnx = tag\left(\frac{y}{x}\right)$

8. $(x^2+2xy-2y^2)\frac{dx}{dy} + (y^2+2xy-2x^2) = 0$, con las condiciones $y(0) = 3.$
   Resp $y^2 - xy + x^2 = 3(y+x)$

9. $(x^2-3y^2)dx + 2xydy = 0$, con las condiciones $y(2) = 2$
   Resp $y = x\sqrt{1-\frac{3x}{8}}$

10. $3x + y - 2 + y'(x - 1) = 0$
    Res. $(x - 1)(3x + 2y - 1) = k$

11. $(2x - 4y)dx + (x + y - 3)dy = 0$
    Res. $(y - 2x + 3)^3 = C(y - x + 1)^2$

2.5 Tercer método de resolución

2.5.1 Ecuaciones diferenciales ordinarias exactas

OBJETIVOS:

- Reconocer cómo es el comportamiento de una ecuación diferencial exacta.
- Resolver ecuaciones diferenciales exactas aplicando los procesos correctos.

a. DIFERENCIAL TOTAL

Sí $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, es una función diferenciable en $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, entonces la diferencial total de “f” es la función df, cuyo valor está dado por (Apostol, 2002):

$$\partial f(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} dy$$

b. DIFERENCIAL EXACTA

Una expresión de la forma:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

se denomina exacta si existe una función $f: D \subset R^2 \to R$ tal que:

$$df(x,y) = M(x,y)dx + N(x,y)dy$$

Es decir que toda expresión que es la diferencial total de alguna función de "x" e "y" se llama diferencial exacta.

c. DEFINICIÓN

Considerar la ecuación diferencial:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \qquad (\alpha)$$

Si existe una función $z = f(x, y)$ tal que:

$$M(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \;\wedge\; N(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$$

Se dice que la ecuación (α), es una ecuación diferencial exacta (Boyce & DiPrima, 2009).

d. TEOREMA

Según Apóstol (2002), la condición necesaria y suficiente para que una ecuación diferencial:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

sea exacta es que cumpla con la siguiente igualdad.

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

EJERCICIO RESUELTO

La ecuación diferencial ordinaria $(e^x seny - 2ysenx)dx + (e^x cosy + 2cosx)dy = 0$, ¿es exacta?:

Solución:

P1. Para responder esta inquietud se aplica la definición:

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

P2. Se identifica las funciones M y N:

$$\begin{cases} M(x,y) = (e^x seny - 2ysenx) \\ N(x,y) = (e^x cosy + 2cosx) \end{cases}$$

Aplicando el P1.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y} = e^x dseny - 2senxdy \\ \dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x} = cosyde^x + 2dcosx \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y} = e^x cosy - 2senx \\ \dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x} = e^x cosy - 2senx \end{cases}$$

Se verifica que se cumple la igualdad:

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

e. SOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL EXACTA

Considerar la ecuación diferencial exacta:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \qquad (1)$$

Entonces existe una función $f(x,y)$ tal que:

$$M(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \;\wedge\; N(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \qquad (2)$$

Reemplazando la ecuación (2) en (1) se tiene:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy = 0 \qquad (3)$$

Por otra parte, si $z = f(x,y)$ entonces su diferencial total es:

$$dz = df(x,y)$$

$$dz = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy \quad (4)$$

Luego al comprobar (3) y (4), se tiene $dz = 0$ entonces $z = c$, es decir $f(x,y) = c$, que es la solución de la ecuación diferencial.

Como:

$$M(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$$

Integrar a la variable x, entonces:

$$\partial f(x,y) = M(x,y)\partial x$$

$$\int \partial f(x,y) = \int M(x,y)dx$$

Por el teorema fundamental del cálculo $\int \partial f(x,y) = f(x,y)$, por tanto:

$$f(x,y) = \int M(x,y)dx + g(y) \qquad (\alpha)$$

donde g(y) es la constante de integración, que es una función que depende sólo de la variable y, puesto que la integración es con respecto a "x", derivando la ecuación (α) **c**on respecto a "y" es decir:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx + g'(y)$$

Pero,

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = N(x,y)$$

Entonces se tiene $N(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx + g'(y)$, de donde:

$$N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx = g'(y)$$

Integrando con respecto a "y" para encontrar $g'(y)$:

$$g(y) = \left[\int N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx\right]dy + k_1 \qquad (\beta)$$

Reemplazando (β) en (α) se tiene la solución general de la ecuación diferencial (1); en forma similar se resuelve el otro caso:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = N(x,y)$$

y se integra con respecto a "y".

EJERCICIO RESUELTO

1. Hallar la solución general de la ecuación diferencial,

$$y[sen(x+y) + xcos(x+y)]dx + x[sen(x+y) + ycos(x+y)]dy = 0$$

Solución:

P1. Aplicar la definición de E.D.E.:

$$\begin{cases} M(x,y) = y[sen(x+y) + xcos(x+y)] \\ N(x,y) = x[sen(x+y) + ycos(x+y)] \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}[ysen(x+y) + yxcos(x+y)] \\ \dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x}[xsen(x+y) + xycos(x+y)] \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y} = [sen(x+y)dy + ydsen(x+y) + x(cos(x+y)dy + ydcos(x+y))] \\ \dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x} = [sen(x+y) + xcos(x+y) + ycos(x+y) - xysen(x+y)] \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y} = [sen(x+y) + ycos(x+y) + xcos(x+y) - xysen(x+y)] \\ \dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x} = [sen(x+y) + xcos(x+y) + ycos(x+y) - xysen(x+y)] \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y} = (1-xy)sen(x+y) + (x+y)Cos(x+y) \\ \dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x} = (1-xy)sen(x+y) + (x+y)Cos(x+y) \end{cases}$$

Como:

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

la ecuación diferencial dada es exacta y la solución general es $f(x,y) = C$

P2. Entonces $\exists f(x,y)$ tal que $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = M(x,y)$ es decir:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = y[sen(x+y) + xcos(x+y)]$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = y[senxcosy + senycosx + xcosxcosy - xsenxseny]$$

Integrar con respecto a "x":

$$\int \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = y\int [senxcosy + senycosx + xcosxcosy - xsenxseny]$$

$$f(x,y) = y\left[cosy\int senxdx + seny\int cosxdx + cosy\int x.cosxdx - seny\int x.senxdx\right]$$

$$f(x,y) = y[-cosycosx + senysenx + cosy(xsenx + cosx) - seny(-xcosx + senx)]$$

$$f(x,y) = y[-cosycosx + senysenx + xcosysenx + cosxcosy + xcosxseny - sexseny]$$

Reduciendo términos semejantes, se obtiene:

$$f(x,y) = y[xcosysenx + xcosxseny] + g(y)$$

Como paso siguiente se debe encontrar el valor de $g(y)$ de está función.

P3. Ahora esta función se deriva respecto a "y":

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx + g'(y)$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}[x[ycosysenx + ycosxseny] + g'(y)]$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = xsenxd(ycosy) + xcosxd(yseny) + g'(y)$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = xsenx(ydcosy + cosydy) + xcosx(ydseny + senydy) + g'(y)$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = xsenx(-yseny + cosy) + xcosx(ycosy + seny) + g'(y)$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = -xysenxseny + xsenxcosy + xycosxcosy + xcosxseny + g'(y)$$

P4. Sustituir $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = N(x,y)$ en el paso P3:

$$N(x,y) = x[sen(x+y) + ycos(x+y)]$$

$$N(x,y) = x[senxcosy + senycosx + ycosxcosy - ysenxseny]$$

$$N(x,y) = xsenxcosy + xsenycosx + xycosxcosy - xysenxseny$$

$$\begin{aligned} &xsenxcosy + xsenycosx + xycosxcosy - xysenxseny \\ &\qquad = -xysenxseny + xsenxcosy + xycosxcosy + xcosxseny + g'(y) \end{aligned}$$

$$g'(y) = 0$$

P5. Integrar este valor:

$$\int g'(y) = \int 0$$

$$g(y) = C$$

P6. Por tanto, la solución del P2:

$$f(x,y) = x[ycosysenx + ycosxseny] + g(y)$$

Es decir, la solución es:

$$0 = x[ycosysenx + ycosxseny] + C$$

2. Hallar la solución general de la ecuación diferencial:

$$(2xy^2 + 2y)dx + (2x^2y + 2x)dy = 0$$

Solución:

P1. Al aplicar la definición de la ecuación diferencial homogénea, se verifica que no cumple por tanto debe aplicarse la definición de ecuaciones diferenciales exactas. Para ello se determina $M(x,y)$ y $N(x,y)$:

$$\begin{cases} M(x,y) = 2xy^2 + 2y \\ N(x,y) = 2yx^2 + 2x \end{cases}$$

P2. Derivar con respecto a su variable opuesta

$$\begin{cases} \dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 2xdy^2 + 2dy \\ \dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 2ydx^2 + 2dx \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 4xy + 2 \\ \dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 4xy + 2 \end{cases}$$

Es decir,

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

P3. Entonces $\exists f(x,y)$, tal que $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = M(x,y)$, de donde:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2xy^2 + 2y$$

P4. Integrando respecto a "x" se tiene:

$$\int \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} d = \int (2xy^2 + 2y)\, dx$$

$$f(x,y) = \int (2xy^2 + 2y)\, dx$$

$$f(x,y) = \int 2xy^2 dx + \int 2ydx$$

$$f(x,y) = 2y^2 \int x\, dx + 2y \int dx$$

$$f(x,y) = 2y^2 \left[\frac{x^{1+1}}{1+1}\right] + 2y(x) + g(y)$$

$$f(x,y) = \frac{2x^2y^2}{2} + 2xy + g(y)$$

$$f(x,y) = x^2y^2 + 2xy + g(y)$$

P5. Derivando respecto a "y":

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x^2dy^2 + 2xdy + dg(y)$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 2x^2y + 2x + g'(y)$$

Pero;

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = N(x,y)$$

Se tiene,

$$N(x,y) = 2x^2y + 2x + g'(y)$$

$$2x^2y + 2x = 2x^2y + 2x + g'(y)$$

$$g'(y) = 0$$

P6. Integrar:

$$\int g'(y) = \int 0$$

$$g(y) = C$$

P7. Sustituir, $g(y)$ en el paso P4:

$$f(x,y) = x^2y^2 + 2xy + g(y)$$

$$f(x,y) = x^2y^2 + 2xy + C$$

$$f(x,y) = 0$$

$$x^2y^2 + 2xy = k$$

ACTIVIDAD 6

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales exactas:

1. Encontrar la solución de $2xy^3 + 3x^2y^2\frac{dy}{dx} = 0$
   Resp. $x^2y^3 = C \to y = Cx^{-\frac{2}{3}}$
2. Encontrar la solución de $(ycosx + 2xe^x)dx + (senx + x^2e^y + 2)dy = 0$
3. Encontrar la solución de $\left(\frac{y}{x} + 6x\right)dx + (lnx - 2)dy = 0$
   Resp. $ylnx + 3x^2 - 2y = C$
4. Encontrar la solución de $(xlny + xy) + (ylnx + xy)y' = 0$
   Resp. $x\left(\frac{lny}{y} + 1\right) + \frac{(lny)^2}{2} - 2lny = C$
5. Encontrar la solución de $(9x^2 + y - 1) - (4y - x)y' = 0$
   Resp. $3x^2 + xy - x - 2y^2 = C$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Hallar la solución general de la ecuación diferencial:

$$(e^x seny - 2ysenx)dx + (e^x cosy + 2cosx)dy = 0$$

   Resp. $e^x seny + 2ycosx = k$

2. Determinar si la siguiente ecuación diferencial es o no exacta, en caso afirmativo encontrar su solución general: $y' = \frac{y-x+1}{-x+y+3}$
3. Hallar la solución general de la ecuación diferencial.

$$\left(seny + ysenx + \frac{1}{y}\right)dx + \left(xcosy - cosx + \frac{1}{y}\right)dy = 0$$

   Resp. $xseny - ycosx + ln(xy) = k$

4. Hallar la solución general de la ecuación diferencial.

$$\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)dx + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{1}{y} + \frac{x}{y^2}\right)dy = 0$$

Resp. $\sqrt{x+y^2} + ln(xy) + \frac{x}{y} = k$

2.6 Cuarto método de resolución

2.6.1 Factor de integración

OBJETIVOS:

- Aplicar a una ecuación diferencial ordinaria el factor de integración.
- Resolver ecuaciones diferenciales por factor de integración aplicando los procesos correctos.

INTRODUCCIÓN: Considerar la ecuación diferencial de la forma:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \qquad (1)$$

Si la ecuación (1) no es exacta, se puede transformar en exacta, eligiendo una función "u" que pueda depender tanto de "x" como de "y", de tal manera que la ecuación:

$$\mu(x,y)M(x,y)dx + \mu(x,y)N(x,y)dy = 0 \qquad (2)$$

$$\mu(x,y)M(x,y) = H(x,y)$$
$$\mu(x,y)N(x,y) = P(x,y)$$

Entonces a la función $u(x,y)$, se llama factor integrante o factor de integración, como la ecuación (2) es exacta entonces se cumple:

$$\frac{\partial}{\partial y}[\mu(x,y).M(x,y)] = \frac{\partial}{\partial x}[\mu(x,y).N(x,y)]$$

Derivando el producto de funciones se tiene:

$$M(x,y)\frac{\partial\mu(x,y)}{\partial y} + \mu(x,y)\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = N(x,y)\frac{\partial\mu(x,y)}{\partial x} + \mu(x,y)\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

Agrupando la función $\mu(x,y)$:

$$M(x,y)\frac{\partial\mu(x,y)}{\partial y} - N(x,y)\frac{\partial\mu(x,y)}{\partial x} = \mu(x,y)\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \mu(x,y)\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}$$

Factorizando la función $\mu(x,y)$.

$$M(x,y)\frac{\partial\mu(x,y)}{\partial y} - N(x,y)\frac{\partial\mu(x,y)}{\partial x} = \mu(x,y)\left[\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}\right] \quad (3)$$

Para determinar el factor integrante se consideran los siguientes casos:

Primer caso:
Si "$\boldsymbol{u}$" es una función sólo de "x", entonces $\frac{\partial\mu(x,y)}{\partial y} = 0$, luego de la ecuación (3) resulta:

$$-N(x,y)\frac{\partial\mu(x,y)}{\partial x} = \mu(x,y)\left[\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}\right]$$

Multiplicar por (-1)

$$N(x,y)\frac{\partial\mu(x,y)}{\partial x} = \mu(x,y)\left[\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\right]$$

Esto da como resultado el proceso de variable separable:

$$\frac{\partial\mu(x,y)}{\mu(x,y)} = \frac{1}{N(x,y)}\left[\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\right]dx$$

Integrando las funciones:

$$\int\frac{\partial\mu(x,y)}{\mu(x,y)} = \int\frac{1}{N(x,y)}\left[\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\right]dx$$

Tomar la integral del lado derecho:

$$\int\frac{1}{N(x,y)}\left[\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\right]dx = \int f(x)dx$$

Donde el valor de la función $f(x)$ por el teorema fundamental del cálculo es:

$$f(x) = \frac{1}{N(x,y)}\left[\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\right]$$

Igualando a la otra integral:

$$\int\frac{\partial\mu(x,y)}{\mu(x,y)} = \int f(x)dx$$

$$ln\mu(x) = \int f(x)dx$$

Despejar la función $\mu(x)$:

$$\mu(x) = e^{\int f(x)dx}$$

Segundo caso: Si "**u**" es una función sólo de "y", entonces $\frac{\partial\mu(x,y)}{\partial x} = 0$, luego de la ecuación **(3)** resulta:

$$M(x,y)\frac{\partial\mu(x,y)}{\partial y} = \mu(x,y)\left[\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}\right]$$

$$\frac{\partial\mu(x,y)}{\mu(x,y)} = -\frac{1}{M(x,y)}\left[\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\right]dy$$

Integrando,

$$\int\frac{\partial\mu(x,y)}{\mu(x,y)} = -\int\frac{1}{M(x,y)}\left[\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\right]dy$$

Pero,

$$-\int\frac{1}{M(x,y)}\left[\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\right]dx = \int g(y)dy$$

Donde:

$$g(y) = -\frac{1}{M(x,y)}\left[\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\right]$$

Como,

$$\int\frac{\partial\mu(x,y)}{\mu(x,y)} = \int g(y)dy$$

$$ln\mu(y) = \int g(y)dy$$

Por tanto:

$$\mu(y) = e^{\int g(y)dy}$$

Tercer caso: En muchos ejercicios el factor integrante está dado en un producto de dos funciones $f(x)$ y $g(x)$, es decir $u(x,y) = f(x).g(y)$ que reemplazando en la **ecuación (3)** resulta.

$$M(x,y)\frac{\partial[f(x).g(y)]}{\partial y} - N(x,y)\frac{\partial[f(x).g(y)]}{\partial x} = f(x).g(y)\left[\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}\right]$$

$$M(x,y).f(x).g'(y) - N(x,y).f'(x).g(y) = f(x).g(y)\left[\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}\right]$$

esta expresión es similar a escribir:

$$\left[\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\right]f(x).g(y) = N(x,y).f'(x).g(y) - M(x,y).f(x).g'(y)$$

$$\left[\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\right] = N(x,y).\frac{f'(x)}{f(x)} - M(x,y)\frac{g'(y)}{g(y)} \qquad (4)$$

Donde M y N son funciones conocidas, de la ecuación (4) por inspección se puede determinar las funciones $f(x)$ y $g(y)$.

Cuarto caso: Para ciertos casos el factor integrante es la forma $u(x,y) = x^n y^m$ donde m y n se determinan mediante la condición necesaria y suficiente de las ecuaciones diferenciales exactas.

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Resolver la siguiente ecuación diferencial:

$$(1 - x^2 y)dx + x^2(y - x)dy = 0$$

Solución: Como se observa, no se puede resolver por ninguno de los métodos analizados.

P1. Partir del principio de verificar si es exacta, este proceso, es:

$$\begin{cases} M = 1 - x^2 y \\ N = x^2(y - x) = -x^3 + x^2 y \end{cases}$$

Para ver si es exacta se obtienen las derivadas opuestas:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial M}{\partial y} = -x^2 \\ \dfrac{\partial N}{\partial x} = -3x^2 + 2xy \end{cases}$$

Como se verifica, no es exacta:

$$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$$

P2. Transformar la E.D. a exacta mediante la ecuación la utilización del factor de integración $u(x, y)$, para lo cual se debe definir la variable "x", por tanto "y" es constante.

$$f(x) = \frac{1}{N(x,y)}\left[\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\right]$$

Sustituyendo sus valores:

$$f(x) = \frac{1}{x^2(y-x)}[-x^2 - (-3x^2 + 2xy)] = \frac{2x^2 - 2xy}{x^2(y-x)}$$

$$f(x) = \frac{2x(x-y)}{x^2(y-x)} = \frac{-2x(y-x)}{x^2(y-x)} = -\frac{2}{x}$$

P3. El factor integrante con respecto a $\mu(x)$ es:

$$\mu(x) = e^{\int f(x)dx}$$

Sustituir $f(x)$ en el factor de integración:

$$\mu(x) = e^{-\int \frac{2dx}{x}}$$

Integrando:

$$\mu(x) = e^{-2\int \frac{dx}{x}}$$

$$\mu(x) = e^{-2lnx}$$

Aplicando las propiedades de los logaritmos se tiene:

$$\mu(x) = e^{lnx^{-2}} = x^{-2}$$

$$\mu(x) = \frac{1}{x^2}$$

P4. Multiplicando a la ecuación diferencial por el factor de integración:

$$\mu(x) = \frac{1}{x^2}$$

Se tiene:

$$\left[(1 - x^2 y)dx + x^2(y - x)dy = 0\right]\frac{1}{x^2}$$

$$\left(\frac{1}{x^2} - y\right)dx + (y - x)dy = 0$$

P5. Comprobar que es exacta para ello se debe identificar los valores de las funciones M y N.

$$\begin{cases} M = \dfrac{1}{x^2} - y \\ N = (y - x) \end{cases}$$

Derivando las funciones con respecto a su variable contraria:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial M}{\partial y} = d\dfrac{1}{x^2} - dy \\ \dfrac{\partial N}{\partial x} = dy - dx \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial M}{\partial y} = 0 - 1 \\ \dfrac{\partial N}{\partial x} = 0 - 1 \end{cases}$$

$$\to \begin{cases} \dfrac{\partial M}{\partial y} = -1 \\ \dfrac{\partial N}{\partial x} = -1 \end{cases}$$

P6. Se verifica que se cumple la igualdad:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Lo que prueba que la ecuación diferencial es exacta, por tanto:

P7. Se tiene

$$\exists f(x,y);\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = M(x,y)$$

De donde,

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{1}{x^2} - y$$

P8. Ahora integrando con respecto a "x" :

$$\int \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \int \left(\frac{1}{x^2} - y\right) dx$$

$$f(x,y) = \int \left(\frac{1}{x^2} - y\right) dx$$

$$f(x,y) = \int (x^{-2}) dx - y \int dx$$

$$f(x,y) = \frac{x^{-2+1}}{-2+1} - yx + g(y)$$

$$f(x,y) = \frac{x^{-1}}{-1} - yx + g(y)$$

$$f(x,y) = -\frac{1}{x} - xy + g(y)$$

P9. Derivando respecto a “y”,

$$f(x,y) = -\frac{1}{x} - xy + g(y)$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = -x + g'(y)$$

P10. Luego sustituir:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = N(x,y)$$

Entonces,

$$N(x,y) = -x + g´(y)$$

$$y - x = -x + g´(y)$$

$$g´(y) = y$$

P11. Integrar respecto a "y":

$$\int g´(y)dy = \int ydy$$

$$g(y) = \frac{y^2}{2} + C$$

P12. Sustituir el valor de $g(y)$ en el paso 8.

$$f(x,y) = -\frac{1}{x} - xy + \frac{y^2}{2} + C$$

Como:

$$f(x,y) = 0$$

Se tiene,

$$-\frac{1}{x} - xy + \frac{y^2}{2} + C = 0$$

$$\frac{1}{x} + xy - \frac{y^2}{2} = C$$

$$2 + 2x^2y - xy^2 = Cx$$

2. Resolver la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{y}{x}dx + (y^3 - lnx)dy = 0$$

Solución:

P1. Partir del principio de verificar si son exactas, es decir:

$$\begin{cases} M = \dfrac{y}{x} \\ N = y^3 - lnx \end{cases}$$

Derivar,

$$\rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{1}{x} \\ \dfrac{\partial N}{\partial x} = -\dfrac{1}{x} \end{cases}$$

Como se verifica, no es exacta:

$$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$$

P2. Transformar la E. D. a exacta mediante la ecuación:

$$g(y) = -\frac{1}{M}\left[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right]$$

$$g(y) = -\frac{1}{\frac{y}{x}}\left[\frac{1}{x} + \frac{1}{x}\right]$$

$$g(y) = -\frac{x}{y}\left(\frac{2}{x}\right) = -\frac{2}{y}$$

P3. El factor integrante es:

$$\mu(y) = e^{-\int g(y)dy}$$

$$u(y) = e^{-2\int \frac{dy}{y}}$$

$$u(y) = e^{-2lny} = e^{lny^{-2}}$$

$$u(y) = y^{-2}$$

$$\mu(y) = \frac{1}{y^2}$$

P4. Multiplicando a la ecuación diferencial:

$$\mu(y) = \frac{1}{y^2}$$

Se tiene:

$$\frac{y}{xy^2}dx + \left(\frac{y^3}{y^2} - \frac{lnx}{y^2}\right)dy = 0$$

$$\left(\frac{1}{xy}\right)dx + \left(y - \frac{lnx}{y^2}\right)dy = 0$$

De la E.D. anterior se tiene:

$$\begin{cases} M = \dfrac{1}{xy} \\ N = \left(y - \dfrac{lnx}{y^2}\right) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} M = \dfrac{y^{-1}}{x} \\ N = \left(y - \dfrac{lnx}{y^2}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial M}{\partial y} = -\dfrac{y^{-2}}{x} \\ \dfrac{\partial N}{\partial x} = -\dfrac{1}{y^2} dln(x) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial M}{\partial y} = -\dfrac{1}{xy^2} \\ \dfrac{\partial N}{\partial x} = -\dfrac{1}{xy^2} \end{cases}$$

Lo que prueba que la ecuación diferencial es exacta, por tanto:

P6. Se tiene,

$$\exists f(x,y); \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = M(x,y)$$

De donde:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{1}{xy}$$

P7. Ahora integrar respecto a "x":

$$\int \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \int \frac{1}{xy}$$

$$f(x,y) = \frac{1}{y}\int \left(\frac{dx}{x}\right) + g(y)$$

$$f(x,y) = \frac{lnx}{y} + g(y)$$

P8. Derivar respecto a “y”:

$$f(x,y) = \frac{lnx}{y} + g(y)$$

$$f(x,y) = lnx(dy^{-1}) + dg(y)$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = -\frac{lnx}{y^2} + g'(y)$$

P9. Luego sustituir:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = N(x,y)$$

Entonces:

$$N = -\frac{lnx}{y^2} + g'(y)$$

$$y - \frac{lnx}{y^2} = -\frac{lnx}{y^2} + g'(y)$$

$$g'(y) = y$$

P10. Integrar:

$$\int g'(y) = \int y$$

$$g(y) = \frac{y^2}{2} + C$$

P11. Sustituir el valor de $g(y)$ en el paso P7 luego:

$$f(x,y) = \frac{lnx}{y} + \frac{y^2}{2} + C$$

Como:

$$f(x,y) = 0$$

Se tiene:

$$\frac{lnx}{y} + \frac{y^2}{2} + C = 0$$

$$\frac{lnx}{y} + \frac{y^2}{2} = k$$

3. Resolver la siguiente ecuación diferencial,

$$(xy + x^2y + y^3)dx + (x^2 + 2y^2)dy = 0$$

Solución:

P1. Partir del principio de este proceso, es decir:

$$\begin{cases} M = xy + x^2y + y^3 \\ N = x^2 + 2y^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} M = y(x + x^2 + y^2) \\ N = x^2 + 2y^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial M}{\partial y} = xdy + x^2dy + dy^3 \\ \dfrac{\partial N}{\partial x} = dx^2 + 2dy^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial M}{\partial y} = x + x^2 + 3y^2 \\ \dfrac{\partial N}{\partial x} = 2x \end{cases}$$

Como:

$$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$$

P2. La ecuación diferencial no es exacta, por otro lado, sea la función:

$$\mu(x, y) = f(x).g(y)$$

El factor integrante para esto es:

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = N\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right) - M\left(\frac{g'(y)}{g(y)}\right)$$

P3. Tomando la ecuación y sustituyendo se tiene:

$$x + x^2 + 3y^2 - 2x = (x^2 + 2y^2)\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right) - (xy + x^2y + y^3)\left(\frac{g'(y)}{g(y)}\right)$$

P4. Reduciendo términos semejantes, se tiene:

$$x^2 + 3y^2 - x = (x^2 + 2y^2)\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right) - (xy + x^2y + y^3)\left(\frac{g'(y)}{g(y)}\right)$$

P5. Resolver la igualdad aplicando la propiedad distributiva de sus factores:

$$x^2+3y^2-x=\left(x^2\frac{f'(x)}{f(x)}+2y^2\frac{f'(x)}{f(x)}\right)-(xy\frac{g'(y)}{g(y)}+x^2y\frac{g'(y)}{g(y)}+y^3\frac{g'(y)}{g(y)})$$

Relacionándolos:

$$\left\{\begin{matrix} x^2=x^2\dfrac{f'(x)}{f(x)}-x^2y\dfrac{g'(y)}{g(y)} \\ 3y^2=2y^2\dfrac{f'(x)}{f(x)}-y^3\dfrac{g'(y)}{g(y)} \\ -x=-xy\dfrac{g'(y)}{g(y)} \end{matrix}\right\}\rightarrow\left\{\begin{matrix} 1=\dfrac{f'(x)}{f(x)}-y\dfrac{g'(y)}{g(y)} \\ 3=2\dfrac{f'(x)}{f(x)}-y\dfrac{g'(y)}{g(y)}) \\ 1=y\dfrac{g'(y)}{g(y)} \end{matrix}\right\}$$

Resolver el sistema:

$$\left\{\begin{matrix} 1=\dfrac{f'(x)}{f(x)}-y\dfrac{g'(y)}{g(y)} \\ 3=2\dfrac{f'(x)}{f(x)}-y\dfrac{g'(y)}{g(y)} \\ \dfrac{g'(y)}{g(y)}=\dfrac{1}{y} \end{matrix}\right\}\rightarrow\left\{\begin{matrix} 1=\dfrac{f'(x)}{f(x)}-y\left(\dfrac{1}{y}\right) \\ 3=2\dfrac{f'(x)}{f(x)}-y\left(\dfrac{1}{y}\right) \\ \dfrac{g'(y)}{g(y)}=\dfrac{1}{y} \end{matrix}\right\}\rightarrow\left\{\begin{matrix} 1=\dfrac{f'(x)}{f(x)}-1 \\ 3=2\dfrac{f'(x)}{f(x)}-1 \\ \dfrac{g'(y)}{g(y)}=\dfrac{1}{y} \end{matrix}\right\}$$

$$\left\{\begin{matrix} \dfrac{f'(x)}{f(x)}=2 \\ \dfrac{g'(y)}{g(y)}=\dfrac{1}{y} \end{matrix}\right\}$$

P6. Proceder a integrar estas funciones:

$$\left\{\begin{matrix} \dfrac{f'(x)}{f(x)}=2 \\ \dfrac{g'(y)}{g(y)}=\dfrac{1}{y} \end{matrix}\right\}\rightarrow\left\{\begin{matrix} \displaystyle\int\frac{f'(x)}{f(x)}=2\int dx \\ \displaystyle\int\frac{g'(y)}{g(y)}=\int\frac{dy}{y} \end{matrix}\right\}$$

$$\left\{\begin{matrix} lnf(x)=2x \\ lng(y)=lny \end{matrix}\right\}\rightarrow\left\{\begin{matrix} f(x)=e^{2x} \\ g(y)=y \end{matrix}\right\}$$

P7. Con esto se encuentra la función del factor de integración:

$$\mu(x,y) = f(x).\,g(y) = ye^{2x}$$

P8. Ahora multiplicar a la ecuación diferencial por el factor:

$$\mu(x,y) = ye^{2x}$$

Se tiene:

$$ye^{2x}(xy + x^2y + y^3)dx + ye^{2x}(x^2 + 2y^2)dy = 0$$

Comprobar si es una ecuación diferencial exacta, es decir:

$$\left\{\begin{matrix} M = ye^{2x}(xy + x^2y + y^3) \\ N = ye^{2x}(x^2 + 2y^2) \end{matrix}\right\} \rightarrow \left\{\begin{matrix} M = xy^2e^{2x} + x^2y^2e^{2x} + y^4e^{2x} \\ N = yx^2e^{2x} + 2y^3e^{2x} \end{matrix}\right\}$$

$$\left\{\begin{matrix} M = e^{2x}(xy^2 + x^2y^2 + y^4) \\ N = yx^2e^{2x} + 2y^3e^{2x} \end{matrix}\right\} \rightarrow \left\{\begin{matrix} \dfrac{\partial M}{\partial y} = e^{2x}(2xy + 2x^2y + 4y^3) \\ \dfrac{\partial N}{\partial x} = y(x^2de^{2x} + e^{2x}dx^2) + 2y^3de^{2x} \end{matrix}\right\}$$

$$\left\{\begin{matrix} \dfrac{\partial M}{\partial y} = e^{2x}(2xy + 2x^2y + 4y^3) \\ \dfrac{\partial N}{\partial x} = y(2x^2e^{2x} + 2xe^{2x}) + 2y^3(2e^{2x}) \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} \dfrac{\partial M}{\partial y} = e^{2x}(2xy + 2x^2y + 4y^3) \\ \dfrac{\partial N}{\partial x} = e^{2x}(2xy + 2x^2y + 4y^3) \end{matrix}\right\}$$

Donde se tiene, que: $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$

Lo que prueba que la ecuación diferencial es exacta.

P9. Por tanto:

$$\exists f(x,y);\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = M$$

De donde:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = y^2e^{2x}(x + x^2 + y^2)$$

P10. Ahora integrar respecto a "x":

$$f(x,y)=\int \left(y^2e^{2x}(x+x^2+y^2)\right)dx$$

$$f(x,y)=y^2\int xe^{2x}+y^2\int x^2e^{2x}+y^4\int e^{2x}+g(y)$$

Aplicando integración por partes o ILATE, se resuelve la integral:

$$y^4\int e^{2x}dx=\frac{y^4e^{2x}}{2}$$

$$\int xe^{2x}dx=x\left(\frac{e^{2x}}{2}\right)-\frac{e^{2x}}{4}$$

Derivada	**Integral**
x	e^{2x}
1	$\frac{e^{2x}}{2}$
0	$-\frac{e^{2x}}{4}$

$$\int x^2e^{2x}dx=x^2\left(\frac{e^{2x}}{2}\right)-x\left(\frac{e^{2x}}{2}\right)+\left(\frac{e^{2x}}{4}\right)$$

Derivada	**Integral**
x^2	e^{2x}
$2x$	$\frac{e^{2x}}{2}$
2	$\frac{e^{2x}}{4}$
0	$\frac{e^{2x}}{8}$

$$f(x,y) = \frac{x^2e^{2x}}{2} - \frac{2xe^{2x}}{4} + \frac{2e^{2x}}{8}$$

$$f(x,y) = \frac{y^4e^{2x}}{2} + xy^2\left(\frac{e^{2x}}{2}\right) - \frac{y^2e^{2x}}{4} + \frac{y^2x^2e^{2x}}{2} - \frac{y^2xe^{2x}}{2} + \frac{y^2e^{2x}}{4} + g(y)$$

$$f(x,y) = \frac{y^4e^{2x}}{2} + \frac{y^2x^2e^{2x}}{2} + g(y)$$

P11. Derivando respecto a "y":

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{4y^3e^{2x}}{2} + \frac{2yx^2e^{2x}}{2} + g'(y)$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = N$$

Entonces:

$$N = \frac{4y^3e^{2x}}{2} + \frac{2ye^{2x}}{2} + g'(y)$$

$$yx^2e^{2x} + 2y^3e^{2x} = 2y^3e^{2x} + yx^2e^{2x} + g'(y)$$

$$g'(y) = 0$$

P12. Integrar:

$$g(y) = C$$

P13. Sustituyo el valor de $g(y)$ en el paso P10, se tiene:

$$f(x,y) = \frac{y^4e^{2x}}{2} + \frac{y^2x^2e^{2x}}{2} + C$$

Como:

$$f(x,y) = 0$$

Se tiene:

$$k = \frac{y^4e^{2x}}{2} + \frac{y^2x^2e^{2x}}{2}$$

4. Resolver la siguiente ecuación diferencial:

$$2ydx - xdy = xy^3dy$$

Solución:

P1. Partir del principio de este proceso, es decir de:

$$2ydx - (x + xy^3)dy = 0$$

$$\begin{cases} M = 2y \\ N = x + xy^3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial M}{\partial y} = 2 \\ \dfrac{\partial N}{\partial x} = 1 + y^3 \end{cases}$$

Como se observa, no es exacta:

$$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$$

P2. Transformar a E.D. exacta mediante la aplicación de: $u(x, y) = x^m . y^n$

Para ello se tiene:

$$[2ydx - (x + xy^3)dy = 0]x^m . y^n$$

$$[2x^m . y^{n+1}dx - (x^{m+1} . y^n + x^{m+1} . y^{n+3})dy = 0]$$

P3. Hallar los nuevos valores de las funciones M y N.

$$M(x, y) = 2x^m . y^{n+1}$$

$$N(x, y) = x^{m+1} . y^n + x^{m+1} . y^{n+3}$$

P4. Hallar la derivada con respecto a la variable opuesta:

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = 2(n + 1)x^m . y^n$$

$$\frac{\partial N(x, y)}{\partial x} = (m + 1)x^m . y^n + (m + 1)x^m . y^{n+3}$$

P5. Con este proceso se convierte en E.D. homogénea, por lo que se cumple:

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}$$

$$2(n + 1)x^m y^n = -(m + 1)x^m y^n - (m + 1)x^m y^{n+3}$$

Luego el sistema queda:

$$\begin{cases} 2(n+1) = -(m+1) \\ -(m+1) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} n = -1 \\ m = -1 \end{cases}$$

El factor de integración es, $u(x,y) = x^{-1}.y^{-1}$

$$u(x,y) = \frac{1}{xy}$$

P6. Multiplicar a la ecuación por el factor de integración:

$$\frac{2y}{xy}dx - \frac{x}{xy}dy = \frac{xy^3}{xy}dy$$

$$\frac{2}{x}dx - \left(\frac{1}{y} + y^2\right)dy = 0$$

P7. Proceder a revisar si es una E.D. exacta:

$$\begin{cases} M = \dfrac{2}{x} \\ N = -\left(\dfrac{1}{y} + y^2\right) \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial M}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial N}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

P8. Entonces, $\exists f(x,y)$; $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = M$,

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{2}{x}$$

Integrando respecto a "x":

$$f(x,y) = 2\int \frac{dx}{x}$$

$$f(x,y) = 2\ln(x) + g(y)$$

P9. Calcular $g(y)$, y derivar respecto a "y":

$$f(x,y) = 2\ln(x) + g(y)$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = g'(y)$$

P10. Luego se tiene $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = N$, entonces:

$$-\left(\frac{1}{y} + y^2\right) = g'(y)$$

Integrando:

$$\int g'(y)dy = -\int \frac{dy}{y} - \int y^2 dy$$

$$g(y) = -\ln(y) - \frac{y^3}{3} + C$$

P11. Sustituir en el paso P8:

$$f(x,y) = 2\ln(x) - \ln(y) - \frac{y^3}{3} + C$$

Luego:

$$f(x,y) = 0$$

$$2\ln(x) - \ln(y) - \frac{y^3}{3} = k$$

ACTIVIDAD 7

Resolver los siguientes ejercicios mediante el factor de integración.

1. Hallar la solución de la E.D. $(y^2 + 3xy) + (x^2 + xy)y' = 0$.

   Resp. $x^3y + \frac{x^2y^2}{2} = C$

2. Hallar la solución de la E.D. $x^2y^3 + x(1 + y^2)y' = 0$.

   Resp. $x^2 + 2lny - y^{-2} = C$

3. Hallar la solución de la E.D. $\left(\frac{seny}{y} - 2e^{-x}senx\right)dx + \left(\frac{cosy+2e^{-x}cosx}{y}\right)dy = 0$.

   Resp. $y + 2ycosx = C$

4. Hallar la solución de la E.D. $dx + \left(\frac{x}{y} - seny\right) dy = 0$.
   Resp. $xy + ycosy - seny = C$

5. Hallar la solución de la E.D. $3x + \frac{6}{y} + \left(\frac{x^2}{y} + \frac{3y}{x}\right) y' = 0$.
   Resp. $x^3y + 3x^2 + y^3 = C$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Hallar la solución general de la ecuación diferencial: $e^x dx + (e^x ctgy + 2ycscy)dy = 0$.
Resp. $e^x seny + y^2 = k$

2. Determinar si la siguiente ecuación diferencial es o no exacta, en caso afirmativo encontrar su solución general:

$$(xcosy - yseny)dy + (xseny + ycosy)dx = 0$$

Resp. $xe^x seny - e^x seny + ye^x cosy = k$

3. Hallar un factor integrante $u = \varphi(x + y^2)$ de la ecuación diferencial $(3y^2 - x)dx + (2y^3 - 6xy)dy = 0$ y luego resolver la ecuación.
Resp. $x - y^2 = c(x + y^2)^2$

4. Determine si la ecuación diferencial: $(x^2 - y^2 + 1)dx + (x^2 - y^2 - 1)dy = 0$, admite un factor integrante "u" que sea función de $x + y = z$.

2.6.2 Otras formas de ecuaciones diferenciales ordinarias

OBJETIVO

- Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias aplicando principios lógicos correctos.

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Hallar la solución de $seny' = 0$.

Solución:

P1. Despejar la derivada de la ecuación diferencial: $y' = arcsen0$

P2. Establecer el valor $arcsen0 = 0$

Pero este valor es periódico, por tanto

$$arcsen0 = 0 = \pi n$$

Para $n = 0$:

Para $n = 1$:

$$arcsen0 = 0$$

$$arcsen0 = \pi$$

P3. Con esta aclaración se tiene la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = \pi n$$

P4. Resolver la E.D. por variables separables:

$$\frac{dy}{dx} = \pi n$$

$$dy = \pi n dx$$

P5. Integrar las funciones

$$\int dy = \pi n \int dx$$

$$y = \pi nx + C, n\epsilon Z$$

ACTIVIDAD 8

Resolver los siguientes ejercicios:

1. Hallar la solución de $lny' = x$.
2. Hallar la solución de $tagy' = x$.
3. Hallar la solución de $e^{y'} = 1$.
4. Hallar la solución de $cosy' = 0$.

3

Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden

Capítulo
3

Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden

3.1 Contenidos

1. Ecuaciones diferenciales lineales.
2. Orden de las ecuaciones diferenciales lineales.
3. Resolución.
4. Métodos de resolución.
5. Resolución por Bernoulli.
6. Resolución por Riccati.
7. Resolución Lagrange y Clairout.
8. Resolución soluciones singulares.

3.2 Objetivos

- Aplicar el razonamiento lógico para identificar la ecuación diferencial lineal.
- Resolver las ecuaciones diferenciales lineales utilizando el método que corresponda.
- Relacionar con otras ciencias su aplicabilidad.

PRIMER MÉTODO DE RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES

Definición: Considerar la ecuación diferencial ordinaria

$$a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_2(x)y = f(x) \qquad (1)$$

donde a_1, a_2 y f son funciones solamente de la variable "x" o como funciones constantes, supóngase $a_1(x) \neq 0$, entonces dividiendo la ecuación (1) para $a_1(x)$, se tiene

$$\frac{dy}{dx} + \frac{a_2(x)}{a_1(x)}y = \frac{f(x)}{a_1(x)}$$

Para simplificar la ecuación, se debe relacionar:

$$\frac{a_2(x)}{a_1(x)} = P(x)$$

$$\frac{f(x)}{a_1(x)} = Q(x)$$

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \qquad (2)$$

A esta ecuación se le conoce como la ecuación diferencial lineal de primer orden en "y", si $Q(x) = 0$, la ecuación (2) toma la forma:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0 \qquad (3)$$

A esta ecuación se la conoce como ecuación diferencial lineal homogénea (Castro, 2022, p. 106) y es una ecuación diferencial en variable separable y su solución está dada por

$$y = Ke^{-\int P(x)dx}$$

Si $Q(x) \neq 0$ es decir la ecuación (2) se llama ecuación diferencial no homogénea (Zill, 2009, p. 116).

Como $Q(x) \neq 0$ la ecuación (2) no es exacta, esto lleva a determinar un factor de integración para su solución.

Si $I(x)$ es un factor integrante sólo de "x", a la ecuación (2) se lo expresa así

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

$$dy + [P(x)y - Q(x)]dx = 0$$

$$[P(x)y - Q(x)]dx + dy = 0$$

Al multiplicar por el factor de integración $I(x)$

$$I(x).[P(x)y - Q(x)]dx + I(x)dy = 0$$

Se tiene una ecuación diferencial exacta, en efecto

$$\frac{\partial I(x).[P(x)y - Q(x)]}{\partial y} = \frac{\partial I(x)}{\partial x}$$

Resolviendo términos semejantes se tiene:

$$I(x)P(x) = \frac{dI(x)}{dx}$$

Agrupando, se tiene:

$$P(x)dx = \frac{dI(x)}{I(x)}$$

Integrando respecto a la variable "x":

$$\int \frac{dI(x)}{I(x)} = \int P(x)dx$$

Entonces se tiene:

$$lnI(x) = \int P(x)dx$$

Aplicando antilogaritmos, se despeja $I(x)$

$$I(x) = e^{\int P(x)dx}$$

que es el factor de integración. Ahora, al multiplicar a la ecuación diferencial:

$$[P(x)y - Q(x)]dx + dy = 0$$

$$e^{\int P(x)dx}[P(x)y - Q(x)]dx + e^{\int P(x)dx}dy = 0$$

Obteniendo una ecuación exacta; es decir, existe una función $F(x, y)$ tal que se cumple:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = e^{\int P(x)dx}[P(x)y - Q(x)]$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = e^{\int P(x)dx}$$

Integrando la función $\frac{\partial F}{\partial y} = e^{\int P(x)dx}$ respecto a “y” se obtiene

$$f(x, y) = ye^{\int P(x)dx} + g(x)$$

Por otra parte:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = e^{\int P(x)dx}[P(x)y - Q(x)]$$

Se concluye que:

$$g'(x) = -Q(x)e^{\int P(x)dx}$$

que integrando resulta:

$$g(x) = -\int Q(x)e^{\int P(x)dx} + k$$

Por lo tanto:

$$f(x,y) = ye^{\int P(x)dx} - \int Q(x)e^{\int P(x)dx} + k$$

y la solución general $f(x,y) = C$, o lo que es lo mismo:

$$C = ye^{\int P(x)dx} - \int Q(x)e^{\int P(x)dx} + k$$

obteniéndose finalmente:

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + k\right]$$

que es la solución general de la ecuación **(2)**.

NOTA ACLARATORIA

Una ecuación diferencial lineal es de primer orden si cumple lo siguiente (Boyce & DiPrima, 2009):

1. Que la derivada no tenga exponente.
2. Que la variable que tiene la derivada se llama variable dependiente y esta no debe tener exponente en ninguna parte de la ecuación diferencial.
3. Que la variable no esté dentro de una raíz, funciones trigonométricas o logarítmicas.

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Verificar si la siguiente ecuación diferencial es lineal: $2xy' + x^2y = 7x + 2$.

Solución:
P1. Determinar la variable que tiene la derivada, en este caso es "y".
P2. Revisar que no tenga exponente la variable "y"; en este caso se cumple la condición.
P3. Verificar que no esté dentro de la raíz, funciones trigonométricas o logarítmicas, lo cual también se cumple en este caso.

P4. Por tanto, la ecuación planteada es lineal.

2. Verificar si la siguiente ecuación diferencial es lineal: $xy' + 5y^2 = 4x$.

Solución:
P1. Determinar la variable que tiene la derivada, en este caso es "y".
P2. Revisar que no tenga exponente esta variable y, no se cumple ya que se tiene el término y^2.
P3. Por tanto, la ecuación planteada no es lineal.

3. Verificar si la siguiente ecuación diferencial es lineal: $7x(y')^4 + 5xy = -1$.

Solución:
P1. Determinar la variable que tiene la derivada, en este caso es "y".
P2. Revisar que no tenga exponente esta variable "y", no se cumple ya que se tiene el término $(y')^4$.
P3. Por tanto, la ecuación planteada no es lineal.

ACTIVIDAD 9

Identificar, cuáles de las siguientes ecuaciones diferenciales son lineales y cuáles son no lineales:

- $y' + 5y = seny$ (actividad del estudiante en clase).
- $y'cosx + 5xlny = -1$.
- $y - 2y' + x = 0$.
- $4x^2 \frac{dy}{dx} - 3x = 2y$.

SEGUNDO MÉTODO DE RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES

Otra forma de resolver las ecuaciones diferenciales lineales es mediante el proceso.

$$uz = \int qudx$$

Aclarando que $u = e^{\int p(x)dx}$, es el factor de integración; además, las funciones $P(x)$ y $Q(x)$ se toma de la misma manera que el método anterior.

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Identificar si la siguiente ecuación diferencial es una E.D. lineal de primer orden.

$$4xy' + 5y' + 3y = 1 + 2y$$

Solución:

P1. Identificar la variable que lleva la derivada y'.
P2. Verificar si la variable "y" no tiene exponente y no está dentro de otra función.

P3. Cumple con estas condiciones, por tanto, es lineal.

2. Identificar si la siguiente ecuación diferencial es una E.D. lineal de primer orden.

$$\frac{dx}{dy} + 5xy^2 = seny$$

Solución:

P1. Identificar a la variable que lleva la derivada, se observa que es x'.
P2. Verificar si la variable "x" no tiene exponente y que no esté dentro de otra función.
P3. Cumple con estas condiciones por tanto es lineal y queda $x' + 5xy^2 = seny$.

3. Resolver la siguiente ecuación diferencial: $\frac{dy}{dx} + 2y = x^2 + 2x$

Solución:

P1. Partir de la ecuación diferencial lineal cuya notación es:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

Por tanto, la ecuación a resolver tiene esta forma:

$$\frac{dy}{dx} + 2y = x^2 + 2x$$

P2. Determinar los valores de las funciones $P(x), Q(x)$:

$P(x) = 2$, y $Q(x) = x^2 + 2x$

P3. Aplicar la fórmula de la solución de una ecuación diferencial lineal se tiene:

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + k\right]$$

P4. Reemplazando los datos obtenidos, resulta:

$$y = e^{-\int 2dx}\left[\int e^{\int 2dx}(x^2 + 2x)dx + k\right]$$

$$y = e^{-2\int dx}\left[\int e^{2\int dx}(x^2 + 2x)dx + k\right]$$

P5. Efectuando las primeras integrales se tiene:

$$y = e^{-2x}\left[\int e^{2x}(x^2 + 2x)dx + k\right]$$

P6. Resolviendo esta expresión se obtiene:

$$y = e^{-2x}\left[\int e^{2x}x^2dx + 2\int xe^{2x} + k\right]$$

P7. Desarrollando las integrales por separado y aplicando el principio ILATE o por partes, se resuelve la integral:

$$\int x^2e^{2x}dx = \left\{\begin{array}{cc} D & I \\ x^2 & e^{2x} \\ 2x & \dfrac{e^{2x}}{2} \\ 2 & \dfrac{e^{2x}}{4} \\ 0 & \dfrac{e^{2x}}{8} \end{array}\right\}$$

Multiplicando la derivada con la integral en cruz intercalado el signo $+, -$, se obtiene:

$$x^2.\frac{e^{2x}}{2} - 2x.\frac{e^{2x}}{4} + 2.\frac{e^{2x}}{8}$$

$$\frac{x^2e^{2x}}{2} - \frac{xe^{2x}}{2} + \frac{e^{2x}}{4}$$

De la misma manera, la otra integral:

$$2\int xe^{2x}dx = \left\{\begin{array}{cc} D & I \\ x & e^{2x} \\ 1 & \dfrac{e^{2x}}{2} \\ 0 & \dfrac{e^{2x}}{4} \end{array}\right\}$$

Multiplicando la derivada con la integral en cruz intercalado el signo $+, -$, se obtiene:

$$2x.\frac{e^{2x}}{2} - 2.\frac{e^{2x}}{4} = xe^{2x} - \frac{e^{2x}}{2}$$

P8. Sustituyendo el resultado anterior en el paso P6:

$$y = e^{-2x}\left[\int x^2e^{2x}dx + 2\int xe^{2x}dx + C\right]$$

$$y = e^{-2x}\left[\frac{x^2e^{2x}}{2} - \frac{xe^{2x}}{2} + \frac{e^{2x}}{4} + xe^{2x} - \frac{e^{2x}}{2} + C\right]$$

$$y = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{4} + x - \frac{1}{2} + Ce^{-2x}\right] = \left[\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} - \frac{1}{4} + Ce^{-2x}\right]$$

4. Resolver la siguiente ecuación diferencial: $\frac{dy}{dx} + 2y = x^2 + 2x$

Solución: Usando el segundo método.

P1. Partiendo de la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} + 2y = x^2 + 2x$$

P2. Determinar: $P(x) = 2;\ Q(x) = x^2 + 2x.$

P3. Aplicando la ecuación:

$$uz = \int qudx$$

Determinar:

$$u = e^{\int p(x)dx}$$
$$u = e^{2\int dx} = e^{2x}$$

Sustituir los valores en la ecuación:

$$e^{2x}z = \int (x^2 + 2x)e^{2x}dx$$

P4. Integrar:

$$e^{2x}z = \int x^2 e^{2x}dx + 2\int xe^{2x}dx$$

Resolviendo por integración por partes: $\int udv = u.v - \int vdu$

$$u = x^2; \qquad dv = e^{2x}dx$$
$$du = 2xdx; \quad v = \frac{e^{2x}}{2}$$

$$e^{2x}z = \frac{e^{2x}}{2} * x^2 - 2\int \frac{e^{2x}}{2} * xdx + 2\int xe^{2x}dx$$

$$e^{2x}z = \frac{e^{2x}}{2} * x^2 - \int xe^{2x}dx + 2\int xe^{2x}dx$$

$$e^{2x}z = \frac{e^{2x}}{2} * x^2 + \int xe^{2x}dx$$

Otra vez aplicando la integración por partes:

$$u = x; \qquad dv = e^{2x}dx$$

$$du = dx; \quad v = \frac{e^{2x}}{2}$$

Sustituyendo en el problema original:

$$e^{2x}z = \frac{e^{2x}}{2} * x^2 + \left[\frac{e^{2x}}{2} * x - \int \frac{e^{2x}}{2}dx\right]$$

$$e^{2x}z = \frac{x^2e^{2x}}{2} + \frac{xe^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} + C$$

Despejando “z”, se tiene:

$$z = \frac{x^2e^{2x}}{2e^{2x}} + \frac{xe^{2x}}{2e^{2x}} - \frac{e^{2x}}{4e^{2x}} + \frac{C}{e^{2x}}$$

$$z = \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} - \frac{1}{4} + \frac{C}{e^{2x}}$$

5. Encontrar la solución particular de la ecuación diferencial con las condiciones iniciales detalladas:

$$y' + ytagx = cos^2x; \;\; f(0) = 2 = y; x = 0$$

Solución:

P1. Como es una ecuación lineal se deben determinar los valores:

$$P(x) = tanx; \; Q(x) = cos^2x$$

Aplicando la regla correspondiente:

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left[\int e^{\int P(x)dx} * Q(x)dx + k\right]$$

Sustituyendo sus valores:

$$y = e^{-\int tanxdx}\left[\int e^{\int tanxdx}(cos^2x)dx + C\right]$$

P2. Calculando el factor integrante, que está dado por:

$$y = e^{-\int tagxdx}$$

$$y = e^{-\int \frac{senx}{cosx}dx}$$

Realizando la sustitución:

$$\begin{cases} u = cosx \\ du = -senxdx \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u = cosx \\ -\dfrac{du}{senx} = dx \end{cases}$$

se tiene:

$$y = e^{-\int \frac{senx}{u}\left(-\frac{du}{senx}\right)}$$

$$y = e^{\int \left(\frac{du}{u}\right)}$$

$$y = e^{lnu}$$

$$y = e^{lnu}$$

$$y = u$$

Sustituyo el valor de "u":

$$y = cosx$$

Por lógica, la integral del otro factor es:

$$y = e^{\int tagxdx}$$

$$y = e^{-\int \left(\frac{du}{u}\right)}$$

$$y = e^{-lnu}$$

$$y = u^{-1} = \frac{1}{cosx} = secx$$

P3. Reemplazando en la ecuación:

$$y = e^{-\int tanxdx}\left[\int e^{\int tanxdx}(cos^2x)dx + C\right]$$

$$y = cosx\left[\int secx(cos^2x)dx + C\right]$$

$$y = cosx\left[\int cosxdx + C\right]$$

$$y = cosx[senx + C]$$

P4. La solución general está dada por:

$$y = cosx.senx + Ccosx$$

P5. Ahora se puede encontrar la solución particular, usando la condición inicial para encontrar C; es decir, $y(0) = 2$, por tanto, la solución está dada por:

$$2 = cos0 * sen0 + C * cos0$$

$$2 = C$$

Sustituir el valor de C en la ecuación de paso P4.:

$$y = cosx * senx + 2cosx$$

6. Encontrar la solución particular de la ecuación diferencial con las condiciones iniciales detalladas:

$$y' + ytagx = cos^2x; \;\; f(0) = 2 = y; x = 0$$

Solución: En este ejercicio se aplicará el método del factor de integración.

$$uy = \int qudx$$

P1. Determinar: $P(x) = tanx$, y $Q(x) = cos^2x$.

P2. Aplicar el factor de integración:

$$u = e^{\int p(x)dx}$$

$$u = e^{\int tanx} = e^{lnsecx} = secx$$

P3. Sustituyendo los valores en la ecuación:

$$secx * y = \int secx * cos^2xdx$$

P4. Integrando y sustituyendo el valor de $secx = \frac{1}{cosx}$

$$secx * y = \int \frac{1}{cosx} * cos^2xdx$$

$$y = \frac{1}{secx}\left[\int cosxdx + C\right]$$

$$y = cosx\left[\int cosxdx + C\right]$$

$$y = cosx[senx + C]$$

$$y = cosxsenx + Ccosx$$

Sustituir los valores iniciales $y(0) = 2$

$$2 = cos0 * sen(0) + C * cos0$$

$$2 = C$$

P5. Sustituyendo el valor de C en la ecuación del paso P4, se tiene:

$$y = cosx * senx + 2cosx$$

7. Resolver la ecuación diferencial

$$y' + \frac{1}{x}y = x; \quad y(1) = 2$$

Solución:

P1. En este caso se determina $P(x) = \frac{1}{x}; Q(x) = x$

P2. Aplicando la expresión lineal

$$y = e^{-\int\frac{dx}{x}}\left[\int e^{\int\frac{dx}{x}}(x)dx + C\right]$$

P3. Integrando

$$y = e^{-lnx}\left[\int e^{lnx}(x)dx + C\right]$$

$$y = x^{-1}\left[\int x(x)dx + C\right]$$

$$y = x^{-1}\left[\frac{x^3}{3} + C\right]$$

$$y = \left[\frac{x^2}{3} + \frac{C}{x}\right]$$

P4. Considerando las condiciones

$$2 = \left[\frac{1^2}{3} + \frac{C}{1}\right]$$

$$C = \frac{5}{3}$$

P5. Por tanto, la solución es

$$y = \left[\frac{x^2}{3} + \frac{3}{5x}\right]$$

8. Encontrar el problema de valor inicial de la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dt}=\frac{2t}{1+t^2}y+\frac{2}{1+t^2};\ \ y(0)=0{,}4$$

Solución:
Poner la ecuación diferencial en forma lineal:

$$\frac{dy}{dt}+P(t)y=Q(t)$$

$$\frac{dy}{dt}-\frac{2t}{1+t^2}y=\frac{2}{1+t^2}$$

P1. En este caso se determina: $P(t)=\frac{2t}{1+t^2};Q(t)=\frac{2}{1+t^2}$

P2. Se tiene que el factor integrante está dado por:

$$y=e^{\int\frac{2t}{1+t^2}dt}\left[\int e^{-\int\frac{2t}{1+t^2}dt}\left(\frac{2}{1+t^2}\right)dt+C\right]$$

$$y=e^{\ln(1+t^2)}\left[\int e^{\ln(1+t^2)}\left(\frac{2}{1+t^2}\right)dt+C\right]$$

$$y=(1+t^2)\left[\int\left(\frac{1}{1+t^2}\right)\left(\frac{2}{1+t^2}\right)dt+C\right]$$

$$y=(1+t^2)\left[\int\frac{2}{(1+t^2)^2}dt+C\right]$$

Integrando la función $\int\frac{2}{(1+t^2)^2}dt$, para lo cual se aplica el procedimiento que a continuación se aplica:

$$\int\frac{dt}{(1+t^2)^n}=\left[\frac{t}{2(n-1)(1+t^2)^{n-1}}+\frac{(2n-3)}{(2n-2)}\int\frac{dt}{(1+t^2)^{n-1}},n>1\right]$$

$$\int\frac{2}{(1+t^2)^2}dt=2\left[\frac{t}{2(2-1)(1+t^2)^{2-1}}+\frac{(2.2-3)}{(2.2-2)}\int\frac{dt}{(1+t^2)^{2-1}}\right]$$

$$\int\frac{2}{(1+t^2)^2}dt=2\left[\frac{t}{2(1+t^2)}+\frac{1}{2}\int\frac{dt}{(1+t^2)}\right]$$

$$\int\frac{2}{(1+t^2)^2}dt=\left[\frac{t}{(1+t^2)}+\int\frac{dt}{(1+t^2)}\right]$$

$$\int \frac{2}{(1+t^2)^2} dt = \left[\frac{t}{(1+t^2)} + arctg(t)\right]$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial final del paso P2 se tiene:

$$y = (1+t^2)\left[\int \frac{2}{(1+t^2)^2} dt + C\right]$$

$$y = (1+t^2)\left[\frac{t}{(1+t^2)} + arctg(t) + C\right]$$

$$y = [t + (1+t^2)arctg(t) + (1+t^2)C]$$

P3. Finalmente, aplicando la condición inicial $y(0) = 0{,}4$ resulta $C = 0{,}4$, por tanto la solución del problema está dada por:

$$y = t + (1+t^2)tg(t) + 0{,}4(1+t^2)$$

9. Indicar si las siguientes ecuaciones diferenciales son lineales y cuál es el orden:

   a. $12x^2y'' + 5y' = 2y'''$

   Solución:

   P1. Identificar la variable que lleva la derivada y.
   P2. Verificar si la variable "y" no tiene exponente y no está dentro de otra función.
   P3. Cumple con estas condiciones, por tanto, es una ecuación lineal de orden 3.

   b. $7xy'' + 12x^2y^2 - 15x = 2$

   Solución:

   P1. Identificar la variable que lleva la derivada y.
   P2. Verificar si la variable "y" no tiene exponente y no está dentro de otra función. La ecuación planteada no cumple esta condición y^2.
   P3. Por tanto, la ecuación planteada no es lineal.

   c. $7xy' + \sqrt{xy} - 15x = 0$

   Solución:

P1. Identificar la variable que lleva la derivada y.
P2. Verificar si la variable "y" no tiene exponente y no está dentro de otra función. La ecuación planteada no cumple esta condición y^2.
P3. Por tanto, la ecuación planteada no es lineal.

d. $\frac{d^5y}{dx^5} + y = 0$

Solución:

P1. Identificar la variable que lleva la derivada y.
P2. Verificar si la variable "y" no tiene exponente y no está dentro de otra función.
P3. Por tanto, la ecuación planteada es lineal de orden 5.

e. $12cosy - 13x'' + 10x' = 3x$

Solución:

P1. Identificar la variable que lleva la derivada x.
P2. Verificar si la variable "x" no tiene exponente y no está dentro de otra función.
P3. Por tanto, la ecuación planteada es lineal de orden 2.

ACTIVIDAD 10

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:

1. La ecuación: $\frac{dy}{dx} = \frac{1-xy}{1-x^2}$
   Resp. $y = x + C\sqrt{1-x^2}$

2. La ecuación: $dx = \frac{dy-(x+1)ydx}{x^2+4x+2}$
   Resp. $y = Ce^{x+\frac{x^2}{2}} - x - 3$

3. La ecuación: $xy' = x - y + tagx$
   Resp. $xycosx = C + cosx + xsenx$

4. La ecuación: $\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x}y = \frac{cosx}{x^2}, y(\pi) = 0; x > 0$
   Resp. $y = \frac{senx}{x^2}$

5. La ecuación: $\frac{dy}{dx} - ytagx = \frac{1}{cosx}, y(0) = 0$
   Resp. $y = \frac{x}{cosx}$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Hallar la solución general de la ecuación diferencial: $(xlnx)\frac{dy}{dx} - y = x^3(3lnx - 1)$
   Resp. $y = x^3 + c(lnx)$

2. Resolver la ecuación diferencial: $y' + \left(\frac{e^x}{1+e^x}\right)y = x$
   Resp. $y = \left(\frac{1}{1+e^x}\right)[C + x + (x-1)e^x]$
3. Hallar la solución de la ecuación diferencial: $\frac{dy}{dx} - 2xy = cosx - 2xsenx$, donde "$y$" es una función acotada, cuando $x \to \infty$.
   Resp. $y = senx$
4. Determinar la solución de la ecuación diferencial: $\frac{dy}{dx} + \varphi'(x)y - \varphi(x)\varphi'(x) = 0$.
   Resp. $y = \varphi(x) - 1 + ce^{-\varphi(x)}$

5. Determinar la solución de la ecuación diferencial: $(1+x^2)ln(1+x^2)\frac{dy}{dx} - 2xy = ln(1+x^2) - 2xarctgx$, donde $y \to -\frac{\pi}{2}$, cuando $x \to \infty$.
   Resp. $y = arctgx$

6. Determinar la solución de la ecuación diferencial: $x^2y' + 2xy = 3x^2$.
   Resp. $yx^2 = x^3 + C$

7. Determinar la solución de la ecuación diferencial: $\frac{dx}{dt} + xe^t = 1 - x$.
   Resp. $x = e^{-t} + Ce^{-e^t - 1}$

8. Determinar la solución de la ecuación diferencial: $x\frac{dy}{dx} + 3x^2 + 4y = 0$.
   Resp. $y = -\frac{x^2}{2} + \frac{C}{x^4}$

9. Determinar la solución de la ecuación diferencial: $x\frac{dy}{dx} + 1 = x + y$.
   Resp. $y = x(lnx + \frac{1}{x} + C)$
10. Determinar la solución de la ecuación diferencial: $\frac{dr}{d\theta} - sec\theta + rtan\theta = 0$.
    Resp. $r = \theta sec\theta + Csec\theta$

NOTA: A continuación, se van a resolver ecuaciones no lineales, pero que aplicando ciertos procesos se transforma a lineales.

3.3 Ecuación diferencial de Bernoulli

Definición: Una ecuación diferencial de Bernoulli, es toda ecuación del tipo

$$\frac{dy}{dx} = P(x)y + Q(x)y^n$$

donde "**n**" es un número real y $\boldsymbol{P}$ y $\boldsymbol{Q}$ son las funciones reales continuas en un intervalo **I** (Zill, 2009, p. 65).

INTEGRACIÓN DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL DE BERNOULLI

Observación:

- Si $n = 0$ o $n = 1$, se tiene una ecuación diferencial de variables separables.

- Suponer que $n \neq 1$. Para integrar la ecuación de Bernoulli, se divide los dos miembros de la ecuación diferencial para y^n

$$\frac{dy}{dx} = P(x)y + Q(x)y^n$$

con lo cual se obtiene

$$\frac{1}{y^n} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{P(x)y}{y^n} + \frac{Q(x)\cancel{y^n}}{\cancel{y^n}}$$

$$\frac{y'}{y^n} - \frac{P(x)}{y^{n-1}} = Q(x)$$

$$\frac{y'}{y^n} - P(x)y^{1-n} = Q(x)$$

Luego de este paso se hace la sustitución $z = y^{1-n}$

Derivando z con respecto a x, se obtiene

$$z' = -(n-1)\frac{y'}{y^n}$$

Ahora, despejando y'

$$y' = -\frac{z'y^n}{(n-1)}$$

así la ecuación diferencial resulta ser

$$\frac{y'}{y^n} - P(x)y^{1-n} = Q(x)$$

Al sustituir los valores de y' y z, la ecuación se transforma en

$$\frac{-\frac{z'y^n}{(n-1)}}{y^n} - P(x)z = Q(x)$$

$$-\frac{z'}{n-1} - P(x)z = Q(x)$$

obteniéndose de esta forma una ecuación diferencial lineal, de tal manera que se resuelve aplicando los procesos anteriormente descritos.

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Determinar la solución de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} - y = 2e^x y^2$

Solución:

P1. Observar la derivada de la variable y.
P2. Verificar que esta variable no tenga exponente en este caso y^2, no es lineal.
P3. Aplicar la sustitución de Bernoulli mediante el cambio de variable.

$$\left\{\begin{matrix} u = y^{1-n} \\ u = y^{1-2} \\ u = y^{-1} \rightarrow u = \dfrac{1}{y} \\ y = \dfrac{1}{u} \end{matrix}\right\}$$

P4. Hallar la derivada de "y", $\left\{\begin{matrix} y = u^{-1} \\ y' = -u^{-2}u' \end{matrix}\right\}$

P5. Sustituir en la ecuación original:

$$\frac{dy}{dx} - y = 2e^x y^2$$

$$-u^{-2}u' - u^{-1} = 2e^x(u^{-1})^2$$

esta expresión se debe dejar en la forma lineal $y' - p(x)y = q(x)$, por lo que se multiplica por $(-u^2)$.

$$[-u^{-2}u' - u^{-1} = 2e^x(u^{-1})^2](-u^2)$$

Simplificando

$$u' + 1u = -2e^x$$

P6. Aplicando el principio de la ecuación lineal, es decir $\left\{\begin{matrix} p(x) = 1 \\ q(x) = -2e^x \end{matrix}\right\}$

P7. Aplicando el factor de integración

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left[\int e^{\int p(x)dx} q(x)dx + C\right]$$

2. Determinar la solución de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} - y = 2e^x y^2$

Solución:

RESOLUCIÓN - MÉTODO 1

Otra forma de resolver las ecuaciones lineales es mediante el proceso

$$uz = \int qudx$$

Aclarando que $u = e^{\int p(x)dx}$

P1. Aplicando el principio de las ecuaciones lineales de orden uno:

$$u = e^{-\int p(x)dx}\left[\int e^{\int p(x)dx}q(x)dx + C\right]$$

P2. Integrando la expresión:

$$u = e^{-x}\left[\int e^x(-2e^x)dx + C\right]$$

$$u = e^{-x}\left[\int (-2e^{2x})dx + C\right]$$

$$u = e^{-x}\left[-2\int (e^{2x})dx + C\right]$$

$$u = e^{-x}\left[-2\frac{e^{2x}}{2} + C\right]$$

$$u = e^{-x}[(-e^{2x}) + C]$$

$$u = -e^x + Ce^{-x}$$

P3. Sustituyendo el valor de $y = \frac{1}{u}$, entonces $u = \frac{1}{y}$, es decir:

$$\frac{1}{y} = -e^x + Ce^{-x}$$

Invirtiendo la ecuación anterior, se tiene:

$$y = \frac{1}{-e^x + Ce^{-x}}$$

RESOLUCIÓN - MÉTODO 2

Se conoce la ecuación lineal:

$$u' + 1u = -2e^{x}; p(x) = 1; q(x) = -2e^{x}$$

P1. Partiendo de sus definiciones:

$$\left\{ \begin{matrix} uz = \int qudx \\ u = e^{\int p(x)dx} = e^{\int 1dx} = e^{x} \end{matrix} \right\}$$

P2. Sustituyendo los valores encontrados:

$$\left\{ \begin{matrix} ze^{x} = \int (-2e^{x})e^{x}dx \\ ze^{x} = -2\int e^{2x}dx = -2\left(\frac{e^{2x}}{2}\right) + C \\ ze^{x} = -e^{2x} + C \\ z = -\frac{e^{2x}}{e^{x}} + \frac{C}{e^{x}} \\ z = -e^{x} + \frac{C}{e^{x}} \end{matrix} \right\}$$

P3. Sustituyendo el valor de $z = \frac{1}{y}$

$$z = -e^{x} + \frac{C}{e^{x}}$$

$$\frac{1}{y} = -e^{x} + Ce^{-x}$$

Invirtiendo:

$$y = \frac{1}{-e^{x} + Ce^{-x}}$$

3. Resolver la siguiente ecuación diferencial $y' = y + x^{2}y^{2}$.

Solución:

P1. Partiendo de la ecuación diferencial:

$$y' = y + x^{2}y^{2}$$

la misma que puede escribirse como:

$$\frac{y'}{y^{2}} - \frac{1}{y} = x^{2}$$

P2. Haciendo:

$$z = y^{1-n} = y^{-1} = z = \frac{1}{y}$$

P3. Derivando la ecuación anterior, se tiene:

$$z' = -\frac{y'}{y^2}$$

P4. Sustituyendo en la ecuación diferencial, esta se transforma en:

$$-z' - z = x^2$$

$$\frac{dz}{dx} + z = -x^2$$

P5. Aplicando el principio de la ecuación lineal, es decir:

$$\begin{Bmatrix} P(x) = 1 \\ Q(x) = -x^2 \end{Bmatrix}$$

P6. Aplicando el método de resolución:

$$z = e^{-\int P(x)dx}\left[\int e^{\int P(x)dx} Q(x)dx + C\right]$$

$$z = e^{-\int dx}\left[\int e^{\int dx}(-x^2)dx + C\right]$$

$$z = e^{-x}\left[\int e^{x}(-x^2 e^{x})dx + C\right]$$

P7. Efectuando la integral se tiene:

$\int x^2 e^x dx = \begin{Bmatrix} D & I \\ x^2 & e^x \\ 2x & e^x \\ 2 & e^x \\ 0 & e^x \end{Bmatrix}$ multiplicando intercalado el signo $+, -$ así

$$\int x^2 e^x dx = x^2 . e^x - 2x . e^x + 2 . e^x$$

P8. Sustituyendo:

$$z = -e^{-x}[x^2 . e^x - 2x . e^x + 2 . e^x + C]$$

$$z = -x^2 + 2x - 2 + Ce^{-x}$$

P9. Como: $z = \frac{1}{y}$, despejando "y", se tiene:

$$y = \frac{1}{z}$$

En consecuencia, la solución general se expresa como:

$$y = \frac{1}{-x^2 + 2x - 2 + Ce^{-x}}$$

RESOLUCIÓN - MÉTODO 3

$$\frac{dz}{dx} + z = -x^2; P(x) = 1; Q(x) = -x^2$$

$$\begin{Bmatrix} uz = \int qudx \\ u = e^{\int p(x)dx} = e^{\int 1dx} = e^x \end{Bmatrix}$$

P1. Sustituyendo los valores encontrados, se tiene:

$$ze^x = \int (-x^2)e^x dx$$

$$ze^x = -\int x^2 e^x dx$$

Resolviendo la integral por partes:

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$u = x^2; \quad dv = e^x dx$$

$$du = 2xdx\,; \quad v = e^x$$

Sustituyendo en la integral:

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2\int xe^x dx$$

Resolviendo la otra integral:

$$-2\int xe^x dx = -2xe^x + \int e^x dx = -2xe^x + 2e^x$$

$$u = x; \quad dv = e^x dx$$

$$du = dx\,; \quad v = e^x$$

Entonces:

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + C$$

Sustituyendo este resultado, se tiene:

$$ze^x = -x^2 e^x + 2xe^x - 2e^x + C$$

$$z = \frac{-x^2e^x + 2xe^x - 2e^x + C}{e^x}$$

$$z = -x^2 + 2x - 2 + Ce^{-x}$$

P2. Sustituyendo el valor de $z = \frac{1}{y}$, se tiene:

$$\frac{1}{y} = -x^2 + 2x - 2 + Ce^{-x}$$

Invirtiendo la ecuación anterior:

$$y = \frac{1}{-x^2 + 2x - 2 + Ce^{-x}}$$

4. Resolver la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{x^2y + y^3}$$

Solución:

P1. Partiendo de la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{x^2y + y^3}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x^2y + y^3}{x}$$

la misma que se expresa como:

$$\frac{dx}{dy} - xy = \frac{y^3}{x}$$

P2. Multiplicando por $2x$:

$$2x\frac{dx}{dy} - 2x^2y = 2y^3$$

P3. Haciendo $z = x^2$, se tiene:

$$z' = 2xx'$$

P4. Sustituyendo:

$$z' - 2yz = 2y^3$$

La cual es una ecuación lineal de primer orden.

P5. Determinar P(x) y Q(x):

$$P(x) = -2y\ ;\ Q(x) = 2y^3$$

$$z = e^{-\int(-2y)dy}\left[\int e^{\int(-2y)dy}(2y^3)dy + C\right]$$

$$z = e^{y^2}\left[\int e^{-y^2}(2y^3)dy + C\right]$$

Efectuando la integral:

$$\int e^{-y^2}(2y^3)dy = 2\int e^{-y^2}(y^3)dy + C$$

$$= \frac{2}{2}\int e^{-y^2}(2y.y^2)dy + C$$

$$\frac{2}{2}\int e^{-y^2}(-y^2)(-2ydy) + C$$

Realizar la siguiente sustitución:

$$\begin{cases} lnu = -y^2 \rightarrow -2ydy = \dfrac{du}{u} \\ u = e^{lnu} = e^{-y^2} \end{cases}$$

Reemplazar en la integral:

$$\frac{2}{2}\int lnu.u.\frac{du}{u} = +C$$

$$\int lnu.du = +C$$

Integrando la última ecuación por partes:

$$\begin{cases} v = lnu \\ dv = \dfrac{du}{u} \end{cases} \quad \begin{matrix} dw = du \\ \int dw = \int du \rightarrow w = u \end{matrix}$$

$$\int vdw = v.w - \int w.dv$$

$$\int lnudu = u.lnu - \int u.\frac{du}{u}$$

$$\int lnudu = u.lnu - u = u(lnu - 1) + C$$

P6. Sustituir el valor de u:

$$-y^2e^{-y^2} - e^{-y^2} + C$$

P7. Reemplazando en el paso P5:

$$z = e^{y^2}\left[\int e^{-y^2}(2y^3)dy + C\right]$$

$$z = e^{y^2}\left[-y^2e^{-y^2} - e^{-y^2} + C\right]$$

y como $z = \frac{1}{y}$ se tiene $y = \frac{1}{z}$, en consecuencia, la solución general se expresa como:

$$y = \frac{1}{e^{y^2}\left[-y^2e^{-y^2} - e^{-y^2} + C\right]}$$

aplicando la propiedad distributiva:

$$y = \frac{1}{\left[-y^2 - 1 + e^{y^2}C\right]}$$

ACTIVIDAD 11

Aplicando el principio de Bernoulli dar solución a las siguientes ecuaciones diferenciales:

1. La ecuación $y' - y = y^4$, con la condición $y(0) = 1$.
2. La ecuación $y' + 2y = -4y^3$, con la condición $y(0) = 1$.
3. La ecuación $y' - \frac{y}{x^2-1} = y^2$, con la condición $y(0) = 1$.
4. La ecuación $y' - \frac{y}{x} = y^4$, con la condición $y(0) = 1$.
5. La ecuación $3y' + \frac{3}{x}y = 2x^4y^4$, con la condición $y(0) = 1$.
6. La ecuación $ydx = x(1 + xy^4)dy,$ con la condición $y(0) = 1$.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Resolver la ecuación de Bernoulli dada por $y' - 2ytanx = 2\sqrt{y}$.
   Resp. $y = (tanx + Ksecx)^2$

2. Encontrar todas las soluciones de la ecuación diferencial $y' = y + y^3$.

   Resp. $\begin{cases} y = (Ce^{-2x} - 1)^{-\frac{1}{2}} \\ y = 0 \end{cases}$

3. Resolver la ecuación de Bernoulli dada por $3x\frac{dy}{dx} - 2y = \frac{x^3}{y^2}$.
   Resp. $y^3 = x^3 + Cx^2$

4. Resolver la ecuación de Bernoulli dada por $2y\frac{dy}{dx} + y^2 ctgx = csecx$.
   Resp. $y^2 = xcsecx + Ccsecx$

5. Encontrar todas las soluciones de la ecuación diferencial $xy' + y = 3x\sqrt{y}$.
   Resp. $\boldsymbol{y = \left(x + \frac{C}{\sqrt{x}}\right)^2}$

6. Encontrar todas las soluciones de la ecuación diferencial $3xy' + 4y = \sqrt{\frac{x}{y}}$.
   Resp. $\boldsymbol{y = \left(\frac{\sqrt{x}}{5} + \frac{C}{x^2}\right)^{\frac{2}{3}}}$

7. Encontrar todas las soluciones de la ecuación diferencial $yy' + y^2 tagx = cos^2x$.
   Resp. $\boldsymbol{y^2 = (2x + C)cos^2x}$

8. Encontrar todas las soluciones de la ecuación diferencial $3xy' + y + y^4x^2 = 0$.
   Resp. $\boldsymbol{y^{-3} = x^2 + Cx}$

3.4 Ecuación diferencial de Riccati

Definición: Betz et al. (1977) indican que una ecuación diferencial de Riccati, es toda ecuación del tipo

$$y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x),$$

donde $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$ y $\boldsymbol{r}$ son las funciones reales continuas en un intervalo **I, integración de la ecuación diferencial de Riccati** (Boyce, 2009, p. 108). La integración de esta ecuación diferencial se reduce a una ecuación de Bernoulli si se conoce una solución particular. En efecto, se supone conocida de antemano una solución particular $y_1(x)$, la ecuación de Riccati si se hace $y(x) = z(x) + y_1(x)$, la nueva función desconocida $z(x)$, verifica la ecuación diferencial.

$$z' + y_1' = p(x)(z + y_1)^2 + q(x)(z + y_1) + r(x)$$

Resolviendo esta ecuación:

$$z' + y_1' = p(x)z^2 + 2p(x)zy_1 + p(x)y_1^2 + q(x)z + q(x)y_1 + r(x) \quad (1)$$

puesto que la solución de una de sus raíces es y_1 , se puede escribir la ecuación de Riccati como:

$$y_1' = p(x)y_1^2 + q(x)y_1 + r(x) \qquad (2)$$

Restando la ecuación (2) de (1) se obtiene:

$$z' = p(x)z^2 + 2y_1p(x)z + q(x)z,$$

$$z' = p(x)z^2 + [2y_1p(x) + q(x)]z,$$

que es una ecuación diferencial de Bernoulli, esta ecuación se transforma en una lineal con el cambio de variable $z = \frac{1}{u}$, pero despejando la función desconocida $u = \frac{1}{z}$; es decir, que la ecuación de Riccati se transforma directamente en una ecuación diferencial lineal mediante el cambio de variable dado por:

$$y = y_1 + \frac{1}{u}$$

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Resolver la ecuación diferencial $x^3y' = x^4y^2 - 2x^2y - 1$, sabiendo que $y_1 = x^{-2}$

Solución:

Establecer un reconocimiento del método de resolución a aplicar.

P1. Dejando en la forma establecida por Riccati:

$$y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x)$$

La ecuación original divido para x^3, para dejar de la forma:

$$\frac{x^3y'}{x^3} = \frac{x^4y^2}{x^3} - \frac{2x^2y}{x^3} - \frac{1}{x^3}$$

Simplificando:

$$y' = xy^2 - 2x^{-1}y - x^{-3}$$

$$y' = xy^2 - \frac{2}{x}y - \frac{1}{x^3}$$

P2. Determinando los valores de:

$$\left\{\begin{aligned} p(x) &= x \\ q(x) &= \frac{2}{x} \\ r(x) &= \frac{1}{x^3} \end{aligned}\right\}$$

P3. Al haber determinado que es de Riccati, se necesita conocer una solución particular, la misma que se da en el problema:

$$y_1 = x^{-2}$$

Derivando:

$$y_1' = -2x^{-3}$$

P4. Sustituyendo en la ecuación de Riccati del paso anterior debe generar una igualdad:

$$\left\{\begin{array}{c} y' = xy^2 - 2x^{-1}y - x^{-3} \\ -2x^{-3} = x(x^{-2})^2 - 2x^{-1}(x^{-2}) - x^{-3} \\ -2 = 1 - 2 - 1 \\ -2 = -2 \end{array}\right\}$$

Simplificado la igualdad, se garantiza que esa solución obtenida es solución de la ecuación dada.

P5. Realizando un cambio de variable para transformarle en lineal:

$$y = z + y_1,$$

pero $z = \frac{1}{u} = u^{-1}$, sustituyendo queda:

$$\left\{\begin{array}{c} y = y_1 + u^{-1}, \text{sustituir } y_1 \\ y = x^{-2} + u^{-1}, \text{ derivar} \\ y' = -2x^{-3} - u^{-2}u' \end{array}\right\}$$

P6. Sustituir en la ecuación del paso P1:

$$\left\{\begin{array}{c} y' = xy^2 - 2x^{-1}y - x^{-3} \\ -2x^{-3} - u^{-2}u' = x(x^{-2} + u^{-1})^2 - 2x^{-1}(x^{-2} + u^{-1}) - x^{-3} \\ -2x^{-3} - u^{-2}u' = x(x^{-4} + 2x^{-2}u^{-1} + u^{-2}) - 2x^{-1}(x^{-2} + u^{-1}) - x^{-3} \\ -2x^{-3} - u^{-2}u' = (x^{-3} + 2x^{-1}u^{-1} + xu^{-2}) - 2x^{-3} - 2x^{-1}u^{-1} - x^{-3}, \text{agrupando} \\ -2x^{-3} - u^{-2}u' = -2x^{-3} + xu^{-2} \text{ reduciendo términos} \\ -u^{-2}u' = +xu^{-2} \\ u' = -x \end{array}\right\}$$

Se llega a una ecuación diferencial lineal.

P7. Resolviendo por variables separables, se obtiene:

$$\left\{\begin{array}{c} u' = -x \\ \dfrac{du}{dx} = -x \\ du = -xdx, \text{integrando} \\ \displaystyle\int du = -\int xdx \\ u = -\dfrac{x^2}{2} + C \end{array}\right\}$$

Z

P8. Sustituyendo en la función $y = x^{-2} + u^{-1}$,

$$y = x^{-2} + \left(-\frac{x^2}{2} + C\right)^{-1}$$

$$y = \frac{1}{x^2} + \left(\frac{-x^2 + 2C}{2}\right)^{-1}$$

$$y = \frac{1}{x^2} + \left(\frac{2}{2C - x^2}\right)$$

2. La ecuación diferencial $y' - xy^2 + (2x-1)y = x - 1$, es una ecuación de Riccati que tiene como una solución particular a $y = 1$, con el cambio de variable $y = 1 + \frac{1}{u}$.

Solución:

P1. Plantear la solución de Riccati:

$$y = y_1 + \frac{1}{u}$$

P2. Derivando:

$$y = 1 + u^{-1} = 1 + \frac{1}{u}$$

$$y' = 0 - u^{-2}u'$$

$$y' = -\frac{u'}{u^2}$$

Otra expresión de igual significado es:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{u'}{u^2}$$

P3. Sustituyendo en la ecuación diferencial:

$$y' - xy^2 + (2x-1)y = x - 1$$

$$-\frac{u'}{u^2} - x\left(1 + \frac{1}{u}\right)^2 + (2x-1)\left(1 + \frac{1}{u}\right) = x - 1$$

$$-\frac{u'}{u^2} - x\left(1 + \frac{2}{u} + \frac{1}{u^2}\right) + (2x-1)\left(1 + \frac{1}{u}\right) = x - 1$$

$$-\frac{u'}{u^2}-x-\frac{2x}{u}-\frac{x}{u^2}+2x+\frac{2x}{u}-1-\frac{1}{u}=x-1$$

$$-\frac{u'}{u^2}-\frac{x}{u^2}-\frac{1}{u}=0$$

P4. Para convertirle en una ecuación de Bernoulli, se debe multiplicar por $-u^2$:

$$\left[-\frac{u'}{u^2}-\frac{x}{u^2}-\frac{1}{u}=0\right](-u^2)$$

$u' + u = -x$, la ecuación obtenida es una ecuación diferencial lineal.

P5. Determinar los valores de p(x) y q(x):

$$\begin{cases} p(x) = 1 \\ q(x) = x \end{cases}$$

Aplicando la fórmula para resolver ecuaciones lineales, se tiene:

$$u = e^{-\int p(x)dx}\left[\int e^{\int p(x)dx}\, q(x)dx + C\right]$$

$$u = e^{-\int dx}\left[-\int e^{\int dx}\, xdx + C\right]$$

$$u = e^{-x}\left[-\int e^{x}\, xdx + C\right]$$

Aplicando la técnica ILATE, para resolver la integral:

$$\int e^x\, xdx = \begin{Bmatrix} x & e^x \\ 1 & e^x \\ 0 & e^x \end{Bmatrix} = xe^x - e^x$$

Sustituyendo este resultado en la ecuación anterior:

$$u = e^{-x}[-xe^x + e^x + C]$$

$$u = -x + 1 + Ce^{-x}$$

Paso final:

$$y = 1 + \frac{1}{u}$$

$$y = 1 + \frac{1}{1 - x + Ce^{-x}}$$

ACTIVIDAD 12

Aplicando el principio de Riccati, dar solución a las siguientes ecuaciones diferenciales.

1. La ecuación $y' + y^2 + (3x-6)y = 4(x-1)$, con la solución $y_1 = -x$.
2. La ecuación $y' = 2y + y^2$, con la solución $y_1 = 0$.
3. La ecuación $y' = 2(1-y) - (1-y)^2$, con la solución $y_1 = 1$.
4. La ecuación $y' = 3(x-y) - (x-y)^2 +$, con la solución $y_1 = -x$.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Resolver la ecuación de Riccati dada por $y' = \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2} - 1$, donde su solución particular es $y_1 = \varphi(x) = x$.

   Resp. $y = x + z \rightarrow y = \frac{2cx + x^3}{2c - x^2}$

2. Encontrar todas las soluciones de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = e^{2x} + \left(1 + \frac{5e^x}{2}\right)y + y^2$, si la función particular $y_1(x) = -\frac{e^x}{2}$.

3. Resolver la ecuación de Bernoulli dada por $\frac{dy}{dx} = x + \left(\frac{1}{x} - x^2\right)y + y^2$ donde su solución particular $y_1 = \varphi(x) = x^2$.

   Resp. $z^{-1} = xe^{-\frac{x^3}{3}}\left[-\int xe^{-\frac{x^3}{3}}dx + C\right]$

4. Resolver $y' + 2xy = 1 + x^2 + y^2$, es una ecuación de Riccati que tiene como una solución particular a $y_1 = x$.

5. Resolver $y' = -\frac{4}{x^2} - \frac{y}{x} + y^2$, es una ecuación de Riccati que tiene como una solución particular a $y_1 = \frac{2}{x}$.

   Resp. $y = \frac{2}{x} + \left(\frac{4x^3}{4C - x^4}\right)$

6. Resolver $y' = cosx - \frac{sen^2x}{2cosx} + \frac{y^2}{2cosx}$, es una ecuación de Riccati que tiene como una solución particular a $y_1 = senx$.

   Resp. $y = senx + \left(\frac{1}{Ccosx - \frac{senx}{2}}\right)$

7. Resolver $y' = xy^2 + y + \frac{1}{x^2}$, es una ecuación de Riccati que tiene como una solución particular a $y_1 = -\frac{1}{x}$

   Resp. $y = -\frac{1}{x} + \left(\frac{1}{x+1+ce^x}\right)$

3.5 Ecuación diferencial de Lagrange y Clairaut

OBJETIVOS

- Facilitar el desarrollo de una ecuación diferencial no lineal cuando su derivada sea parte de una función interna.

- Transformar una ecuación diferencial no lineal a lineal mediante el proceso de sustitución:

$$\frac{dy}{dx} = P; \quad dy = Pdx$$

Definición: Una ecuación diferencial de Lagrange es toda ecuación del tipo o de la forma (Castro, 2022, p. 73)

$$y = xf(y') + g(y') \qquad (1)$$

Para resolver la ecuación de Lagrange se transforma a otra ecuación diferencial lineal en "x" como función de P.

Realizando la sustitución $\frac{dy}{dx} = y' = P$, en la ecuación (1)

Así su nueva forma está dada por:

$$y = xf(y') + g(y') = xf(P) + g(P) \qquad (2)$$

Diferenciando la ecuación (2) se tiene:

$$dy = f(P)dx + xf'(P)dP + g'(P)dP \quad (3)$$

Reemplazando en la ecuación (3) el valor $dy = Pdx$, se obtiene:

$$Pdx = f(P)dx + xf'(P)dP + g'(P)dP \qquad (4)$$

Despejando dx, para lo cual se divide para P, a toda la ecuación:

$$dx = \frac{f(P)}{P}dx + \frac{xf'(P)dP}{P} + \frac{g'(P)dP}{P}$$

$$\left(1-\frac{f(P)}{P}\right)dx-\frac{xf'(P)dP}{P}=\frac{g'(P)dP}{P}$$

$$\left(\frac{P-f(P)}{P}\right)dx-\frac{xf'(P)dP}{P}=\frac{g'(P)dP}{P}$$

Cambiar de signo para obtener la función $f(P)$ positiva:

$$\left(\frac{f(P)-P}{P}\right)dx+\frac{xf'(P)dP}{P}=-\frac{g'(P)dP}{P}$$

Para dejar solo la derivada con respecto a dx, multiplicando la ecuación por $\left(\frac{P}{f(P)-P}\right)$

$$\left[\left(\frac{f(P)-P}{P}\right)dx+\frac{xf'(P)dP}{P}=-\frac{g'(P)dP}{P}\right]\left(\frac{P}{f(P)-P}\right)$$

$$dx+\frac{xf'(P)dP}{f(P)-P}=-\frac{g'(P)dP}{f(P)-P}$$

Dividiendo por dP, para obtener la ecuación lineal:

$$\frac{dx}{dp}+\frac{f'(P)}{f(P)-P}x=-\frac{g'(P)}{f(P)-P}$$

que es una ecuación diferencial lineal en "x", cuya solución general es $x=\varphi(P,c)$ donde P, es un parámetro y la solución general de la ecuación (1) se da en forma paramétrica.

$$\begin{Bmatrix} x=\varphi(P,c) \\ y=\varphi(P,c)f(P)+g(P) \end{Bmatrix}$$

P es un parámetro.

La ecuación diferencial de Clairaut son de la forma $y=x\left(\frac{dy}{dx}\right)+f\left(\frac{dy}{dx}\right)$ (Zill, 2009, p. 12), su resolución tiene el mismo proceso del de Lagrange, es decir $\frac{dy}{dx}=P$.

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Resolver la ecuación diferencial $y=x\left(\frac{dy}{dx}\right)+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$.

Solución:

P1. Haciendo las sustituciones correspondientes, se tiene:

$$P = \frac{dy}{dx} \rightarrow P = y'$$

Como:

$$dy = Pdx$$

Con estas sustituciones se tiene:

$$y = xP + (P)^2$$

P2. Diferenciando la nueva ecuación:

$$dy = xdP + Pdx + 2PdP$$

P3. Sustituyendo $dy = Pdx$, se tiene:
Z

$$Pdx = xdP + Pdx + 2PdP$$

Reduciendo términos semejantes:

$$0 = xdP + 2PdP$$

Sacando factor común:

$$0 = (x + 2P)dP$$

P4. Aplicando la ley del anulamiento dada por $a * b = 0; si\ a = 0\ \ o\ \ b = 0$, se tiene

$$\begin{Bmatrix} dP = 0 \\ x + 2P = 0 \end{Bmatrix}$$

P5. Integrando el primer factor:

$$\begin{Bmatrix} \int dP = \int 0 \\ x = -2P \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} P = C \\ x = -2P \end{Bmatrix}$$

P5. Sustituyendo los valores en:

$$y = xP + (P)^2$$

$$\begin{Bmatrix} y = xC + (C)^2 \\ x = -2P \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} y_G = xC + C^2 \\ y_p = -2P^2 + P^2 = -P^2 \end{Bmatrix}$$

2. Resolver la ecuación diferencial $2y = xy' + y'lny'$.

Solución:

P1. Expresar la ecuación diferencial, en la forma:

$$y = x\left(\frac{y'}{2}\right) + \frac{y' \ln y'}{2} \qquad (1)$$

P2. Considerando la sustitución $y' = \frac{dy}{dx} = P \rightarrow dy = Pdx$, así la ecuación (1):

$$y = \frac{xP}{2} + \frac{P\ln P}{2}$$

P3. Diferenciando se tiene:

$$dy = \frac{1}{2}[xdP + Pdx] + \frac{1}{2}[Pd\ln P + \ln P * dP]$$

$$dy = \frac{1}{2}[xdP + Pdx] + \frac{1}{2}\left[P\left(\frac{dP}{P}\right) + \ln P * dP\right]$$

$$dy = \frac{1}{2}[xdP + Pdx] + \frac{1}{2}[dP + \ln P * dP]$$

P4. Reemplazando $dy = Pdx$:

$$Pdx = \frac{P}{2}dx + \frac{x}{2}dP + \frac{\ln P}{2}dP + \frac{dP}{2}$$

Simplificando:

$$Pdx - \frac{P}{2}dx - \frac{x}{2}dP = \frac{\ln P}{2}dP + \frac{dP}{2}$$

$$\frac{P}{2}dx - \frac{x}{2}dP = \frac{\ln P}{2}dP + \frac{dP}{2}$$

$$Pdx - xdP = \ln PdP + dP$$

$$Pdx = xdP + (\ln P + 1)dP$$

$$dx = \frac{xdP}{P} + \left(\frac{\ln P + 1}{P}\right)dP$$

$$\frac{dx}{dP} = \frac{x}{P} + \left(\frac{\ln P + 1}{P}\right)$$

$$\frac{dx}{dP} - \frac{x}{P} = \frac{\ln P + 1}{P}$$

Este resultado es una ecuación diferencial lineal que tiene como solución:

$$p(p) = -\frac{1}{P}; q(P) = \frac{lnP + 1}{P}$$

P5. Sustituyendo en el modelo de resolución de la ecuación lineal:

$$x = e^{-\int -\frac{dP}{P}}\left[\int e^{\int -\frac{dP}{P}}\left(\frac{lnP + 1}{P}dP\right) + C\right]$$

$$x = e^{lnP}\left[\int e^{-lnP}\left(\frac{lnP + 1}{P}dP\right) + C\right]$$

$$x = e^{lnP}\left[\int e^{lnP^{-1}}\left(\frac{lnP + 1}{P}dP\right) + C\right]$$

$$x = P\left[\int (P^{-1})\left(\frac{lnP + 1}{P}dP\right) + C\right]$$

$$*x = P\left[\int \frac{1}{P}\left(\frac{lnP+1}{P}\right)dP + C\right]*$$

P6. Calculando:

$$\int \frac{1}{P}\left(\frac{lnP + 1}{P}\right)dP = \int \left(\frac{lnP + 1}{P^2}\right)dP$$

Distribuyendo la integral:

$$\int \frac{lnP}{P^2}dP + \int P^{-2}dP$$

Calculando sus integrales:

- $\int \frac{lnP}{P^2}dP = \begin{cases} u = lnP & dv = P^{-2}dP \\ du = \frac{dP}{P} & v = -\frac{1}{P} \end{cases}$

$$\int udv = u.v - \int vdu = -\frac{lnP}{P} - \int \left(-\frac{dP}{P^2}\right) = -\frac{lnP}{P} - \frac{1}{P}$$

- $\int \left(\frac{dP}{P^2}\right) = \int p^{-2}dp = -\frac{1}{P} + C$

Reemplazando en **(*)**:

$$x = P\left[C - \left(\frac{lnP}{P}\right) - \frac{2}{P}\right]*$$

$$x = PC - lnP - 2$$

Por tanto, la solución general es: $\begin{Bmatrix} x = PC - lnP - 2 \\ y = \frac{CP^2}{2} - P \end{Bmatrix}$, P es un parámetro.

ACTIVIDAD 13

Aplicando el principio de Lagrange y **Clairaut** resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:

1. La ecuación $y = \frac{3}{2}xy' + e^{y'}$
   Resp. General
   $$\begin{cases} x = \dfrac{C}{P^3} - 2e^P\left(\dfrac{1}{P} - \dfrac{2}{P^2} + \dfrac{2}{P^3}\right) \\ y = \dfrac{3c}{2p^2} - 2e^P\left(1 - \dfrac{3}{P} + \dfrac{3}{P^2}\right) \end{cases}$$
   p es un parámetro.

2. La ecuación $y = xy' + seny'$
   Resp. General $y = Cx + senC$

3. La ecuación $y = xy' + \sqrt{1 - y'^2}$
   Resp. General $y = Cx + \sqrt{1 - C^2}$

4. La ecuación $y = xy' + y' - y'^2$
   Resp. General $y = Cx + C + C^2$

5. La ecuación $y = xy' + \frac{b}{y'^2}$
   Resp. General $y = Cx + \frac{b}{C^2}$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Resolver la ecuación diferencial $y = 2xy' + seny$

Resp. Particular $x = -\frac{cosp}{p} - senp + \frac{c}{p^2}$

General
$$\begin{cases} x = -\dfrac{cosp}{p} - senp + \dfrac{c}{p^2} \\ y = \dfrac{2c}{p} - \dfrac{2cosp}{p} - senp \end{cases}$$
p es un parámetro.

2. Encontrar todas las soluciones de la ecuación diferencial $y = xy' + \frac{a}{y'^2}$

Resp. Particular $x = \frac{2a}{p^3}$

General

$$\begin{cases} x = \dfrac{2a}{c^3} \\ y = xc + \dfrac{a}{c^2} \end{cases}$$

p es un parámetro.

3. Encontrar todas las soluciones de la ecuación diferencial $y = xy' + y'^2$

Resp. Particular $x = -2p$

General

$$\begin{cases} x = -2c \\ y = xc + c^2 \end{cases}$$

p es un parámetro.

4. La ecuación $y = xy' - 3y'^3$

Resp. General: $y = Cx - 3C^3$

5. La ecuación $y' = ln(xy' - y)$

Resp. General: $y = Cx - e^C$

3.6 Ecuaciones diferenciales no resueltas con respecto a la primera derivada

OBJETIVO: Desarrollar ecuaciones diferenciales con alto grado de razonamiento lógico y aplicativo.

1. Ecuaciones de primer orden y de grado n con respecto a y', son ecuaciones de la forma:

$$(y')^n + P_1(x,y)(y')^{n-1} + P_2(x,y)(y')^{n-2} + P_{n-1}(x,y)y' + P_n(x,y) = 0$$

Para dar solución a esta ecuación diferencial se debe realizar el siguiente procedimiento:

a. Resolver con respecto a y'.

b. Dado que la ecuación diferencial es de grado n, se tiene:

$$y' = f_1(x,y);\ y' = f_2(x,y); \dots ; y' = f_n(x,y)$$

que son las soluciones reales de la ecuación diferencial.

c. Luego el conjunto de soluciones para la ecuación diferencial es:

$$\varphi_1(x, y, c_1) = 0;\ \varphi_2(x, y, c_2) = 0; \dots \varphi_n(x, y, c_n) = 0.$$

Generalizando: $\varphi_i(x, y, c_i) = 0; i = 1,2, .., n.$

2. Ecuaciones diferenciales de la forma $f(y, y') = 0$.

Cuando en esta ecuación diferencial se puede despejar y' se obtienen ecuaciones de variables separables, por lo que se analizarán los otros casos:

a. Si en la ecuación diferencial $f(y, y') = 0$ se puede despejar "y", se tiene:

$$y = \varphi(y')$$

Entonces para resolver se debe aplicar, $y' = \frac{dy}{dx} = P$, de aquí se obtiene:

$$y = \varphi(P)$$

Diferenciando esta ecuación:

$$dy = \varphi'(P)dP$$

Sustituyendo el valor $dy = Pdx$:

$$Pdx = \varphi'(P)dP$$

De esto se tiene:

$$dx = \frac{\varphi'(P)}{P} dP$$

Integrando las funciones:

$$x = \int \frac{\varphi'(P)}{P} dP + C$$

Y la solución de la ecuación diferencial en forma paramétrica es:

$$\begin{cases} x = \int \frac{\varphi'(P)}{P} dP + C \\ y = \varphi(P) \end{cases}$$

b. Si en la ecuación diferencial $f(y, y') = 0$, no se puede despejar "y", ni y', pero se pueden expresar en la forma paramétrica mediante algún parámetro "t", como:

$$y = \varphi(t)$$

$$y' = \varphi(P); \left(\frac{dy}{dx} = P\right)$$

Es decir:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \varphi(t)$$

Despejando el diferencial dy:

$$dy = \varphi(t)dx$$

Retomando el valor de $y = \varphi(t)$ y derivando:

$$dy = \varphi'(t)dt$$

Igualando los valores dy:

$$\varphi(t)dx = \varphi'(t)dt$$

$$dx = \frac{\varphi'(t)dt}{\varphi(t)}$$

Integrando la función:

$$x = \int \frac{\varphi'(t)dt}{\varphi(t)} + C$$

Y la solución de la ecuación diferencial en forma paramétrica es:

$$\begin{cases} x = \int \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} dt + C \\ \quad y = \varphi(t) \end{cases}$$

3. Si en la ecuación diferencial $f(x, y') = 0$, no se puede despejar "x":

   Se debe partir de la función $x = \varphi(y')$,

   Se sabe que $y' = P$, la ecuación toma la forma

$$x = \varphi(P)$$

Derivando:

$$dx = \varphi'(P)dP$$

Recordando que $\frac{dy}{dx} = P$, entonces despejar dx:
Se tiene $dx = \frac{dy}{P}$, por tanto:

$$\frac{dy}{P} = \varphi'(P)dP$$

$$dy = P\varphi'(P)dP$$

Integrando la función:

$$\int dy = \int P\varphi'(P)dP$$

$$y = \int P\varphi'(P)dP + C$$

Y la solución de la ecuación diferencial en forma paramétrica es:

$$\begin{cases} y = \int P\varphi'(P)dP + C \\ x = \varphi(P) \end{cases}$$

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Hallar la solución de la ecuación $(y')^2 - (2x+y)y' + (x^2+xy) = 0$

Solución:

P1. Aplicando el caso 1; despejar y', para lo cual se debe aplicar la forma general de la ecuación de segundo grado

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$y' = \frac{-b \pm \sqrt{(b)^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = -(2x+y) \\ c = (x^2+xy) \end{cases}$$

Sustituyendo los valores en la ecuación de segundo grado, se tiene

$$y' = \frac{(2x+y) \pm \sqrt{(2x+y)^2 - 4*1*(x^2+xy)}}{2}$$

P2. Resolviendo la expresión

$$y' = \frac{(2x+y) \pm \sqrt{4x^2+4xy+y^2-4x^2-4xy}}{2}$$

$$y' = \frac{(2x+y) \pm \sqrt{y^2}}{2}$$

$$y' = \frac{(2x+y) \pm y}{2}$$

$$\begin{cases} y'_1 = \dfrac{2x+y+y}{2} \\ y'_2 = \dfrac{2x+y-y}{2} \end{cases}$$

Reduciendo términos semejantes:

$$\begin{cases} y'_1 = \dfrac{2(x+y)}{2} \\ y'_2 = \dfrac{2x}{2} \end{cases}$$

P3. Integrando las soluciones:

$$\begin{cases} y'_1 = x + y \\ y'_2 = x \end{cases}$$

La primera ecuación diferencial se determina por el factor de integración:

$$y'_1 = x + y$$

Como se observa, es una ecuación diferencial lineal:

$$\frac{dy}{dx} - y = x$$

Determinando las funciones:

$$\begin{cases} P(x) = -1 \\ Q(x) = x \end{cases}$$

$$y_1 = e^{-\int P(x)dx}\left[\int \left(e^{\int P(x)dx} Q(x) + C\right)dx\right]$$

$$y_1 = e^{\int dx}\left[\int \left(e^{-\int dx}(x) + C\right)dx\right]$$

$$y_1 = e^{x}\left[\int (e^{-x}(x) + C)dx\right]$$

P4. Resolver la integral $\int\left(e^{-x}(x)\right)dx$ por ILATE:

Derivada	Integral
x	e^{-x}
1	$-e^{-x}$
0	e^{-x}

$$y = e^{x}[-xe^{-x} - e^{-x} + C]$$

$$y_1 = [-xe^{-x} * e^{x} - e^{-x} * e^{x} + C * e^{x}]$$

$$y_1 = [-x - 1 + Ce^{x}]$$

Ordenando de forma positiva:

$$y_1 = e^{x}C - x - 1$$

Resolviendo la segunda ecuación diferencial por variables separables:

$$y'_2 = x$$

$$\frac{dy}{dx} = x$$

$$dy = xdx$$

$$\int dy = \int xdx$$

$$y_2 = \frac{x^2}{2} + C$$

P5. Por tanto, las soluciones están dadas por:

$$\begin{cases} y_1 = e^{x}C - x - 1 \\ y_2 = \dfrac{x^2}{2} + C \end{cases}$$

2. Hallar la solución de la ecuación $y = (y')^2 e^{y'}$.

Solución:

P1. Aplicando el caso 2, sustituir $y' = \frac{dy}{dx} = P$:

$$dy = Pdx$$

$$y = P^2e^P$$

P2. Derivando la función:

$$dy = P^2de^P + e^PdP^2$$

$$dy = P^2e^PdP + 2Pe^PdP$$

Reemplazando el valor $dy = Pdx$:

$$Pdx = (2Pe^P + P^2e^P)dP$$

$$dx = \left(\frac{2Pe^P + P^2e^P}{P}\right)dP$$

$$dx = (2e^P + Pe^P)dP$$

P3. Integrando la función:

$$\int dx = \int (2e^P + Pe^P)\, dP$$

$$\int dx = 2\int (e^P)\, dP + \int (Pe^P)\, dP$$

$$x = 2e^P + \int (Pe^P)\, dP$$

Resolviendo la integral por sustitución:

$$\int udv = u.v - \int vdu$$

$$\begin{cases} u = P; du = dP \\ dv = e^PdP; v = e^P \end{cases}$$

$$\int (Pe^P)\, dP = Pe^P - \int e^PdP$$

$$\int (Pe^P)\, dP = Pe^P - e^P + C$$

Sustituyendo en la ecuación:

$$x = 2e^P + \int (Pe^P)\, dP$$

$$x = 2e^P + Pe^P - e^P + C$$

$$x = e^P + Pe^P + C$$

P4. La solución de la ecuación diferencial es:

$$\begin{cases} x = e^P + Pe^P + C \\ y = P^2 e^P \end{cases}$$

3. Hallar la solución de la ecuación $y^4 - (y')^4 - y(y')^2 = 0$.

Solución:

P1. Aplicando el caso 3, sustituir:

$$y' = yt$$

P2. Reemplazando en la ecuación diferencial:

$$y^4 - (y')^4 - y(y')^2 = 0$$

$$y^4 - y^4t^4 - y^3t^2 = 0$$

Simplificando y^3 por ser un factor común del polinomio:

$$y - yt^4 - t^2 = 0$$

Despejando "y":

$$y(1 - t^4) = t^2$$

$$y = \frac{t^2}{(1 - t^4)}$$

P3. Diferenciando:

$$dy = \frac{(1 - t^4)dt^2 - t^2 d(1 - t^4)}{(1 - t^4)^2}$$

$$dy = \frac{(1 - t^4)2t - t^2(-4t^3)}{(1 - t^4)^2}$$

$$dy = \frac{2t - 2t^5 + 4t^5}{(1 - t^4)^2}$$

$$dy = \frac{2t^5 + 2t}{(1 - t^4)^2} dt$$

P4. Sustituyendo $y' = P$, en $y = \frac{y'}{t}$, entonces $y = \frac{P}{t}$ en la ecuación diferencial:

$$y^4 - (y')^4 - y(y')^2 = 0$$

$$\frac{P^4}{t^4} - P^4 - \frac{P}{t} P^2 = 0$$

$$\frac{P^4}{t^4} - P^4 - \frac{P^3}{t} = 0$$

$$\frac{P}{t^4} - P - \frac{1}{t} = 0$$

$$P\left(\frac{1}{t^4} - 1\right) = \frac{1}{t}$$

$$P = \frac{\frac{1}{t}}{\left(\frac{1}{t^4} - 1\right)}$$

$$P = \frac{\frac{1}{t}}{\left(\frac{1 - t^4}{t^4}\right)}$$

$$P = \frac{t^3}{1 - t^4}$$

P5. También se conoce que, $P = \frac{dy}{dx}$, sustituyendo en el paso anterior:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{t^3}{1 - t^4}$$

$$dy = \frac{t^3}{1 - t^4} dx$$

P6. Igualando los valores de dy de los pasos P3 y P5:

$$\frac{t^3}{1-t^4}dx = \frac{2t(t^4+1)}{(1-t^4)^2}dt$$

Obteniendo las variables separables, despejando y simplificando:

$$t^3 dx = \frac{2t(t^4+1)}{(1-t^4)}dt$$

$$dx = \frac{2t(t^4+1)}{(1-t^4)t^3}dt$$

$$dx = \frac{2(t^4+1)}{(1-t^4)t^2}dt$$

$$dx = -\frac{2(t^4+1)}{(t^4-1)t^2}dt$$

P7. Integrando las funciones:

$$\int dx = -2\int \frac{(t^4+1)}{(t^4-1)t^2}dt$$

$$x = -2\int \frac{(t^4+1)}{(t^2+1)(t+1)(t-1)t^2}dt$$

Aplicando las integrales parciales:

$$\frac{(t^4+1)}{(t^2+1)(t+1)(t-1)t^2} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t^2} + \frac{C}{t+1} + \frac{D}{t-1} + \frac{Et+F}{t^2+1}$$

Sacando mínimo común múltiplo:

$$\frac{t^4+1}{\cancel{(t^2+1)(t+1)(t-1)t^2}} = \frac{A(t^4-1)t + B(t^4-1) + C(t^2+1)(t-1)t^2 + D(t^2+1)(t+1)t^2 + (Et+F)(t^2-1)t^2}{\cancel{(t^2+1)(t+1)(t-1)t^2}}$$

$$t^4+1 = A(t^4-1)t + B(t^4-1) + C(t^2+1)(t-1)t^2 + D(t^2+1)(t+1)t^2 + (Et+F)(t^2-1)t^2$$

Hallando los valores de las constantes:

Si $t = 1$

$$1 + 1 = A(1-1)1 + B(1-1) + C(1+1)(1-1)1 + D(1+1)(1+1)1 + (E+F)(1-1)1$$

$$2 = A*0 + B*0 + C*0 + D(1+1)(1+1)1 + (E+F)0$$
$$2 = 4D$$
$$D = \frac{1}{2}$$

Si $t = 0$

$$0 + 1 = A(0-1)0 + B(0-1) + C(0+1)(0-1)0 + D(0+1)(0+1)0 + (E*0+F)(0-1)0$$
$$1 = -B$$
$$B = -1$$

Si $t = -1$

$$1 + 1 = A(1-1)(-1) + B(1-1) + C(1+1)(-1-1)1 + D(1+1)(-1+1)1 + (-E+F)(1-1)1$$

$$2 = -4C$$
$$C = -\frac{1}{2}$$

Si $t = 2$

$$16 + 1 = A(16-1)2 + B(16-1) + C(4+1)(2-1)4 + D(4+1)(2+1)4 + (2E+F)(4-1)4$$

$$17 = 30A + 15B + 20C + 60D + 24E + 12F$$

Reemplazando los valores conocidos

$$17 = 30A + 15(-1) + 20\left(-\frac{1}{2}\right) + 60\left(\frac{1}{2}\right) + 24E + 12F$$

$$17 = 30A - 15 - 10 + 30 + 24E + 12F$$

$$12 = 30A + 24E + 12F$$

$$2 = 5A + 4E + 2F$$

Si $t = -2$

$$16+1=A(16-1)(-2)+B(16-1)+C(4+1)(-2-1)4 \\ +D(4+1)(-2+1)4+(-2E+F)(4-1)4$$

$$17=-30A+15B-60C-20D-24E+12F$$

Remplazando los valores conocidos:

$$17=-30A+15(-1)-60\left(-\frac{1}{2}\right)-20\left(\frac{1}{2}\right)-24E+12F$$

$$17=-30A-15+30-10-24E+12F$$

$$12=-30A-24E+12F$$

$$2=-5A-4E+2F$$

Si $t=3$

$$t^4+1=A(t^4-1)t+B(t^4-1)+C(t^2+1)(t-1)t^2+D(t^2+1)(t+1)t^2 \\ +(Et+F)(t^2-1)t^2$$

$$81+1=A(81-1)3+B(81-1)+C(9+1)(3-1)9+D(9+1)(3+1)9 \\ +(3E+F)(9-1)9$$

$$82=240A+80B+180C+360D+216E+72F$$

Reemplazando los valores conocidos:

$$82=240A+80(-1)+180\left(-\frac{1}{2}\right)+360\left(\frac{1}{2}\right)+216E+72F$$

$$82=240A-80-90+180+216E+72F$$

$$72=240A+216E+72F$$

$$9=30A+27E+9F$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2=5A+4E+2F \\ 2=-5A-4E+2F \\ 9=30A+27E+9F \end{cases}$$

$$F_2=F_1+F_2 \\ F_3=-6F_1+F_3$$

$$\begin{cases} 2 = 5A + 4E + 2F \\ 4 = 4F \\ -3 = 3E - 3F \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 = 5A + 4E + 2F \\ F = 1 \\ -3 = 3E - 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 = 5A + 4E + 2F \\ F = 1 \\ E = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 = 5A + 0 + 2 \\ F = 1 \\ E = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = 0 \\ B = -1 \\ C = -\dfrac{1}{2} \\ D = \dfrac{1}{2} \\ E = 0 \\ F = 1 \end{cases}$$

Sustituyendo los valores en la integral:

$$x = -2\left[\int \frac{A}{t} + \int \frac{B}{t^2} + \int \frac{C}{t+1} + \int \frac{D}{t-1} + \int \frac{Et+F}{t^2+1}\right] dt$$

$$x = \left[-2\int \frac{0 * dt}{t} + 2\int \frac{dt}{t^2} + \int \frac{dt}{t+1} - \int \frac{dt}{t-1} - 2\int \frac{0+1}{t^2+1} dt\right]$$

$$x = \left[-\frac{2}{t} + \ln(t+1) - \ln(t-1) - 2\int \frac{dt}{t^2+1}\right]$$

$$x = \left[-\frac{2}{t} + \ln(t+1) - \ln(t-1) - 2arctagt + C\right]$$

$$x = \left[-\frac{2}{t} + \ln\frac{(t+1)}{(t-1)} - 2arctagt + C\right]$$

La solución general está dada por:

$$\begin{cases} x = \left[-\frac{2}{t} + \ln\frac{(t+1)}{(t-1)} - 2arctagt + C\right] \\ y = \frac{t^2}{1-t^4} \end{cases}$$

ACTIVIDAD 14

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:

1. Hallar la solución de la ecuación $(y')^2 - 2yy' = y^2(e^x - 1)$.
   Resp. $ln(Ky) = x \pm 2e^{\frac{x}{2}}$

2. Hallar la solución de la ecuación $(y')^2 - 2xy' - 8x^2 = 0$.
   Resp. $y_1 = 2x^2 + C;\ y_2 = -x^2 + K$

3. Hallar la solución de la ecuación $x^2(y')^2 + 3xyy' + 2y^2 = 0$.
   Resp. $y_1 = \frac{C}{x};\ y_2 = \frac{K}{x^2}$

4. Hallar la solución de la ecuación $x^2y'^2 + xyy' - 6y^2 = 0$.
   Resp. $\begin{cases} y = Cx^2 \\ y = \frac{C}{x^3} \end{cases}$

5. Hallar la solución de la ecuación $y'^2 - 2y' - 8x^2 = 0$.
   Resp. $\begin{cases} y = 2x^2 + C \\ y = -x^2 + C_2 \end{cases}$

EJERCICIOS PROPUESTOS

6. Hallar la solución de la ecuación $x(y')^2 + (y - 1 - x^2)y' - x(y-1) = 0$.
   Resp. $y_1 = \frac{C+x^2}{2};\ y_2 = \frac{C+x}{x}$

7. Hallar la solución de la ecuación $y = y'lny'$.
   Resp. $x = \frac{(lnP+1)^2}{2} + C;\ y = PlnP$

8. Hallar la solución de la ecuación $y = y'(1 + y'cosy')$.

   Resp. $x = lnP + senP + PcosP + C;\ y = P + P^2cosP$

9. Hallar la solución de la ecuación $x[1 + (y')^2] = 1$.
   Resp. $y + C = \pm\sqrt{x - x^2} + arcsen\sqrt{x}$

10. Hallar la solución de la ecuación $y'^3 - yy'^2 - x^2y' + x^2y = 0$.

Resp. $\begin{cases} y = \frac{x^2}{2} + C_1 \\ y = -\frac{x^2}{2} + C_2 \\ y = Ae^x \end{cases}$

3.7 Soluciones singulares

OBJETIVOS:

- Comprender las características especiales del punto singular de la ecuación diferencial, tales como discontinuidades, indeterminaciones, o comportamientos no estándar.
- Determinar si el punto singular es regular o irregular y cómo afecta a las soluciones.
- Resolver la ecuación diferencial en las cercanías del punto singular, utilizando métodos adecuados (como series de potencias o transformaciones).

Definición: Considerar una ecuación diferencial de la forma

$$F(x, y, y') = 0 \qquad (1)$$

Se llamará solución singular a una función: $y = \varphi(x)$ de la ecuación (1); si en cada punto se infringe la propiedad de unicidad; es decir, si por cada uno de sus puntos (x_0, y_0), además de esta solución pasa también otra solución que tiene en el punto (x_0, y_0), la misma tangente que la solución $y = \varphi(x)$, pero no coincide esta última en ningún entorno del punto (x_0, y_0) arbitrariamente pequeño (Zill, 2009, p. 7).

A la gráfica de una solución singular se le denomina curva integral singular de (1), si:

$$F(x, y, y') = 0$$

y sus derivadas parciales $\frac{\partial F}{\partial y}$ y $\frac{\partial F}{\partial y'}$ son continuas con respecto a todo su argumento (x, y, y'). Entonces cualquier ecuación singular de la ecuación (1), también satisface a la ecuación

$$\frac{\partial F(x,y,y')}{\partial y'} = 0 \qquad (2)$$

Por lo tanto, para hallar las ecuaciones singulares de la ecuación (1) se elegirá y' entre las ecuaciones (1) y (2), obteniendo la ecuación:

$$\psi(x, y) = 0 \qquad (3)$$

A la ecuación (3) se le denomina **P-discriminante** de la ecuación (1) y la curva determinada por la ecuación (3) se denomina curva de **P – discriminante** (C.P.D). Siempre ocurre que una curva **P-discriminante** se descompone en unas cuantas ramas, en este caso debe averiguarse si cada una de estas ramas por separado es solución de la ecuación (1); si es afirmativo se debe comprobar si es solución singular; es decir, si se infringe la unicidad en cada uno de sus puntos.

Se llama envolvente de una familia de curvas $\phi(x, y, c) = 0$ (4) a la curva que en cada uno de sus puntos es tangente a una de las curvas de la familia (4), siendo cada segmento de la misma tangente a una infinidad de curvas de la familia (4).

Si la solución (4) es la integral general de (1), la envolvente de la familia de curvas de (4), en caso que exista, será una curva integral singular de esta ecuación. En efecto, en los puntos de los envolventes los valores (x, y, y') coinciden con los valores correspondientes de la curva integral que es tangente a la envolvente en el punto (x, y), por tanto, en cada punto de la envolvente los valores (x, y, y') satisfacen a la ecuación $F(x, y, y') = 0$; es decir, la envolvente es una curva integral.

Además, cada punto de la envolvente se infringe la unicidad, puesto que por cada punto de la misma pasan al menos dos curvas integrales en una misma dirección, la envolvente y la curva integral de la familia (4) que es tangente a esta en el punto considerado. En consecuencia, la envolvente, es una curva integral singular; además por el curso de análisis matemático se conoce que la envolvente forma parte de la curva **c-discriminante (C.C.D)** determinado por el sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{c} \phi(x, y, c) = 0 \\ \dfrac{\partial \phi(x, y, c)}{\partial c} = 0 \end{array}\right\} \qquad (5)$$

Una rama de la curva c-discriminante es envolvente, cuando en ella se cumple las condiciones siguientes:

- Que las derivadas parciales:

$$\frac{\partial \phi(x, y, c)}{\partial x} \; y \; \frac{\partial \phi(x, y, c)}{\partial y}$$

Existan y sus módulos están acotados, donde M y N son constantes:

$$\left\{\begin{array}{l} \left|\dfrac{\partial \phi(x, y, c)}{\partial x}\right| \leq M \\ \left|\dfrac{\partial \phi(x, y, c)}{\partial y}\right| \leq N \end{array}\right\}$$

Las derivadas parciales sean no nulas:

$$\frac{\partial\phi(x,y,c)}{\partial x} \neq 0\ ;\ \frac{\partial\phi(x,y,c)}{\partial y} \neq 0$$

Observaciones:

- Las condiciones 1 y 2 solamente son suficientes, por lo cual pueden ser envolventes también las ramas de la curva **c-discriminante** en las que no se cumplen algunas de están condiciones.

- En el caso general, el **P-discriminante** contiene:
  i. A la envolvente (E).
  ii. Al lugar geométrico de los puntos de contacto al cuadrado **(C^2).**
  iii. Al lugar geométrico de los puntos cúspides (o del retroceso) (R).

$$\Delta p = E.C^2.R$$

- El c-discriminante contiene:
  i. A la envolvente (E).
  ii. Al lugar geométrico de los puntos Anocdales al cuadrado **(A^2).**
  iii. Al lugar geométrico de los puntos cúspides (o del retroceso al cubo) (R^3)
  iv.

$$\Delta c = E.A^2.R^3$$

Entre los lugares geométricos, solamente la envolvente es solución (singular) de la ecuación diferencial. Esta figura tanto en la curva **P-discriminante** como en la curva **c-discriminante** a la primera potencia, circunstancia que facilita la averiguación de la solución singular.

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Encontrar la solución general y también la solución singular, si ella existe de la ecuación diferencial $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 4x^5\frac{dy}{dx} - 12x^4y = 0.$

Solución:

P1. Observar que es una función dentro de la derivada, por tanto, aplicando Lagrange; es decir:

$$\frac{dy}{dx} = P \rightarrow dy = Pdx$$

P2. Sustituir los valores del paso P1 en la ecuación diferencial $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 4x^5\frac{dy}{dx} - 12x^4y = 0$:

$$P^2 + 4x^5P - 12x^4y = 0$$

Despejando la variable dependiente "y":

$$P^2 + 4x^5P = 12x^4y$$

$$y = \left(\frac{P^2 + 4x^5P}{12x^4}\right)$$

P3. Diferenciando la ecuación del $P^2 + 4x^5P = 12x^4y$

$$dP^2 + d(4x^5P) - 12d(x^4y) = 0$$

$$2PdP + 20x^4Pdx + 4x^5dP - 48x^3ydx - 12x^4dy = 0$$

P4. Sustituyendo los valores definidos por:

$$\left\{\begin{matrix} y = \left(\dfrac{P^2 + 4x^5P}{12x^4}\right) \\ dy = Pdx \end{matrix}\right\}$$

en la ecuación diferencial del paso P3, se tiene:

$$2PdP + 20x^4Pdx + 4x^5dP - 48x^3\left(\frac{P^2 + 4x^5P}{12x^4}\right)dx - 12x^4Pdx = 0$$

P5. Agrupando y operando:

$$(2P + 4x^5)dP + 8x^4Pdx - \frac{4P^2}{x}dx - 16x^4Pdx = 0$$

Agrupando nuevamente:

$$(2P + 4x^5)dP - \left(\frac{4P^2}{x} + 8x^4P\right)dx = 0$$

$$(2P + 4x^5)dP - \left(\frac{4P^2 + 8x^5P}{x}\right)dx = 0$$

$$\left[2(P + 2x^5)dP - 4P\left(\frac{P + 2x^5}{x}\right)dx = 0\right]x$$

$$2x(P + 2x^5)\frac{dP}{dx} - 4P(P + 2x^5) = 0$$

Simplificando el valor numérico constante:

$$x(P+2x^5)\frac{dP}{dx}-2P(P+2x^5)=0$$

Factorando:

$$(P+2x^5)\left(x\frac{dP}{dx}-2P\right)=0$$

P5. Aplicando la ley del anulamiento y resolviendo:

$$\begin{Bmatrix} P+2x^5=0 \\ x\dfrac{dP}{dx}-2P=0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} P+2x^5=0 \\ x\dfrac{dP}{dx}=2P \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} P+2x^5=0 \\ xdP=2Pdx \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} P=-2x^5 \\ \dfrac{dP}{P}=\dfrac{2dx}{x} \end{Bmatrix}$$

Integrando el segundo factor, se tiene:

$$\begin{Bmatrix} P=-2x^5 \\ \displaystyle\int\frac{dP}{P}=\int\frac{2dx}{x} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} P=-2x^5 \\ lnP=2lnx+lnC \end{Bmatrix}$$

Aplicando propiedades de logaritmos:

$$\begin{Bmatrix} P=-2x^5 \\ lnP=lnx^2+lnC \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} P=-2x^5 \\ lnP=lnx^2C \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} P=-2x^5 \\ P=x^2C \end{Bmatrix}$$

P6. Reemplazando los valores de P, encontrados en el paso P2, se tiene:

Primer valor:

$$P = x^2C$$

En la ecuación $P^2 + 4x^5P - 12x^4y = 0$, se tienen:

$$(x^2C)^2 + 4x^5(x^2C) - 12x^4y = 0$$

$$C^2x^4 + 4x^7C - 12x^4y = 0$$

Eliminando el término común x^4:

$$C^2 + 4x^3C - 12y = 0$$

Despejando y para hallar la solución general, se tiene:

$$C^2 + 4x^3C = 12y$$

$$\frac{C^2 + 4x^3C}{12} = y$$

Nota: Sustituyendo esta solución para ver si es solución singular:

$$P^2 + 4x^5P - 12x^4y = 0$$
$$P^2 + 4x^5P - 12x^4\left(\frac{C^2 + 4x^3C}{12}\right) = 0$$
$$P^2 + 4x^5P - x^4C^2 - 4x^7C = 0$$

Ahora, sustituyendo $P = x^2C$:

$$(x^2C)^2 + 4x^5(x^2C) - x^4C^2 - 4x^7C = 0$$

$$x^4C^2 + 4x^7C - x^4C^2 - 4x^7C = 0$$

Es solución singular:

Segundo valor:

Si $P = -2x^5$ reemplazando este valor en la ecuación dada se tiene:

$$P^2 + 4x^5P - 12x^4y = 0$$

$$(-2x^5)^2 + 4x^5(-2x^5) - 12x^4y = 0$$

$$4x^{10} - 8x^{10} - 12x^4y = 0$$

Reduciendo términos semejantes:

$$-4x^{10} - 12x^4y = 0$$

$$-4x^{10} = 12x^4y$$

Despejando "y", para hallar la solución singular:

$$\frac{-4x^{10}}{12x^4} = y$$

$$y = -\frac{x^6}{3}$$

Nota: Sustituyendo esta solución para ver si es solución singular:

$$P^2 + 4x^5P - 12x^4y = 0$$
$$P^2 + 4x^5P - 12x^4\left(-\frac{x^6}{3}\right)$$
$$P^2 + 4x^5P + 4x^{10} = 0$$

Ahora, sustituyendo $P = -2x^5$:

$$(-2x^5)^2 + 4x^5(-2x^5) + 4x^{10} = 0$$
$$4x^{10} - 8x^{10} + 4x^{10} = 0$$

Por tanto, es solución singular.

OBSERVACIÓN: una solución singular de una ecuación diferencial es aquella que no puede expresarse como combinación lineal de un conjunto de soluciones conocidas de esa ecuación diferencial. En otras palabras, no puede obtenerse a partir de la combinación de soluciones generales o particulares previamente halladas.

Estas soluciones son relevantes en casos donde la ecuación diferencial tiene singularidades o puntos singulares, como, por ejemplo, en ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden con coeficientes singulares en uno o más puntos del dominio. Las soluciones que se obtienen cerca de estos puntos singulares pueden ser singularidades regulares o irregulares, y en los casos más complejos, pueden requerir métodos especiales para su resolución.

COMENTARIO: considere la ecuación diferencial lineal de segundo orden con coeficientes singulares en un punto. Por ejemplo:

$$x^2y'' - xy' + (x^2 - 1)y = 0$$

Solución:

P1. Esta ecuación tiene un punto singular en $x = 0$ debido al término x^2 que multiplica a la segunda derivada y''.

P2. Para resolver esta ecuación alrededor del punto singular en $x = 0$, se utiliza el método de series de potencias. Se asume que la solución tiene la forma de una serie de potencias alrededor del punto singular:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+s}$$

Aquí, "s" es un parámetro que puede ser real o complejo, y a_n son coeficientes por determinar. Sustituyendo esta serie en la ecuación diferencial y realizando operaciones algebraicas, se puede encontrar una solución en términos de una serie de potencias.

Al resolver la ecuación, se obtiene una solución en términos de una serie que contiene una parte regular (compuesta por potencias enteras de "x") y una parte singular (compuesta por términos con potencias fraccionarias o logarítmicas de "x") alrededor del punto $x = 0$.

La solución singular es la parte de la solución general que no puede expresarse como una combinación lineal de la parte regular. En este caso, la parte singular es aquella que no se puede representar únicamente como una combinación lineal de potencias enteras de "x". Esta parte singular es importante para comprender el comportamiento de la solución alrededor del punto singular $x = 0$ en este ejemplo específico.

ACTIVIDAD 15
Hallar la solución general (SG) y también la solución singular (S.S) si ella existe de las siguientes ecuaciones diferenciales.

1. Sea $y = xy' - 2y'^2$
   Resp. $\begin{cases} S.G: y = kx - 2K^2 \\ S.S: 8y = x^2 \end{cases}$

2. Sea $y'^2 - 4y = 0$
   Resp. $\begin{cases} S.G: y = 0 \\ S.S: y = 0 \end{cases}$

3. Sea $y'^2 - y^2 = 0$
   Resp. $\begin{cases} S.G\text{:no existe} \\ S.S\text{:no existe} \end{cases}$

4. Hallar la solución de la ecuación $(xy' + y)^2 + 3x^5(xy' - 2y) = 0$
   Resp. $4y + x^5 = 0$

5. Hallar la solución de la ecuación $(y' - 1)^2 = y^2$
   Resp. $No\ hay\ soluciones\ singulares.$

Mediante el C-discriminante hallar las soluciones singulares de las ecuaciones diferenciales de primer orden, sabiendo sus integrales generales.

6. Sea $y = xy' + y'^2;\ y = Cx + C^2$
   Resp. $y = -\frac{x^2}{2}$

7. Sea $(xy' + y)^2 = y^2y';\ y(C - x) = C^2$
   Resp. $y = 0; y = x$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Encontrar la solución general y también la solución singular, si ella existe de la ecuación diferencial $x^3\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + x^2y\frac{dy}{dx} + 1 = 0.$

Resp.
Solución General: $k^2 + kxy + x = 0$
Solución Singular: $y^2x - 4 = 0$

2. Encontrar la solución general y también la solución singular, si ella existe de la ecuación diferencial $x\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - 2y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 16x^2 = 0.$

Resp.
Solución General: $2k^2y = k^3x^2 - 16 = 0$
Solución Singular: $2y^3 + 27x^4 = 0$

3. Encontrar la solución general y también la solución singular, si ella existe de la ecuación diferencial $x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + x + 2y = 0.$

Resp.
Solución General: $2x^2 + 2k(x - y) + k^2 = 0$
Solución Singular: $x^2 + 2xy - y^2 = 0$

4. Encontrar la solución general y también la solución singular, si ella existe de la ecuación diferencial $[1 + (y')^2]y^2 - 4yy' - 4x = 0.$

Resp.
Solución Singular: $y^2 = 4x + 4$

5. Encontrar la solución general y también la solución singular, si ella existe de la ecuación diferencial $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + x^3\frac{dy}{dx} - 2x^2y = 0.$

Resp.
Solución General: $k^2 + kx^2 = 2y$
Solución Singular: $y = -x^4$

4

Aplicaciones de las ecuaciones diferenciales

Capítulo
4

Aplicaciones de las ecuaciones diferenciales

4.1 Contenidos

1. Ejercicios geométricos.
2. Ejercicios Físicos.
3. Trayectorias ortogonales.
4. Problemas resueltos y propuestos.
5. Actividades.

4.2 Objetivos

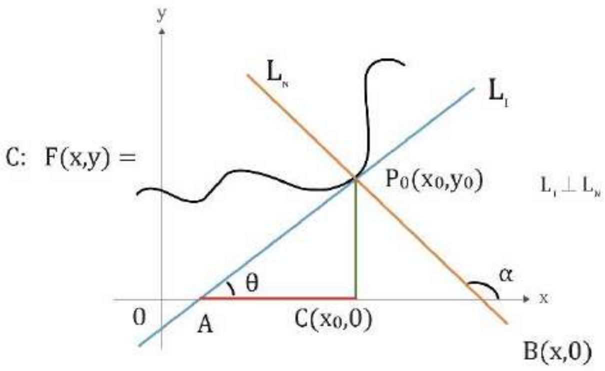
- Aplicar los principios y propiedades de las ecuaciones diferenciales ordinarias y lineales de primer orden en los diferentes campos de las ciencias con respeto a su necesidad.
- Representar las ecuaciones diferenciales en procesos geométricos, físicos, mecánicos en la resolución de problemas.

4.3 Explicaciones geométricas

Considerar una curva C descrita por la ecuación:

$C: F\ (x, y)\ =\ 0$, y tomar un punto $P_0(x_0, y_0)$ de la curva C

Figura 9
Explicación de normal y tangente.



La pendiente de la recta tangente está dada por

$$mL_t = \frac{dy}{dx};\ P_0 = y_0$$

y la ecuación de la recta tangente es:

$$L_t: y - y_0 = y'(x - x_0) \qquad (1)$$

Como son perpendiculares $L_T\ y\ L_N$, se tiene:

$$m_T m_N = -1$$

$$m_N = -\frac{1}{m_T}$$

Por tanto, la pendiente de la recta normal es:

$$mL_N = -\frac{1}{mL_t} = -\frac{1}{y'}$$

y la ecuación de la recta normal es:

$$L_N: y - y_0 = -\frac{1}{y'}(x - x_0) \qquad (2)$$

Ahora, calculando el punto de intersección de la recta tangente con el eje "x". Sea $A(x, 0)$ Î L_t Ù $eje\ x$ Þ $y = 0$, de la ecuación de la tangente se tiene:

$$0 - y_0 = y'(x - x_0)$$

Determinar el valor de "x":

$$0 - y_0 = y' x - y' x_0$$

$$y' x_0 - y_0 = y' x$$

$$\frac{y' x_0}{y'} - \frac{y_0}{y'} = x$$

$$x = x_0 - \frac{y_0}{y'}$$

De donde, $A = (x, 0) = \left(x_0 - \frac{y_0}{y'}, 0\right)$

También calculando el punto de intersección de la recta normal y el eje "x".

Sea $B(x, 0)$ Î L_N Ù $eje\ x$ Þ $y = 0$, de la ecuación (2) se tiene

$$0 - y_0 = -\frac{1}{y'}(x - x_0)$$

$$-y_0 y' = -(x - x_0)$$

$$-y_0 y' = -x + x_0$$

$$y_0 y' = x - x_0$$

$$x = x_0 + y' y_0$$

De donde, $B = (x, 0) = (x_0 + y' y_0, 0)$.

La longitud del segmento de la tangente entre el punto P_0 y el eje x es $L_t = d(A, P)$; es decir, $A\left(x_0 - \frac{y_0}{y'}, 0\right), P(x_0, y_0)$:

$$d(A, P_0) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

$$L_T = \sqrt{\left(\left(x_0 - \frac{y_0}{y'}\right) - x_0\right)^2 + (0 - y_0)^2}$$

$$L_T = \sqrt{\left(x_0 - \frac{y_0}{y'} - x_0\right)^2 + {y_0}^2}$$

$$L_T = \sqrt{\left(-\frac{y_0}{y'}\right)^2 + {y_0}^2}$$

$$L_T = \sqrt{\frac{{y_0}^2}{y'^2} + {y_0}^2}$$

$$L_T = \sqrt{\frac{{y_0}^2 + {y_0}^2 . y'^2}{y'^2}}$$

$$L_T = \sqrt{\frac{{y_0}^2(1 + y'^2)}{y'^2}}$$

$$L_T = \frac{y_0}{y'}\sqrt{1 + y'^2}$$

La longitud de la sub tangente es la proyección del segmento tangente AP_0 sobre el eje "x", es decir $A(x, 0); P(x_0, 0)$:

$$d(A, P_0) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

$$L_{S_T} = \sqrt{\left(\left(x_0 - \frac{y_0}{y'}\right) - x_0\right)^2 + (0 - 0)^2}$$

$$L_{S_T} = \sqrt{\left(\left(x_0 - \frac{y_0}{y'}\right) - x_0\right)^2 + (0)^2}$$

$$L_{S_T} = \sqrt{\left(x_0 - \frac{y_0}{y'} - x_0\right)^2}$$

$$L_{S_T} = \sqrt{\left(-\frac{y_0}{y'}\right)^2}$$

$$L_{S_T} = \frac{y_0}{y'}$$

La longitud del segmento de la normal entre el punto P_0 y el eje x es $L_N = d(B, P_0)$:

$$B(x,0); P(x_0, y_0)$$

$$d(B, P_0) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

$$L_N = \sqrt{\left((x_0 + y_0 y') - x_0\right)^2 + (0 - y_0)^2}$$

$$L_N = \sqrt{(x_0 - x_0 - y_0 y')^2 + (y_0)^2}$$

$$L_N = \sqrt{(-y_0 y')^2 + (y_0)^2}$$

$$L_N = \sqrt{{y_0}^2 y'^2 + (y_0)^2}$$

$$L_N = \sqrt{{y_0}^2 (y'^2 + 1)}$$

$$L_N = y_0 \sqrt{1 + y'^2}$$

La longitud de la sub normal es la proyección del segmento normal $\overline{BP_0}$ sobre el eje "x", es decir:

$$L_{S_N} = D(C, B) = \sqrt{(x_0 + y_0 y' - x_0)^2 + (0 - 0)^2}$$

$$L_{S_N} = y_0 y'$$

Generalizando estas longitudes en cualquier punto (x, y) de la curva $C: F(x, y) = 0$, se tiene

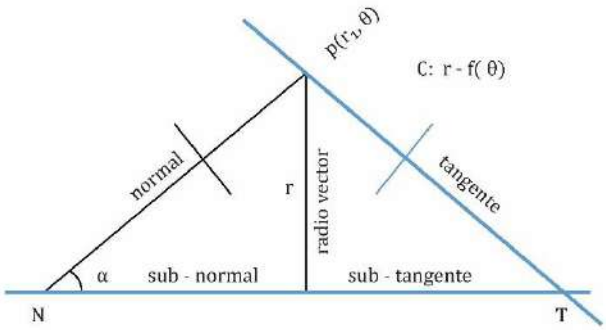
$L_T = \frac{y_0}{y'}\sqrt{1 + y'^2}$	=	longitud de la tangente.
$L_{S_T} = \frac{y_0}{y'}$	=	longitud de la sub tangente.
$L_N = y_0\sqrt{1 + y'^2}$	=	longitud de la normal.
$L_{S_N} = y_0 y'$	=	longitud de la sub normal.

Para el caso en que la curva está dada en coordenadas polares. Considerando la curva $C: r = f\ (q)$ y $P\ (r, q)$Î C, entonces:

$$tan\alpha = r\left(\frac{d\theta}{dr}\right)$$

Figura 10

Ubicación del ángulo.



Donde α es el ángulo comprendido entre el radio vector y la parte de la tangente dirigida hacia el origen de la curva:

$$r*tan\alpha = r * r\left(\frac{d\theta}{dr}\right)$$

$$r*tan\alpha = r^2\left(\frac{d\theta}{dr}\right)$$

Es la longitud de la sub tangente polar:

$$r*cot\alpha = \left(\frac{d\theta}{dr}\right)$$

Es la longitud de la sub normal polar:

$$rsen\alpha = r^2\left(\frac{d\theta}{dr}\right)$$

Es la longitud de la perpendicular desde el polo a la tangente:

$$ds = \sqrt{(dr)^2 + r^2(d\theta)^2}$$

$$ds = \sqrt{r^2 + r^2\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$$

Es un elemento de longitud de arco:

$$S = \frac{r^2 d\theta}{2}$$

Es un elemento de área:

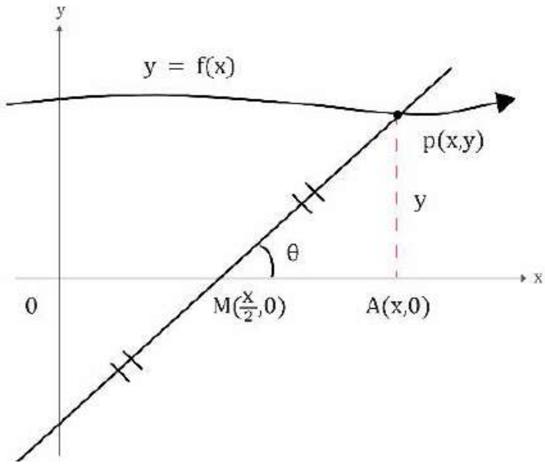
EJERCICIOS RESUELTOS

1. Hallar la ecuación de las curvas, tales que la parte de cada tangente, comprendida entre el eje "y", y el punto de tangencia, queda dividido en dos partes iguales por el eje de las "x".

Solución:

P1. Realizar el gráfico según los datos del problema:

Figura 11
Ubicación tangencial.



P2. En el triángulo rectángulo MAP, se tiene:

$$tg\theta = \frac{AP}{MA}$$

$$tg\theta = \frac{y}{\frac{x}{2}}$$

$$tg\theta = \frac{2y}{x}$$

P3. Se conoce que $tg\theta = \frac{dy}{dx} = m$, por tanto:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x}$$

P3. Aplicando EDVS:

$$\frac{dy}{y} = \frac{2dx}{x}$$

P4. Integrando:

$$\int \frac{dy}{y} = 2\int \frac{dx}{x}$$

$$lny = 2lnx + lnC$$

$$lny = lnx^2 + lnC$$

$$y = x^2C$$

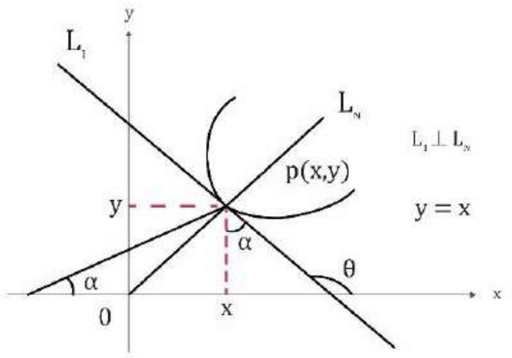
2. La tangente en cualquier punto de una curva y la recta que une ese punto con el origen forman un triángulo isósceles con base en el eje de las x. Hallar la ecuación de la curva sabiendo que pasa por el punto (2,2).

Solución:

P1. Trazar la gráfica para mejor la comprensión del problema:

Figura 12

Determinación de la tangente en P(x,y).



P2. Se sabe que la recta normal y la recta tangente son perpendiculares:

$$L_N \perp L_T$$

$$tag\alpha * tag\theta = -1$$

$$tag\theta = -\frac{1}{tag\alpha} = -ctg\alpha = -\frac{y}{x}$$

Por definición de derivada se tiene $\frac{dy}{dx} = tang\theta$, de donde:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$$

P3. Por separación de variables:

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$$

Integrando las funciones:

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x}$$

$$lny = -lnx + lnC$$

$$lny + lnx = lnC$$

$$lnyx = lnC$$

$$yx = C$$

P4. Calculando el valor de C en $(2{,}2)$:

$$yx = C$$

$$2 * 2 = C$$

$$C = 4$$

Por tanto, la solución es:

$$yx = 4$$

3. Hallar la ecuación de una curva tal que, si en un punto cualquiera de ella, se trazan la normal y la ordenada, el segmento que ambos interceptan sobre el eje de las x es una constante a.

Solución:

P1. Trazar las gráficas, se tienen dos casos que cumple las condiciones descritas en el enunciado.

Figura 13 Caso 1

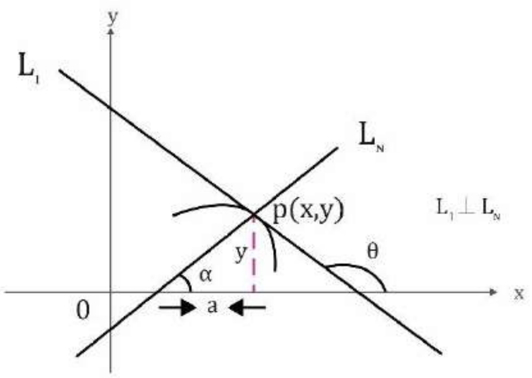
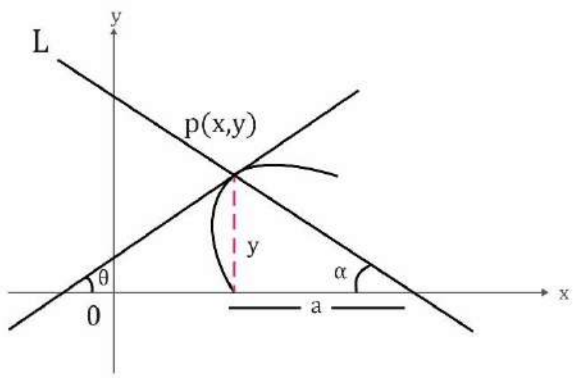


Figura 14 Caso 2



P2. Por definición de derivada se tiene $\frac{dy}{dx} = tang\theta = \pm ctg\alpha$, donde $ctg\alpha = \frac{a}{y}$:

$$\frac{dy}{dx} = \pm\frac{a}{y}$$

P3. Resolviendo por separación de variables:

$$ydy = \pm adx$$

Integrando las funciones:

$$\int ydy = \pm a\int dx$$

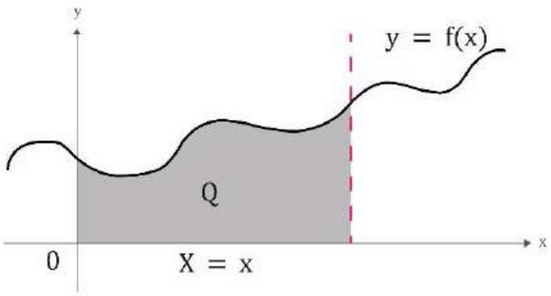
$$\frac{y^2}{2} = \pm ax + C$$

4. Hallar una curva para la cual el área a Q, limitada por la curva, el eje OX y las dos ordenadas. $x = 0, x = x$, sea una función dada de $Q = a^2 ln\left(\frac{y}{a}\right)$.

Solución:

P1. Elaborar un esquema:

Figura 15
Área bajo la curva.



P2. Determinar el área bajo la curva:

$$Q = a^2 ln\left(\frac{y}{a}\right) = \int_0^x f(x)dx$$

Derivando la expresión:

$$a^2 dln\left(\frac{y}{a}\right) = d\int_0^x y dx$$

Aplicando el teorema fundamental del cálculo al segundo miembro:

$$a^2\left[\frac{d\left(\frac{y}{a}\right)}{\frac{y}{a}}\right] = y$$

$$a^2\left[\frac{\left(\frac{dy}{a}\right)}{\frac{y}{a}}\right] = y$$

$$\left[\frac{a^2 y'}{y}\right] = y$$

$$a^2 y' = y^2$$

P3. Resolviendo por variables separables:

$$a^2\frac{dy}{dx} = y^2$$

$$a^2\frac{dy}{y^2} = dx$$

$$a^2\int\frac{dy}{y^2} = \int dx$$

$$a^2\int y^{-2}dy = \int dx$$

$$a^2\frac{y^{-2+1}}{-2+1} = x + C$$

$$-\frac{a^2}{y} = x + C$$

La solución es una familia de hipérbolas:

$$\frac{a^2}{C-x}=y$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Demostrar que la curva, que posee la propiedad de que todas sus normales pasan por un punto constante es una circunferencia.

Resp. $x^2+y^2=R$

2. Hallar la curva para la cual, la razón del segmento interceptado por la tangente en el eje OY, al radio vector es una cantidad constante positiva.

Resp. $\boldsymbol{y=\frac{kx^{1-C}}{2}-\frac{x^{1+C}}{k}}$

3. Hallar la línea para la cual la distancia que media entre la normal en cualquier punto suyo el origen de coordenadas y la que media entre la misma normal y el punto (a,b) están en razón constante e igual a k.

Resp. $\boldsymbol{x^2+y^2-\frac{2k(ax+by)}{k+1}=C}$

4. Hallar la curva que posee la propiedad de que la magnitud de la perpendicular bajada del origen de coordenadas a la tangente sea igual a la abscisa del punto de contacto.

Resp. $x\left(\frac{y^2}{x^2}+1\right)=k\rightarrow x^2+y^2=kx$

5. Dada la figura adjunta, determinar todas las curvas para las cuales $\overline{PR}$ es tangente y al mismo tiempo es $\overline{QR}$ ortogonal al radio vector.

4.4 Trayectorias ortogonales

Considerar una familia de curvas planas

$$f(x,y,c)=0 \qquad (1)$$

donde cada valor del parámetro **c** representa una curva.

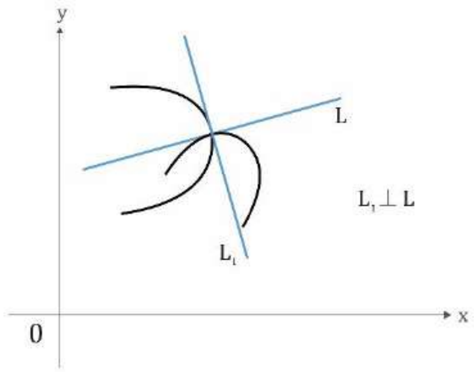
Los problemas que se presentan en los campos tales como Electrostática, Hidrodinámica y en Termodinámica, es de encontrar una familia de curvas que dependen de un parámetro k:

$$g(x, y, k) = 0 \qquad (2)$$

Con la propiedad de que cualquier curva de (1) al interceptar a cada curva de la familia (2) las rectas tangentes a la curva sean perpendiculares:

Figura 16

Trayectorias.



A las familias de las curvas (1) y (2) se denominan trayectorias ortogonales.

OBSERVACIONES

1. En el campo electrostático a una familia de curvas se denominan curvas equipotenciales, y la otra familia de curvas se denominan líneas de fuerza.
2. En el campo Hidrodinámico a una familia de curvas se denomina curvas de potencial de velocidad, y la otra se denomina líneas de corriente o líneas de flujo.
3. En el campo Termodinámico a una familia de curvas se denominan líneas isotermas, y a la otra familia de curvas se denomina líneas de flujo de calor.

Si se tiene la familia de curvas (1), para encontrar la familia de curvas (2) primero se encuentra la ecuación diferencial de la familia dado en (1) y despejando se obtiene

$$y' = F(x, y) \qquad (3)$$

Como la pendiente de las trayectorias ortogonales debe ser la inversa negativa de la pendiente (3), es decir

$$y' = -\frac{1}{F(x, y)} \qquad (4)$$

Luego las trayectorias ortogonales de la familia dada se obtienen resolviendo la ecuación diferencial (4).

SUGERENCIAS

- En el plano xy, la ortogonalidad entre estas curvas se reflejaría en ángulos de 90° entre las tangentes en los puntos de intersección.
- Este concepto es fundamental en varios campos, como la física, por ejemplo, en problemas de líneas de campo eléctrico o de flujo. En ese contexto, las líneas de campo eléctrico o las líneas de flujo suelen ser perpendiculares a las equipotenciales o a las líneas de nivel, respectivamente, lo que significa que son trayectorias ortogonales.

EJERCICIO RESUELTO

1. Encontrar las trayectorias ortogonales de todas las parábolas con vértice en el origen y focos sobre el eje x.

Solución:

P1. La ecuación de la familia de parábola es de la forma $y^2 = 4px, p \neq 0$, esta puede escribirse de la forma:

$$\frac{y^2}{x} = 4p$$

P2. Diferenciando se tiene:

$$\frac{xdy^2 - y^2dx}{x^2} = d4p$$

$$\frac{2xydy - y^2dx}{x^2} = 0$$

$$2xydy - y^2dx = 0$$
$$2xydy = y^2dx$$

$$2xdy = ydx$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2x}$$

$$m_1 = \frac{dy}{dx} = \frac{y}{2x}$$

Es decir, se encuentra, $m_1 = y' = F(x, y)$.

P3. La ecuación ortogonal es $m_2 = -\frac{1}{y'} = -\frac{1}{F(x,y)} = -\frac{1}{m_1}$, por tanto

$$y' = -\frac{1}{\frac{y}{2x}}$$

$$m_2 = \frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{y}$$

P4. Aplicando variables separables:

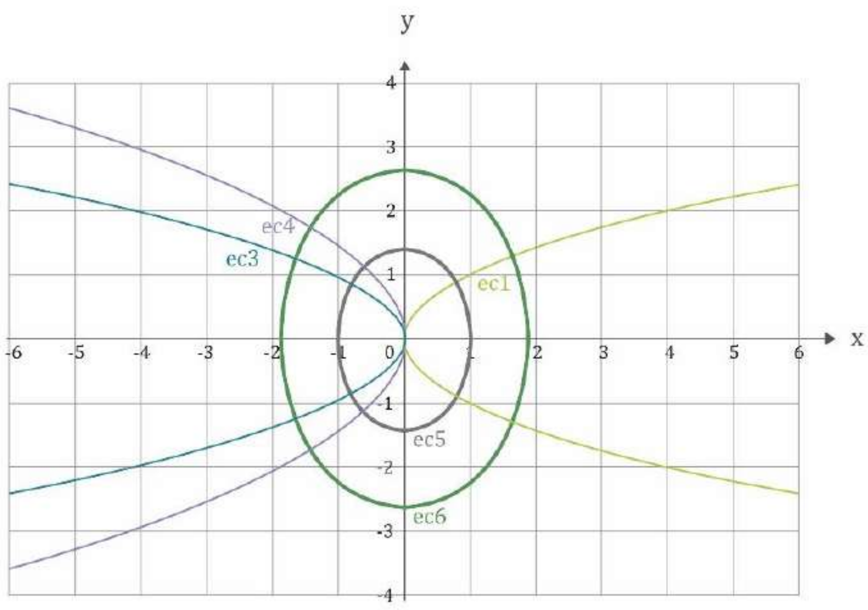
$$2xdx + ydy = 0$$

$$2\int xdx + \int y\,dy = \int 0$$

$$x^2 + \frac{y^2}{2} = C, C \neq 0$$

Luego, las trayectorias ortogonales a la familia de parábolas, las elipses de centro en el origen.

Figura 17
Trayectorias ortogonales.



2. Encontrar las trayectorias ortogonales de la familia de circunferencias de centro en el origen de coordenadas.

Solución:

P1. La ecuación de la familia de circunferencias de centro en el origen es de la forma:

$$x^2 + y^2 = c = r^2$$

P2. Diferenciando se tiene:

$$2xdx + 2ydy = 0$$

$$xdx + ydy = 0$$

Hallando la pendiente:

$$xdx = -ydy$$

$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$, es la primera pendiente.

P3. Calculando la pendiente dos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

P4. Y la ecuación diferencial de las trayectorias ortogonales es:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

de donde realizando EDVS:

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

Integrando:

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$$

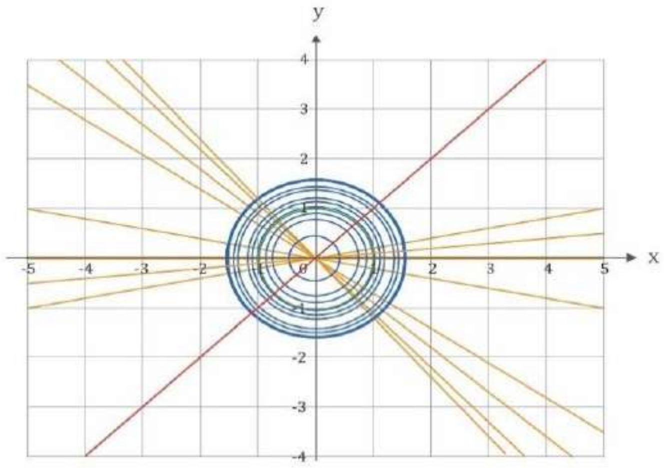
$$lny = lnx + lnC$$

$$lny = lnx.C$$

$$y = Cx$$

Luego, las trayectorias ortogonales a la familia de circunferencias son familia de rectas $y = kx$.

Figura 18
Trayectorias ortogonales.



4.5 Aplicaciones físicas

TEMPERATURA

Según la ley de Newton la velocidad de enfriamiento de un cuerpo en el aire es proporcional a la diferencia en la temperatura T del cuerpo y la temperatura Tm del aire. Si la temperatura del aire es 20^0 C y el cuerpo se enfría en 20 minutos desde 100℃ a 60℃ ¿En cuánto tiempo su temperatura descenderá hasta 30℃?

Solución:

P1. Considerando los datos de información así:

$\boldsymbol{T = 60}$℃	La temperatura del cuerpo.
$\boldsymbol{T_m = 20}$℃	Temperatura del aire.
$\boldsymbol{T_0 = 100}$℃	Temperatura inicial.
$\boldsymbol{t = 20min}$	Tiempo de enfriamiento.

P2. La descripción matemática del principio de Newton para el enfriamiento está dada por

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_m)$$

Y la solución de acuerdo a lo descrito es:

$$T = T_m + (T_0 - T_m)e^{-kT_m}$$

Reemplazando estos valores:

$$60 = 20 + (100 - 20)e^{-20k}$$

Entonces

$$4 = (8)e^{-20k}$$

P3. Despejando k mediante la aplicación de logaritmos, se tiene:

$$ln4 = ln(8)e^{-20k}$$

$$ln4 = ln(8) + lne^{-20k}$$

$$ln(2^2) = ln(2^3) - 20klne$$

$$2ln(2) = 3ln(2) - 20klne$$

$$2ln2 = 3ln2 - 20k$$

$$-ln2 = -20k$$

$$\frac{ln2}{20} = k$$

P4. Por lo tanto, sustituyendo el valor de k, en la ecuación (2):

$$T = 20 + 80e^{-\left(\frac{ln2}{20}\right)t}$$

$$T = 20 + 80e^{ln2\left(-\frac{t}{20}\right)}$$

$$T = 20 + 80\left(2^{\left(-\frac{t}{20}\right)}\right)$$

P5. Calculando para $t =$? se tiene $T = 30$°C, reemplazando y resolviendo:

$$30 = 20 + 80\left(2^{\left(-\frac{t}{20}\right)}\right)$$
$$10 = 80\left(2^{\left(-\frac{t}{20}\right)}\right)$$
$$1 = 8\left(2^{\left(-\frac{t}{20}\right)}\right)$$
$$\frac{1}{8} = \left(2^{\left(-\frac{t}{20}\right)}\right)$$
$$\frac{1}{2^3} = \left(2^{\left(-\frac{t}{20}\right)}\right)$$

P6. Como tienen la misma base se simplifica:

$$2^{-3} = \left(2^{\left(-\frac{t}{20}\right)}\right)$$

$$-3 = -\frac{t}{20}$$

$$60min = t$$

3. La conversión de una sustancia B sigue la ley de descomposición. Si sólo una cuarta parte de la sustancia ha sido convertida después de 10 segundos ¿Encuéntrese cuánto tardan en convertir $\frac{9}{10}$ de la sustancia?

Solución:

P1. Sea $x =$ cantidad de la sustancia B, según los datos del problema se tiene:

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{x_0}$	$\boldsymbol{\frac{3x_0}{4}}$	$\boldsymbol{\frac{x_0}{10}}$
$\boldsymbol{D}$	**0**	**10**	$\boldsymbol{t}$

P2. La descripción matemática para la descomposición es:

$$\frac{dx}{dt} = -kx$$

Donde k es un factor de proporcionalidad.

Por separación de variables se tiene:

$$\frac{dx}{x} = -kdt$$

P3. La solución es el planteamiento de una integral definida:

$$\int_{\frac{3x_0}{4}}^{\frac{x_0}{10}} \frac{dx}{x} = -k\int_0^{10} dt$$

Cambiar el orden de los factores de la integral definida izquierda ya que el valor mayor debe estar en la parte superior:

$$-\int_{\frac{x_0}{10}}^{\frac{3x_0}{4}} \frac{dx}{x} = -k\int_{0}^{10} dt$$

$$\int_{\frac{x_0}{10}}^{\frac{3x_0}{4}} \frac{dx}{x} = k\int_{0}^{10} dt$$

$$lnx\Big|_{\frac{x_0}{10}}^{\frac{3x_0}{4}} = kt\Big|_{0}^{10}$$

$$ln\left(\frac{3x_0}{4}\right) - ln\left(\frac{x_0}{10}\right) = 10k - 0k$$

Por las propiedades de los logaritmos, se tiene:

$$ln\left(\frac{\frac{3x_0}{4}}{\frac{x_0}{10}}\right) = 10k$$

$$ln\left(\frac{30}{4}\right) = 10k$$

$$ln\left(\frac{15}{2}\right) = 10k$$

$$k_1 = \frac{1}{10}ln\left(\frac{15}{2}\right)$$

P4. Reemplazando estos valores en la parte de descomposición:

$$\int_{x_0}^{10} \frac{dx}{x} = -k\int_{0}^{10} dt$$

Integrando:

$$lnx\Big|_{x_0}^{10} = -kt\Big|_{0}^{10}$$

$$ln10 - lnx_0 = -k(10-0)$$

Sustituyendo $x_0 = 0$:

$$ln10 - ln0 = -k(10)$$

$$ln10 = -10k$$

$$k = -\frac{1}{10}ln(10)$$

$$k = \frac{1}{10}ln(10)^{-1}$$

$$k_2 = \frac{1}{10}ln\left(\frac{1}{10}\right)$$

P5. El tiempo es la proporcional de las constantes encontradas:

$$t = \left|\frac{k_2}{k_1}\right|$$

$$t = \left|\frac{\frac{1}{10}ln\left(\frac{1}{10}\right)}{\frac{1}{10}ln\left(\frac{15}{2}\right)}\right|$$

$$t = \left|\frac{ln\left(\frac{1}{10}\right)}{ln\left(\frac{15}{2}\right)}\right|$$

$$t = 1{,}14\ s$$

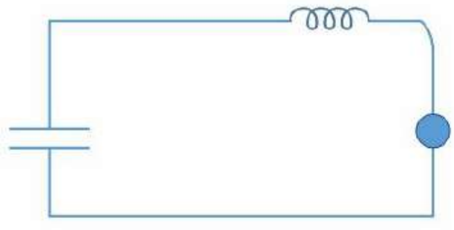
4. Una inductancia de 2 henrios y una resistencia de 10 ohmios se conectan en serie con una fem de 100 voltios, si la corriente es cero cuando $t = 0$ ¿Cuál es la corriente después de 0,1 segundo?

Solución:

P1. La gráfica de representación es la siguiente:

Figura 19

Circuito sencillo.



P2. Considerando la información que se dispone:

$$L = 2H \ \ , R = 10\Omega \ y \ E = 100V$$

P3. Estableciendo la ecuación que se genera con este comportamiento. Considerando la segunda ley de Kirchoff:

$$V_e = V_s$$

$$V_e = V_I + V_R$$

$$E = L\frac{dI}{dt} + R.I$$

P4. Sustituyendo los datos conocidos:

$$2\frac{dI}{dt} + 10I = 100$$

Simplificando

$$\frac{dI}{dt} + 5I = 50$$

P5. Es una ecuación lineal en I; por tanto, se resuelve aplicando su regla de linealidad:

$$\begin{cases} p(t) = 5 \\ q(t) = 50 \end{cases}$$

$$I(t) = e^{-\int p(t)dt}\left[\int e^{\int p(t)dt}(Q(t)dt + C)\right]$$

Sustituyendo los datos, se tiene:

$$I(t) = e^{-5\int dt}\left[\int e^{5\int dt}(50dt + C)\right]$$

$$I(t) = e^{-5t}\left[\int e^{5t}(50dt) + C\right]$$

$$I(t) = e^{-5t}\left[50\int e^{5t}dt + C\right]$$

$$I(t) = e^{-5t}\left[50\left(\frac{e^{5t}}{5}\right) + C\right]$$

$$I(t) = e^{-5t}[10e^{5t} + C]$$

$$I(t) = 10 + Ce^{-5t}$$

P6. Sustituyo el valor de $I(0) = 0$:

$$0 = 10 + Ce^{-5*0}$$

$$C = -10$$

Por tanto:

$$I(t) = 10 - 10e^{-5t}$$

$$I(t) = 10(1 - e^{-5t})$$

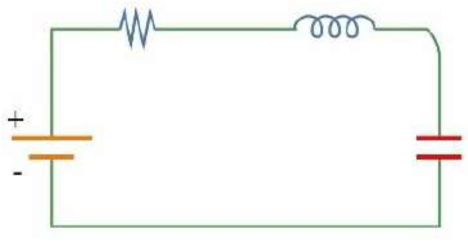
ahora para $t = 0{,}1$ se tiene:

$$I(0{,}1) = 10\left(1 - e^{-5(0{,}1)}\right) = 3{,}93A$$

5. Se tiene un circuito RL diseñado como se indica en la gráfica. Determinar la solución de este circuito:

$$R = 10\Omega \qquad \frac{5}{3}H = L(\text{Bovina, inductancia})$$

Figura 20
Circuito RL.



$$V = 300V \qquad \frac{1}{30}F = Capacitancia$$

Solución:

P1. El comportamiento de este circuito nos hace ver que durante su funcionamiento se tendrá una razón de cambio, es decir $\frac{dq}{dt} = I$.

P2. Aplicando ecuaciones diferenciales al circuito se tiene:

$$V_L + V_R + V_C = E(t)$$

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = E(t)$$

P3. Sustituyendo sus valores en la ecuación diferencial, se tiene:

$$\frac{5}{3}q'' + 10q' + 30q = 300(t)$$

Aplicando el cambio de variable $m = q$ para formar un polinomio característico:

$$\frac{5}{3}m^2 + 10m + 30 = 300(t)$$

Se obtiene un polinomio de segundo orden, además la solución de esta ecuación se toma

$$y_G = y_h + y_p$$

P4. Hallando la solución homogénea:

$$\frac{5}{3}m^2 + 10m + 30 = 0$$

Multiplicando por $\frac{3}{5}$:

$$\left[\frac{5}{3}m^2 + 10m + 30 = 0\right]\frac{3}{5}$$
$$m^2 + 6m + 18 = 0$$

Aplicar la fórmula de la ecuación general de segundo grado, se tiene:

$$m = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$m = \frac{-6 \pm \sqrt{(6)^2 - 4 * 18}}{2 * 1}$$

$$m = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 72}}{2}$$

$$m = \frac{-6 \pm \sqrt{-36}}{2}$$

$$m = \frac{-6 \pm 6i}{2}$$

$$m = -3 \pm 3i$$
$$m = \alpha \pm \beta i$$

Cuando es raíz imaginaria, la solución homogénea es:

$$y_h = e^{\alpha t}[C_1 cos(\beta t) + C_2 sen(\beta t)]$$

Acoplando a nuestro problema, la solución homogénea es:

$$q_c = e^{-3t}[C_1 cos(3t) + C_2 sen(3t)]$$

P5. Hallar la solución particular, se sabe que la carga se mide por un valor constante:

$$q = A$$

Derivando

$$q' = 0$$
$$q'' = 0$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial:

$$\frac{5}{3}q'' + 10q' + 30q = 300$$

$$\frac{5}{3} * 0 + 10 * 0 + 30A = 300$$

$$30A = 300$$

$$A = 10$$

P6. Entonces la solución total de la carga es:

$$y_G = y_h + y_p$$

$$q(t) = e^{-3t}[C_1 cos(3t) + C_2 sen(3t)] + 10$$

P7. Determinando los valores de las constantes, para ello $t = 0$, se observará su estado sin funcionamiento:

$$q(t) = e^{-3t}[C_1cos(3t) + C_2sen(3t)] + 10$$

$$q(0) = e^{-3*0}[C_1cos(0) + C_2sen(0)] + 10$$

$$0 = e^{0}[C_1 * 1 + C_2 * 0] + 10$$

$$0 = C_1 + 10$$

$$C_1 = -10$$

Como el tiempo de funcionamiento produce una razón de cambio, entonces se deriva la función:

$$q(t) = e^{-3t}[C_1cos(3t) + C_2sen(3t)] + 10$$

$$q'(t) = de^{-3t}[C_1cos(3t) + C_2sen(3t)] + d10$$

$$I(t) = e^{-3t}[-3C_1sen(3t) + 3C_2cos(3t)] - 3e^{-3t}[C_1cos(3t) + C_2sen(3t)]$$

Evaluando en $t = 0$:

$$I(0) = e^{-3*0}[-3C_1sen(0) + 3C_2cos(0)] - 3e^{-3*0}[C_1cos(0) + C_2sen(0)]$$

$$I(0) = e^{0}[-3C_1 * 0 + 3C_2 * 1] - 3e^{0}[C_1 * 1 + C_2 * 0]$$

$$0 = 3C_2 - 3C_1$$

Sustituyendo el valor de $C_1 = -10$:

$$0 = 3C_2 + 30$$
$$C_2 = -10$$
$$q(t) = e^{-3t}[-10cos(3t) - 10sen(3t)] + 10$$

ACTIVIDAD 16:

1. Un cuerpo cuya temperatura es de 30^0C requiere de 2 minutos para descender su temperatura a $20°C.$ Si se coloca en un medio refrigerante con temperatura constante de 10^0C ¿Cuánto tiempo tardará el mismo cuerpo para bajar su temperatura de 40^0C a 35^0C, si ahora el medio está a la temperatura constante de $15°C$?

Resp. $t = 0{,}64min$

2. Una población bacteriana B se sabe que tiene una tasa de crecimiento proporcional a B misma, si entre medio día y las 2pm la población se triplica ¿A qué tiempo, si no se efectúa ningún control, B será 100 veces mayor que el medio día?

Resp. $t = 8{,}38horas$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Un circuito en serie consiste de una resistencia de 120 ohmios y una inductancia $\frac{6}{\pi}$ henrios, un generador de corriente continua de 220 voltios se encuentra en serie con un generador de corriente alterna de 220 voltios (frecuencia de 60 ciclos), y de combinación conectada a un circuito por medio de un interruptor. Determinar:

   a. La corriente en el tiempo t después que se ha cerrado el interruptor.
   b. La corriente después de $\frac{1}{20\pi}$s.
   c. La corriente en estado permanente (o estacionario).
   d. El voltaje en la inductancia y el voltaje en la resistencia $\frac{1}{20\pi}\ s$.

5

Ecuaciones diferenciales de orden superior

Capítulo
5

Ecuaciones diferenciales de orden superior

5.1 Objetivos:

- Determinar la función o funciones solución de una ecuación diferencial de orden superior para su verificación.
- Aplicar la regla o principio de resolución de ecuaciones diferenciales de orden superior en forma correcta.

RECORDAR

1. El comportamiento de un polinomio en la notación es:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$$

5.2 Tipos de ecuaciones diferenciales de orden superior

En las ecuaciones diferenciales de orden superior se consideran tres tipos especiales:

1. **CASO.** Las ecuaciones diferenciales de la forma

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f(x) \qquad \textbf{(1)}$$

donde $f(x)$ es una función sólo de x, la solución de esta se lo obtiene por integración sucesiva, es decir:

$$\int \frac{d^n y}{dx^n} = \int f(x)$$

Por el primer teorema fundamental de cálculo se tiene:

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = \int f(x)dx + C_1$$

$$\int \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = \int \left[\int f(x)dx + C_1\right]$$

$$\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} = \int \left[\int f(x)dx + C_1\right] dx + C_2$$

.
.

$$y = \int \int \int \left[\ldots \int f(x)dx + C_1\right] dx + C_n$$

2. CASO. Las ecuaciones diferenciales de la forma:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = g(y) \quad \textbf{(2)}$$

donde $g(y)$ es una función sólo de "y", para obtener su solución se sigue este proceso:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dx}\frac{dy}{dy} = \frac{dy}{dx}.\frac{dy'}{dy} = y'\frac{dy'}{dy}$$

Pero como:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = g(y)$$

Mediante esta nueva correspondencia se tiene:

$$y'\frac{dy'}{dy} = g(y)$$

Analizando, se observa que se puede desarrollar por variables separables:

$$y'dy' = g(y)dy$$

Integrando las funciones nuevas:

$$\int y'dy' = \int g(y)dy$$

$$\frac{y'^2}{2} = \int g(y)dy + C_1$$

Se despeja y':

$$y' = \sqrt{2\left[\int g(y)dy + C_1\right]}$$

Separando las variables:

$$dy = \sqrt{2\left[\int g(y)dy + C_1\right]}dx$$

De donde:

$$\frac{dy}{\sqrt{2[\int g(y)dy + C_1]}} = dx$$

$$\frac{dy}{\sqrt{2[\int g(y)dy + C_1]}} = \int dx + C_2$$

De manera similar, se tiene:

$$\frac{d^3y}{dx^3} = g(y)$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = y'\left[y'\frac{d^2y'}{d^2y} + \left(\frac{dy'}{dy}\right)^2\right]$$

Para deducir esta expresión, se parte de la siguiente igualdad:

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d^2y'}{dx^2}$$

El estudiante lo deberá completar.

3. **CASO.** Las ecuaciones diferenciales de la forma:
4.

$$F\left(x,\ y^k, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}\right) = 0 \qquad \textbf{(3)}$$

Donde la ecuación (3) no contiene a y, se puede rebajar el orden de la ecuación tomada como nueva función incógnita la derivada de orden inferior de la ecuación dada, o sea:

$$z = y^k$$

obteniéndose la ecuación:

$$F\left(x, z, z', \dots, z^{(n-k)}\right) = 0$$

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Resolver la ecuación diferencial $\frac{d^3y}{dx^3} = xe^x$.

Solución:

P1. Iniciando de la ecuación establecida y nótese que depende solo de "x", por tanto, integrando hasta que se pierda la integral:

$$\frac{d^3y}{dx^3} = xe^x$$

$$\int \frac{d^3y}{dx^3} = \int xe^x \, dx$$

P2. Disminuyendo el orden de la derivada integrando, así:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \int xe^x dx + C_1$$

P3. Integrando el lado derecho:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \int xe^x dx + C_1$$

Hallar la integral $\int xe^x dx$ aplicando ILATE:

Derivada	Integral
x	e^x
1	e^x
0	e^x

$$\frac{d^2y}{dx^2} = xe^x - e^x + C_1$$

Otra forma de integrar:

$$\int xe^x dx = u.v - \int vdu$$

$$\begin{cases} u = x \rightarrow du = dx \\ dv = e^x dx \rightarrow v = e^x \end{cases}$$

$$\int xe^x dx) = x.e^x - \int e^x + C_1$$

$$\int xe^x dx) = x.e^x - e^x + C_1$$

P4. Retomando la ecuación del paso P3 para disminuir la derivada:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = xe^x - e^x + C_1$$

$$\int \frac{d^2y}{dx^2} = \int (xe^x - e^x + C_1)dx$$

$$\frac{dy}{dx} = \int (x.e^x - e^x + C_1)dx + C_2$$

$$\frac{dy}{dx} = \int (x.e^x)dx - \int e^x dx + C_1 \int dx + C_2$$

$$\frac{dy}{dx} = x.e^x - e^x - e^x + C_1x + C_2$$

$$\frac{dy}{dx} = xe^x - 2e^x + C_1x + C_2$$

P5. Integrando por última vez:

$$\int \frac{dy}{dx} = \int (xe^x - 2e^x + C_1x + C_2)dx$$

$$y = \int (xe^x - 2e^x + C_1x + C_2)dx + C_3$$

$$y = \int (xe^x)dx - 2\int e^x dx + C_1 \int xdx + C_2 \int dx + C_3$$

$$y = x.e^x - e^x - 2e^x + C_1\frac{x^2}{2} + C_2x + C_3$$

$$y = xe^x - 3e^x + C_1\frac{x^2}{2} + C_2x + C_3$$

2. Resolver la ecuación diferencial $\frac{d^2y}{dx^2} + ay = 0$.

Solución:

Partiendo de la ecuación establecida y observando que depende el lado derecho solo de "y":

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -ay$$

P1. Partiendo de la relación establecida:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y´\frac{dy´}{dy}$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial:

$$y´\frac{dy´}{dy} = -ay$$

$$y´dy´ = -aydy$$

P2. Integrando las funciones:

$$\int y´dy´ = -a\int ydy$$

$$\frac{y´^2}{2} = -\frac{ay^2}{2} + C_1$$

$$y´^2 = -ay^2 + 2C_1$$

$$y´ = \sqrt{2C_1 - ay^2}$$

P3. Aplicando variables separables:

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{2C_1 - ay^2}$$

$$\frac{dy}{\sqrt{2C_1 - ay^2}} = dx$$

Integrando las funciones:

$$\int \frac{dy}{\sqrt{2C_1 - ay^2}} = \int dx$$

$$\frac{1}{\sqrt{a}}arc\left(sen\left(\frac{\sqrt{a}y}{\sqrt{2C_1}}\right)\right) = x + C_2$$

$$arc\left(sen\left(\frac{\sqrt{a}y}{\sqrt{2C_1}}\right)\right) = \sqrt{a}x + \sqrt{a}C_2$$

$$\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2C_1}}\right)y = sen\left(\sqrt{a}x + \sqrt{a}C_2\right)$$

$$\left(\frac{1}{\frac{\sqrt{2C_1}}{\sqrt{a}}}\right) y = sen\left(\sqrt{a}x + \sqrt{a}C_2\right)$$

$$\left(\frac{y}{\frac{\sqrt{2C_1}}{\sqrt{a}}}\right) = sen\left(\sqrt{a}x + \sqrt{a}C_2\right)$$

Sustituyendo:

$$\left(\frac{\sqrt{2C_1}}{\sqrt{a}}\right) = k_1$$

$$\frac{y}{k_1} = sen\left(\sqrt{a}x + \sqrt{a}C_2\right)$$

$$y = k_1 sen\left(\sqrt{a}x + k_2\right)$$

3. Resolver la ecuación diferencial $xy'' = y'ln\left(\frac{y'}{x}\right)$.

Solución:

P1. Bajando el orden de la ecuación diferencial, al realizar una sustitución:

$$y' = z$$
$$y'' = z'$$

Entonces, sustituir estos nuevos valores en la ED:

$$xz' = zln\left(\frac{z}{x}\right)$$

Despejar el diferencial z':

$$z' = \frac{z}{x} ln\left(\frac{z}{x}\right)$$

La cual es una ecuación homogénea.

P2. Resolver la EDH $\frac{z}{x} = u$:

$$\begin{cases} z = ux \\ dz = udx + xdu \end{cases}$$

P3. Sustituir los nuevos valores en la ED:

$$z' = \frac{z}{x} ln\left(\frac{z}{x}\right)$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{z}{x} ln\left(\frac{z}{x}\right)$$

$$dz = \frac{z}{x} ln\left(\frac{z}{x}\right) dx$$

$$udx + xdu = ulnudx$$

P4. Aplicar separación de variables:

$$udx - ulnudx + xdu = 0$$

$$u(1 - lnu)dx + xdu = 0$$

$$\frac{dx}{x} + \frac{du}{u(1 - lnu)} = 0$$

P5. Integrar

$$\int \frac{dx}{x} + \int \frac{du}{u(1 - lnu)} = \int 0 \ dx$$

Determinar, $\int \frac{du}{u(1-lnu)}$:

$$\begin{cases} v = 1 - lnu \\ dv = -\frac{du}{u} \end{cases}$$

$$\int \frac{du}{u(1 - lnu)} = -\int \frac{dv}{v} = -lnv = -ln(1 - lnu)$$

Sustituir en la integral general:

$$lnx \ - \ln(1 - lnu) \qquad = lnC$$

$$ln\left(\frac{x}{(1 - lnu)}\right) = lnC$$

$$\left(\frac{x}{(1 - lnu)}\right) = C$$

$$x = C(1 - lnu)$$

$$\frac{x}{C} = (1 - lnu)$$

$$C_1x = (1 - lnu)$$

$$C_1x - 1 = -lnu$$

$$lnu = (1 - C_1x)$$

$$u = e^{(1-C_1x)}$$

P6. Sustituir el valor de u:

$$\frac{z}{x} = e^{(1-kx)}$$

$$z = xe^{(1-kx)}$$

P7. Sustituir el valor de z:

$$y' = xe^{(1-kx)}$$

P8. Reducir el orden de la derivada:

$$\frac{dy}{dx} = xe^{(1-kx)}$$

$$dy = xe^{(1-kx)}dx$$

Integrar:

$$y = \int xe^{(1-kx)}dx + C_1$$

Derivada	**Integral**
x	$e^{(1-kx)}$
1	$-\frac{e^{(1-kx)}}{k}$
0	$\frac{e^{(1-kx)}}{k^2}$

$$y = -\frac{xe^{(1-kx)}}{k} - \frac{e^{(1-kx)}}{k^2} + C_2$$

4. Resolver la siguiente ecuación diferencial $yy'' - 2yy'lny - (y')^2 = 0$.

Solución:

P1. Realizar las sustituciones $y' = P$; con este valor se determina la segunda derivada:

$$dy' = dP$$

$$y'' = \frac{dy}{dy}dP$$

$$y'' = dy\frac{dP}{dy}$$

$$y'' = y'\frac{dP}{dy}$$

$$y'' = P\frac{dP}{dy}$$

$$yP\frac{dP}{dy} - 2yPlny - P^2 = 0$$

P2. Factorando, $P\left(y\frac{dP}{dy} - 2ylny - P\right) = 0$:

P3. Se tiene dos soluciones:

$$\begin{Bmatrix} P = 0 \\ y\dfrac{dP}{dy} - 2ylny - P = 0 \end{Bmatrix}$$

P4. Desarrollando:

$$\begin{Bmatrix} y' = 0 \\ \left[y\frac{dP}{dy} - 2ylny - P = 0\right]\frac{1}{y} \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} \int dy = \int dx.0 \\ \left[\frac{dP}{dy} - 2lny - \frac{P}{y} = 0\right] \end{Bmatrix}$$

la segunda expresión es una ED lineal.

$$\begin{Bmatrix} \displaystyle\int dy = \int dx.0 \\ \left[\dfrac{dP}{dy} - \dfrac{P}{y} = 2lny\right] \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} P(x) = -\dfrac{1}{y} \\ Q(x) = 2lny \end{Bmatrix}$$

$$\left\{\begin{matrix} y = c_1 \\ P = e^{-\int -\frac{dy}{y}}\left[\int e^{\int -\frac{dy}{y}}(2lny)dy + C_2\right] \end{matrix}\right\}$$

Resolviendo la ecuación diferencial lineal:

$$P = e^{lny}\left[\int e^{-lny}\,(2lny)dy + C_2\right] = y\left[\int \frac{2lny}{y}dy + C_2\right]$$

P5. Integrando por partes $\int \frac{2lny}{y}dy + C_2$:

$$u = lny \quad ; \quad du = \frac{dy}{y}$$

$$\int 2udu + C_2 = u^2 + C_2 = ln^2y + C_2$$

Entonces:

$$P = y' = \frac{dy}{dx} = yln^2y + yC_2$$

P6. Integrar $\int dy = \int(yln^2y + yC_2)dx$:

$$\int \frac{dy}{(yln^2y + yC_2)} = \int dx$$

$$arctg\left(\frac{lny}{C_2}\right) = x + C_3$$

$$lny = C_2tg(x + C_3)$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Resolver la ecuación diferencial $x^2yy'' = (y - xy')^2$.

   Resp. $y = C_2e^{\frac{(x^2+C_1)^{\frac{3}{2}}}{3}}$

2. Resolver la ecuación diferencial $4x^2yy' = 9xy^2 + 6x + 54y^6 + 108y^4 + 72y^2 + 16$.

   Resp. $(3y^2 + 2)^2(-3x^8 + 4C) - 4x^0 = 0$

3. Resolver la ecuación diferencial $y''y^3 = 1$
   Resp. Sea $C_1y^2 - 1 = (C_1x + C_2)^2$

4. Resolver la ecuación diferencial $y'' = ae^y$

   Resp. $x + C_2 = \pm\frac{1}{C_1} ln\left|\frac{\sqrt{C_1^2+ae^y}-C_1}{\sqrt{C_1^2+ae^y}+C_1}\right|$

5. Resolver la ecuación diferencial $3y'' = y^{-\frac{5}{3}}$.

   Resp. $C_2^2(x - C_1) = \pm\left(2C_2y^{\frac{2}{3}} + 1\right)\sqrt{C_2y^{\frac{2}{3}} - 1}$

6. Resolver la ecuación diferencial $y^2y''' - 3yy'y'' + 2(y')^3 + \frac{y}{x}[yy'' - (y')^2] = \frac{y^3}{x^2}$

   Resp. $y = e^{\int(ln^2x+lnx)dx}$

7. Resolver la ecuación diferencial $xy'(yy'' - (y')^2 - y(y')^2) = x^4y^3$.

   Resp. $y = e^{\int x\sqrt{x^2+Cdx}} = e^{\frac{\sqrt{(x^2+C)^3}}{3}}$

8. Resolver la ecuación diferencial $(1 + x^2)y'' + y'^2 + 1 = 0$.

   Resp. $y = ln(1 + Cx) - \frac{x}{C} + \frac{ln(1+Cx)}{C^2} + k$

6

Ecuaciones diferenciales lineales de orden n

Capítulo
6

Ecuaciones diferenciales lineales de orden n

6.1 Objetivos

- Determinar la función o funciones solución de una ecuación diferencial de orden superior.
- Analizar si las soluciones son linealmente independientes o dependientes.
- Aplicar la regla o principio de resolución de ecuaciones diferenciales de orden superior con el método apropiado.

6.2 Introducción

Las ecuaciones diferenciales de orden n son de la forma siguiente:

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_0(x)y = R(x) \quad (\mathbf{1})$$

donde $a_0, a_1, a_2, \dots., a_n$, y, $R(x)$ son funciones solo de x o constantes.

La ecuación diferencial (1) se puede escribir en la forma:

$$F\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}\right) = 0 \qquad (\mathbf{2})$$

esta ecuación indica que están relacionadas, la variable independiente "x", la variable dependiente "y", y las derivadas $(x, y', y'', \dots, y^{(n)})$.

Si en la ecuación (1) la función $R(x) = 0$, se obtiene:

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_0(x)y = 0 \qquad (\mathbf{3})$$

A esta ecuación se la llama ecuación diferencial homogénea (Zill, 2009, p. 64).

Si en la ecuación (1), la función $R(x) \neq 0$, la ecuación diferencial (1) se denomina ecuación diferencial lineal no homogénea (Zill, 2009, p. 116).

Si y_1, y_2 son soluciones de la ecuación diferencial (3) y si c_1 y c_2 son constantes arbitrarias, entonces $y = c_1y_1 + c_2y_2$, es una solución de la ecuación (3). Como y_1, y_2 son soluciones de la ecuación (3) entonces:

$$a_n(x)C_1y_1^{(n)} + a_{n-1}(x)C_1y_1^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)C_1y_1' + a_0(x)C_1y_1 = 0$$

$$a_n(x)C_2y_2^{(n)} + a_{n-1}(x)C_2y_2^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)C_2y_2' + a_0(x)C_2y_2 = 0$$

sumando y agrupando se tiene:

$$a_n(x)\left(C_1y_1^{(n)} + C_2y_2^{(n)}\right) + a_{n-1}(x)\left(C_1y_1^{(n-1)} + C_2y_2^{(n-1)}\right) + \cdots + a_0(x)(C_1y_1 + C_2y_2) = 0$$

$$a_n(x)(C_1y_1 + C_2y_2)^n + a_{n-1}(x)(C_1y_1 + C_2y_2)^{n-1} + \cdots + a_0(x)(C_1y_1 + C_2y_2) = 0$$

Entonces $C_1y_1 + C_2y_2$, es una solución de la ecuación diferencial (3), en general si

$$y_i, i = 1,2,,\ldots,n$$

son soluciones de la ecuación diferencial lineal homogénea de (3) y si:

$$C_i, \qquad i = 1,2,\ldots,n$$

son constantes, entonces $y = C_1y_1 + C_2y_2 + \cdots + C_ny_n$, es una ecuación diferencial de la ecuación (3).

6.3 Independencia lineal de las funciones

Considerar un sistema finito de n funciones $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$, definidas en algún intervalo (a,b), estas funciones son linealmente independientes si existen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, escalares tal que:

$$\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + \cdots, +\alpha_n f_n(x) = 0$$

Entonces:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$$

Si alguna $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, es diferente de cero, entonces $f_1, f_2, \dots, f_n$, son funciones linealmente dependientes.

EL WRONSKIANO

Suponiendo que las n funciones, $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ son diferentes cada uno al menos, $(n-1)$ veces en un intervalo, $a < x < b$, entonces de la ecuación:

$$0 = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_n y_n$$

Por diferenciaciones sucesivas se tiene:

$$\begin{cases} C_1 f_1 + C_2 f_2 + \cdots + C_n f_n = 0 \\ C_1 f_1' + C_2 f_2' + \cdots + C_n f_n' = 0 \\ C_1 f_1'' + C_2 f_2'' + \cdots + C_n f_n'' = 0 \\ \quad\quad\quad . \\ C_1 f_1^{(n-1)} + C_2 f_2^{(n-1)} + \cdots + C_n f_n^{(n-1)} = 0 \end{cases}$$

Considerando (α) como un sistema de ecuaciones $C_1, C_2, \dots, C_n$ este sistema no tiene solución, excepto cuando todos los $C_1, C_2, \dots, C_n$, son ceros.

Si el determinante de los coeficientes de $C_1, C_2, \dots, C_n$, no es nulo, es decir:

$$\begin{vmatrix} f_1 & f_2 \cdots & f_n \\ f_1' & f_2' & f_n' \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0$$

Entonces las funciones $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ son linealmente independientes, al determinante de los coeficientes del sistema (α) denotado por W, es decir:

$$W = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 \cdots & f_n \\ f_1' & f_2' & f_n' \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

Se llama el Wronskiano de las funciones $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$.

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Demostrar que las funciones $f_1(x) = e^x, f_2(x) = e^{2x}, f_3(x) = e^{3x}$ son linealmente independientes.

Solución:

Método 2: Aplicando el principio de Wronskiano, es decir:

$$W = \begin{vmatrix} e^x & e^{2x} & e^{3x} \\ e^x & 2e^{2x} & 3e^{3x} \\ e^x & 4e^{2x} & 9e^{3x} \end{vmatrix} = e^x \begin{vmatrix} 2e^{2x} & 3e^{3x} \\ 4e^{2x} & 9e^{3x} \end{vmatrix} - e^{2x} \begin{vmatrix} e^x & 3e^{3x} \\ e^x & 9e^{3x} \end{vmatrix} + e^{3x} \begin{vmatrix} e^x & 2e^{2x} \\ e^x & 4e^{2x} \end{vmatrix}$$

$$e^x(18e^{5x} - 12e^{5x}) - e^{2x}(9e^{4x} - 3e^{4x}) + e^{3x}(4e^{3x} - 2e^{3x})$$

$$6e^{6x} - 6e^{6x} + 2e^{6x}$$

$$W = 2e^{6x} \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

Entonces las funciones e^x, e^{2x}, e^{3x} son linealmente independientes.

Método 1:

P1. Formando el sistema de ecuaciones a partir de la definición de combinación lineal:

$$\alpha_1 e^x + \alpha_2 e^{2x} + \alpha_3 e^{3x} = 0$$

Como se tiene 3 incógnitas se deriva dos veces:

$$\begin{cases} \alpha_1 e^x + \alpha_2 e^{2x} + \alpha_3 e^{3x} = 0 \\ \alpha_1 e^x + 2\alpha_2 e^{2x} + 3\alpha_3 e^{3x} = 0 \\ \alpha_1 e^x + 4\alpha_2 e^{2x} + 9\alpha_3 e^{3x} = 0 \end{cases}$$

P2. Resolviendo el sistema de ecuaciones aplicando el método de Gauss, se tiene:

$$\begin{cases} \alpha_1 e^x + \alpha_2 e^{2x} + \alpha_3 e^{3x} = 0 \\ \alpha_1 e^x + 2\alpha_2 e^{2x} + 3\alpha_3 e^{3x} = 0 \\ \alpha_1 e^x + 4\alpha_2 e^{2x} + 9\alpha_3 e^{3x} = 0 \end{cases}$$

$$\boldsymbol{F_2 = -F_1 + F_2}$$
$$\boldsymbol{F_3 = F_1 - F_3}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 e^x + \alpha_2 e^{2x} + \alpha_3 e^{3x} = 0 \\ \alpha_2 e^{2x} + 2\alpha_3 e^{3x} = 0 \\ -3\alpha_2 e^{2x} - 8\alpha_3 e^{3x} = 0 \end{cases}$$

$$\boldsymbol{F_3 = 3F_2 + F_3}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 e^x + \alpha_2 e^{2x} + \alpha_3 e^{3x} = 0 \\ \alpha_2 e^{2x} + 2\alpha_3 e^{3x} = 0 \\ -2\alpha_3 e^{3x} = 0 \end{cases}$$

Despejando α_3,

$$\begin{cases} \alpha_1 e^x + \alpha_2 e^{2x} + \alpha_3 e^{3x} = 0 \\ \alpha_2 e^{2x} + 2\alpha_3 e^{3x} = 0 \\ \alpha_3 = \dfrac{0}{-2e^{3x}} = 0 \end{cases}$$

Sustituyendo el valor α_3 hacia arriba, se determina el valor de α_2, α_1.

$$\begin{cases} \alpha_1 e^x + \alpha_2 e^{2x} + (0)e^{3x} = 0 \\ \alpha_2 e^{2x} + 2(0)e^{3x} = 0 \\ \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 e^x + \alpha_2 e^{2x} = 0 \\ \alpha_2 e^{2x} = 0 \\ \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Despejando α_2:

$$\begin{cases} \alpha_1 e^x + \alpha_2 e^{2x} = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Sustituyendo el valor α_2:

$$\begin{cases} \alpha_1 e^x + (0)e^{2x} = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 e^x = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Por tanto, la solución final es:

$$\begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Son linealmente independientes:

2. Demostrar que las funciones $e^x, cosx, senx$ son linealmente independientes.

Solución:

Método 1.

P1. Formando el sistema de ecuaciones a partir de la definición de combinación lineal:

$$\alpha_1 e^x + \alpha_2 e^{2x} + \alpha_3 e^{3x} = 0$$

Como se tiene 3 incógnitas, se deriva dos veces:

$$\begin{cases} \alpha_1 e^x + \alpha_2 cosx + \alpha_3 senx = 0 \\ \alpha_1 e^x - \alpha_2 senx + \alpha_3 cosx = 0 \\ \alpha_1 e^x - \alpha_2 cosx - \alpha_3 senx = 0 \end{cases}$$

P2. Resolviendo el sistema de ecuaciones por el método de Gauss:

$$\begin{cases} \alpha_1 e^x + \alpha_2 cosx + \alpha_3 senx = 0 \\ -\alpha_2(cosx + senx) + \alpha_3(cosx - senx) = 0 \\ 2\alpha_2 cosx + 2\alpha_3 senx = 0 \end{cases}$$

$$\boldsymbol{F_2 = -F_1 + F_2}$$
$$\boldsymbol{F_3 = F_1 - F_3}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 e^x + \alpha_2 cosx + \alpha_3 senx = 0 \\ -\alpha_2(cosx + senx) + \alpha_3(cosx - senx) = 0 \\ 2\alpha_2 cosx + 2\alpha_3 senx = 0 \end{cases}$$

$$\boldsymbol{F_3 = 2cosxF_2} + (cosx + senx)\boldsymbol{F_3}$$

Realizando esta operación por separado:

$$\begin{cases} -2\alpha_2 cosx(cosx + senx) + 2\alpha_3 cosx(cosx - senx) = 0 \\ \boldsymbol{2}\alpha_2 cosx(cosx + senx) + 2\alpha_3 senx(cosx + senx) = 0 \end{cases}$$

El nuevo sistema es:

$$\begin{cases} \alpha_1 e^x + \alpha_2 cosx + \alpha_3 senx = 0 \\ -\alpha_2(cosx + senx) + \alpha_3(cosx - senx) = 0 \\ 2\alpha_3 cosx(cosx - senx) + 2\alpha_3 senx(cosx + senx) = 0 \end{cases}$$

Resolviendo la ecuación 3,

$$2\alpha_3 cos^2x - 2\alpha_3 cosxsenx + 2\alpha_3 senxcosx + 2\alpha_3 sen^2x = 0$$

$$2\alpha_3 cos^2x + 2\alpha_3 sen^2x = 0$$

$$2\alpha_3(cos^2x + sen^2x) = 0$$

Despejando α_3,

$$\alpha_3 = \frac{0}{2} = 0$$

Sustituyendo el valor α_3 hacia arriba, se determina el valor de α_2, α_1.

$$\begin{cases} \alpha_1 e^x + \alpha_2 cosx + 0 * senx = 0 \\ -\alpha_2(cosx + senx) + 0 * (cosx - senx) = 0 \\ \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 e^x + \alpha_2 cosx = 0 \\ -\alpha_2(cosx + senx) = 0 \\ \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Despejando α_2:

$$\begin{cases} \alpha_1 e^x + \alpha_2 cosx = 0 \\ \alpha_2 = \dfrac{0}{(cosx + senx)} \\ \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 e^x + \alpha_2 cosx = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Sustituyendo el valor de α_2:

$$\begin{cases} \alpha_1 e^x + 0 * cosx = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 e^x = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Por tanto, la solución final es:

$$\begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Lo que indica que son linealmente independientes.

P1. Aplicando el principio de Wronskiano se tiene:

$$W = \begin{vmatrix} e^x & cosx & senx \\ e^x & -senx & cosx \\ e^x & -cosx & -senx \end{vmatrix} \begin{matrix} e^x & cosx \\ e^x & -senx \\ e^x & -cosx \end{matrix}$$

P2. Resolviendo el determinante:

$$e^x sen^2x + e^x cos^2x - e^x.cosx.senx + e^x sen^2x + e^x cos^2x + e^x.cosx.senx$$

$$2e^x sen^2 x + 2e^x cos^2 x$$

$$2e^x (sen^2 x + cos^2 x) = 2e^x \forall x \in R$$

Entonces las funciones $e^x, cosx, senx$ son linealmente independientes.

3. Hallar el Wronskiano de las funciones $f_1(x) = x;\ f_2(x) = \frac{1}{x}$

Solución:
Aplicando el principio del Wronskiano se tiene:

$$W = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & x^{-1} \\ 1 & -x^{-2} \end{vmatrix} = -x^{-1} - x^{-1} = -2x^{-1}: x \neq 0$$

OBSERVACIÓN

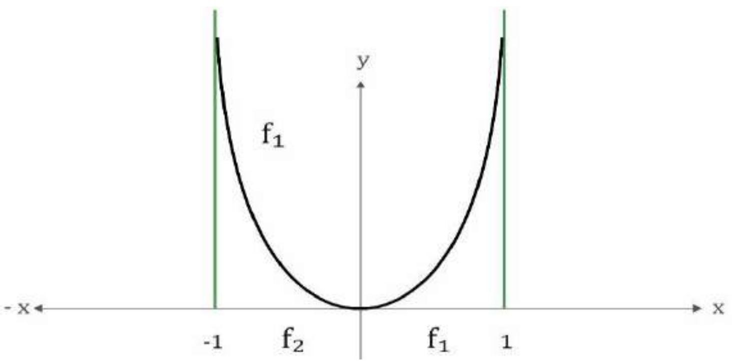
Que el Wronskiano $W \neq 0$ para que las funciones sean linealmente independientes es una condición necesaria, pero no suficiente.

4. Dadas las funciones:

$$f_1(x) = \begin{cases} x^2;\ -1 < x < 0 \\ 0; 0 < x < 1 \end{cases} \quad \text{y} \quad f_2(x) = \begin{cases} 0;\ -1 < x < 0 \\ x^2; 0 < x < 1 \end{cases}$$

son linealmente independientes y su Wronskiano es cero.

Figura 21
Comportamiento del Wronskiano.



Este sistema de funciones es linealmente independiente puesto que para $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, se cumple la identidad $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 = 0$, en efecto si:

$$x \in [-1,0] \rightarrow \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 = 0$$

$$\alpha_1 x^2 + \alpha_2 .0 = 0 \rightarrow \alpha_1 x^2 = 0 \rightarrow \alpha_1 = 0$$

O también

$$x \in [0,1] \rightarrow \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 = 0$$

$$\alpha_1 .0 + \alpha_2 .x^2 = 0 \rightarrow \alpha_2 x^2 = 0 \rightarrow \alpha_1 = 0$$

Luego $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$

Considerar el Wronskiano en $[-1,0]$ y en $[0,1]$

$$W = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^2 & 0 \\ 2x & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Por otro lado,

$$W = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & x^2 \\ 0 & 2x \end{vmatrix} = 0$$

Por tanto $W = [f_1, f_2] = 0;\ [-1,1]$

5. Averiguar si son LI o LD, dadas las funciones:$4, x$.

Solución: Resolución por combinación lineal:

P1. Definiendo las funciones: $\begin{cases} f_1(x) = 4 \\ f_2(x) = x \end{cases}$

P2. Poniendo en combinación lineal:

$$\alpha f_1 + \beta f_2 = 0$$

P3. Determinando los valores α, β se forma las ecuaciones:

$$4\alpha + x\beta = 0$$

Derivando,

$$d4\alpha + dx\beta = 0$$
$$\beta = 0$$

P4. Para encontrar α se sustituye el valor de β en la ecuación (1):

$$4\alpha + x(0) = 0$$
$$4\alpha = 0$$
$$\alpha = 0$$

De esto se concluye:

$$\alpha = \beta = 0$$

Lo que demuestra que las funciones son LI.

Resolución por el Wronskiano.

P1. Definición del Wronskiano:

$$\boldsymbol{W} = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ f'_1 & f'_2 \end{vmatrix}$$

P2. Sustituyendo las funciones:

$$\boldsymbol{W} = \begin{vmatrix} 4 & x \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$$

Lo que prueba que son LI.

6. Averiguar si son LI o LD, dadas las funciones: $1, senx, cos2x$.

Solución: Resolución por combinación lineal:

P1. Definiendo las funciones: $\begin{cases} f_1(x) = 1 \\ f_2(x) = senx \\ f_3(x) = cos2x \end{cases}$

P2. Poniendo en combinación lineal las funciones se tiene:

$$\alpha f_1 + \beta f_2 + \gamma f_3 = 0$$

P3. Determinando los valores α, β, γ. Como se tienen 3 incógnitas se deben tener 3 ecuaciones.

$$\alpha + \beta senx + \gamma cos2x = 0$$

Calcular la primera y segunda derivada para completar el sistema.

$$d\alpha + \beta dsenx + \gamma dcos2x = 0$$

$$\beta cosx - 2\gamma sen2x = 0$$

Sustituyendo el ángulo doble del seno:

$$\beta cosx - 4\gamma senxcosx = 0$$

$$\beta - 4\gamma senx = 0$$

Derivando por segunda vez se tiene:

$$-4\gamma cosx = 0$$

Despejando:

$$\gamma = \frac{0}{-4cosx} = 0$$

P4. Para encontrar α, β se sustituye el valor de γ en las ecuaciones anteriores:

$$\beta - 4(0)senx = 0 \rightarrow \beta = 0$$

$$\alpha + (0)senx + (0)cos2x = 0 \rightarrow \alpha = 0$$

De esto se concluye que:

$$\alpha = \beta = \gamma = 0$$

Lo que demuestra que las funciones son LI.

Resolución por el Wronskiano

P1. Aplicando la definición de Wronskiano:

$$\boldsymbol{W} = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ f'_1 & f'_2 & f'_3 \\ f''_1 & f''_2 & f''_3 \end{vmatrix}$$

P2. Sustituyendo las funciones:

$$\boldsymbol{W} = \begin{vmatrix} 1 & senx & cos2x \\ 0 & cosx & -2sen2x \\ 0 & -senx & -4cos2x \end{vmatrix}$$

$$\boldsymbol{W} = -4cosx.cos2x - 2senx.sen2x$$

$$\boldsymbol{W} = -4cosx.(cosx^2x - sen^2x) - 2senx.(2senxcosx)$$
$$\boldsymbol{W} = -4cos^3x + 4cosxsen^2x - 4sen^2x.cosx$$

$$\boldsymbol{W} = -4cos^3x \neq 0$$

Lo que prueba que es LI.

ACTIVIDAD 17

1. Averiguar si son LI o LD $cosx, cos(x+1), cos(x-2)$
   Resp. LD.

2. Averiguar si son LI o LD e^x, xe^x, x^2e^x
   Resp. LI.

3. Averiguar si son LI o LD $e^{-\alpha\frac{x^2}{2}}, e^{-\alpha\frac{x^2}{2}} \int_0^x e^{\frac{\alpha t^2}{2}} dt$
   Resp. LI.

4. Encuentre el Wronskiano de la función indicada $senhx, coshx$
   Resp. $W = -1$
   Resp. $W = 0$

5. Encuentre el Wronskiano de la función indicada $2, cosx, cos2x$
   Resp. $W = -8sen^3x$

6. Mediante el Wronskiano, demostrar que cada uno de los siguientes conjuntos son linealmente independientes $lnx, xlnx$

7. Demostrar que las funciones dadas son linealmente independientes y su Wronskiano es cero, construir la gráfica de estas funciones:

$$f_1(x) = \begin{cases} 0\,;\ 0 < x < 2 \\ (x-2)^2; 2 < x < 4 \end{cases} \text{ y } f_2(x) = \begin{cases} (x-2)^2;\ 0 < x < 2 \\ 0; 2 < x < 4 \end{cases}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Averiguar si son LI o LD $5, cos^2x, sen^2x$
   Resp. LI.

2. Averiguar si son LI o LD $cosx, cos(x+1), cos(x-2)$
   Resp. LD.

3. Averiguar si son LI o LD $2\pi, arctg\left(\frac{x}{2\pi}\right), arctg\left(\frac{x}{2\pi}\right)$
   Resp. LD.

4. Encuentre el Wronskiano de las funciones indicadas $senhx, coshx$
   Resp. $W = -1$

5. Encuentre el Wronskiano de las funciones indicadas $cos^2x, 1 + cos2x$
   Resp. $W = 0$

6. Mediante el Wronskiano demostrar que cada uno de los siguientes conjuntos son linealmente independientes $1, e^{-x}, 2e^{2x}$

7. Mediante el Wronskiano demostrar que cada uno de los siguientes conjuntos son linealmente independientes $1, sen^2x, 1-\cos x$

8. Demostrar que las funciones dadas son linealmente independientes y su Wronskiano es cero. Construir la gráfica de estas funciones:

$$f_1(x) = \begin{cases} 0\,;\ 0 < x < 2 \\ (x-2)^2; 2 < x < 4 \end{cases} \quad \text{y} \quad f_2(x) = \begin{cases} (x-2)^2;\ 0 < x < 2 \\ 0; 2 < x < 4 \end{cases}$$

6.4 Ecuación diferencial lineal de orden n de coeficientes constantes

Se denota a este tipo ecuaciones diferenciales mediante:

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

y se lo llama homogénea. Otra manera de representarle es:

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0$$

esta ecuación diferencial por ser homogénea va a tener una ecuación característica auxiliar que tiene la siguiente estructura:

$$a_n(x)\lambda^n + a_{n-1}(x)\lambda^{n-1} + \cdots + a_1(x)\lambda + a_0(x) = 0$$

Que al convertirle $\lambda = y'$ construir un polinomio que tiene n raíces las cuales son:

CASO I: RAÍCES REALES Y DIFERENTES: $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots \lambda_n$

La solución general es la combinación lineal:

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \cdots + C_n e^{\lambda_n x}$$

EJERCICIO RESUELTO

1. Resolver el polinomio característico de la ecuación diferencial de orden dos: $y'' - y' - 6y = 0$

P1. Resolviendo el polinomio característico sustituyendo $\lambda = y'$

$$\lambda^2 - \lambda - 6 = 0$$

Se procede a factorar:

$$(\lambda - 3)(\lambda + 2) = 0$$

Aplicando la ley del anulamiento:

$$\lambda - 3 = 0;\ \lambda + 2 = 0$$

$$\lambda_1 = 3; \lambda_2 = -2$$

P2. La solución de la ecuación diferencia es:

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$$

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-2x}$$

CASO II: RAÍCES REALES E IGUALES: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_n$ tienen multiplicidad n

La solución general es la combinación lineal:

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 x e^{\lambda_2 x} + C_3 x^2 e^{\lambda_3 x} \ldots + C_n x^{n-1} e^{\lambda_n x}$$

EJERCICIO RESUELTO

2. Resolver el polinomio característico de la ecuación diferencial:

$$y'' - 6y' + 9y = 0$$

Solución:

P1. Construyendo el polinomio característico $y' = \lambda$

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$$

Factorando el trinomio cuadrado perfecto se tiene:

$$(\lambda - 3)^2 = 0$$

Sacando las raíces del polinomio,

$$\lambda - 3 = 0; \lambda - 3 = 0$$
$$\lambda_1 = 3; \lambda_2 = 3$$

P2. La Solución:

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 x e^{\lambda_2 x}$$

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x}$$

CASO III: COMBINADO DE CASO I Y CASO II

$\lambda_1 \neq \lambda_2 \ y \ \lambda_3 \neq \lambda_4; \ \lambda_2 = \lambda_3; \ \lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6$

La solución general es la combinación lineal:

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + C_3 x e^{\lambda_2 x} + C_4 e^{\lambda_4 x} + C_5 x e^{\lambda_4 x} + C_6 x^2 e^{\lambda_4 x}$$

CASO IV: RAÍCES COMPLEJAS

Un par de conjugadas tiene la forma:

$$\begin{Bmatrix} \lambda_1 = \alpha + \beta i \\ \lambda_2 = \alpha - \beta i \end{Bmatrix}$$

De aquí se toma los valores de α y β, para cada par de conjugadas la solución general es la combinación lineal:

$$y = e^{\alpha x}Acos\beta x + e^{\alpha x}Bsen\beta x$$

Si hay otro par idéntico:

$$y = e^{\alpha x}Acos\beta x + e^{\alpha x}Bsen\beta x + xe^{\alpha x}Ccos\beta x + xe^{\alpha x}Dsen\beta x$$

Y si hay otro, se debe aplicar el mismo proceso.

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Hallar la solución de la ecuación diferencial lineal de orden tres.
2.

$$y''' + y'' + 4y' + 4y = 0$$

Solución:

P1. Construyendo la ecuación característica o polinomio característico $y' = \lambda$:

$$\lambda^3 + \lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$$

P2. Obteniendo las raíces del polinomio o factorizando:

$$(\lambda^3 + \lambda^2) + (4\lambda + 4) = 0$$

$$\lambda^2(\lambda + 1) + 4(\lambda + 1) = 0$$

$$(\lambda^2 + 4)(\lambda + 1) = 0$$

Aplicando la ley del anulamiento $a * b = 0; a = 0 \; o \; b = 0$

$$\begin{Bmatrix} \lambda^2 + 4 = 0 \\ \lambda + 1 = 0 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} \lambda^2 = -4 \\ \lambda = -1 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} \lambda = \sqrt{-4} \\ \lambda = -1 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} \lambda = \pm 2i \\ \lambda = -1 \end{Bmatrix}$$

Aplicando la definición de número complejo:

$$I = \alpha + \beta i$$
$$I = \text{real} + \text{Imaginaria}i$$

$$\begin{Bmatrix} \lambda_1 = 0 + 2i \\ \lambda_2 = 0 - 2i \\ \lambda_3 = -1 \end{Bmatrix}$$

Definiendo los valores de $\alpha = 0; \; \beta = 2$

P3. La solución general es la combinación lineal:

$$y = e^{\alpha x} A cos\beta x + e^{\alpha x} B sen\beta x + C_3 e^{\lambda_3 x}$$

$$y = e^{0x} A cos2x + e^{0x} B sen2x + C_3 e^{-x}$$

$$y = A cos2x + B sen2x + C_3 e^{-x}$$

3. Hallar la solución de $y''' + 6y'' + 11y' + 6y = 0$

Solución:

P1. Construyendo la ecuación característica $\lambda^3 + 6\lambda^2 + 11\lambda + 6 = 0$

P2. Obteniendo las raíces aplicando Ruffini

1	6	11	6	-1
	-1	-5	-6	
1	5	6	0	

$$(\lambda^2 + 5\lambda + 6)(\lambda + 1) = 0 \rightarrow (\lambda + 3)(\lambda + 2)(\lambda + 1) = 0$$

$$\begin{Bmatrix} \lambda + 1 = 0 \\ \lambda + 2 = 0 \\ \lambda + 3 = 0 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = -2 \\ \lambda_3 = -3 \end{Bmatrix}$$

P3. La solución general es la combinación lineal:

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + C_3 e^{\lambda_3 x}$$

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + C_3 e^{-3x}$$

4. Hallar la solución de: $\frac{d^6 y}{dx^6} + 2\frac{d^5 y}{dx^5} - 2\frac{d^3 y}{dx^3} - \frac{d^2 y}{dx^2} = 0$

Solución:

P1. Construyendo la ecuación característica o polinomio característico:

$$\lambda^6 + 2\lambda^5 - 2\lambda^3 - \lambda^2 = 0$$

P2. Factorando aplicando factor común y luego aplicando Ruffini:

$$\lambda^2(\lambda^4 + 2\lambda^3 - 2\lambda - 1) = 0$$

$$\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 2 & 0 & -2 & -1 & -1 \\ & -1 & -1 & 1 & 1 & \\ \hline 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & \end{array}$$

$$\lambda^2(\lambda+1)(\lambda^3+\lambda^2-\lambda-1) = 0 \to \lambda^2(\lambda+1)(\lambda^2\big((\lambda+1)-(\lambda+1)\big) = 0$$

$$\lambda^2(\lambda+1)(\lambda^2-1)(\lambda+1) = 0$$

$$\begin{Bmatrix} \lambda^2 = 0 \\ \lambda+1 = 0 \\ \lambda+1 = 0 \\ \lambda^2 - 1 = 0 \to (\lambda+1)(\lambda-1) = 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = -1 \\ \lambda_4 = -1 \\ \lambda_5 = -1 \\ \lambda_6 = 1 \end{Bmatrix}$$

P3. La solución general es la combinación lineal:

$$y = C_1e^{\lambda_1 x} + C_2xe^{\lambda_2 x} + C_3e^{\lambda_3 x} + C_4xe^{\lambda_4 x} + C_5x^2e^{\lambda_5 x} + C_6e^{\lambda_6 x}$$

Sustituyendo los valores, la solución es:

$$y = C_1e^{0x} + C_2xe^{0x} + C_3e^{-x} + C_4xe^{-x} + +C_5x^2e^{-x} + C_6e^{x}$$

$$y = C_1 + C_2x + C_3e^{-x} + C_4xe^{-x} + +C_5x^2e^{-x} + C_6e^{x}$$

5. Problema con valor inicial $y'' - 6y' + 8y = 0;\quad y(0) = 1: y'(0) = 0$

Solución:

OBSERVACIÓN: Cuando se dan los valores iniciales es porque se desea conocer el valor de la constante, ya que $\begin{Bmatrix} x = 0 \\ y = 1 \end{Bmatrix}$ como también $\begin{Bmatrix} x = 0 \\ y' = 0 \end{Bmatrix}$

P1. Construyendo la ecuación característica: $\lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0$

P2. Sacando las raíces $(\lambda - 4)(\lambda - 2) = 0$

$$\begin{Bmatrix} \lambda - 4 = 0 \\ \lambda - 2 = 0 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} \lambda_1 = 4 \\ \lambda_2 = 2 \end{Bmatrix}$$

P3. La solución general es la combinación lineal:

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$$

Sustituyendo los valores en la Solución:

$$y = C_1 e^{4x} + C_2 e^{2x}$$

P4. Obteniendo la derivada para determinar las constantes:

$$y' = 4C_1 e^{4x} + 2C_2 e^{2x}$$

P5. Determinando sus valores constantes, tomando en cuenta la observación:

$$\begin{Bmatrix} 1 = C_1 e^{4(0)} + C_2 e^{2(0)} \\ 0 = 4C_1 e^{4(0)} + 2C_2 e^{2(0)} \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} 1 = C_1 + C_2 \\ 0 = 4C_1 + 2C_2 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} 1 = C_1 + C_2\ (-4) \\ 0 = 4C_1 + 2C_2 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} -4 = -4C_1 - 4C_2 \\ 0 = 4C_1 + 2C_2 \end{Bmatrix} \rightarrow -4 = -2C_2 \rightarrow C_2 = 2$$

Se sustituye este valor en la segunda ecuación:

$$0 = 4C_1 + 2C_2$$

Para determinar la otra constante,

$$0 = 4C_1 + 2(2) \rightarrow C_1 = -1$$

Por tanto, la solución final es: $y = -e^{4x} + 2e^{2x}$.

ACTIVIDAD 18

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Hallar la solución de $2y'' - 5y' - 3y = o$
2. Hallar la solución de $y^{iv} - y = o$
3. Hallar la solución de $y^{vi} = o$
4. Hallar la solución de $y^{iv} + 2y'' + y = o$

Resolver las siguientes ecuaciones lineales de orden n

1. Hallar la solución de $y''' - 3y'' + 3y' - y = o$
2. Hallar la solución de $y'' - 10y' + 25y = o$
3. Problema con valor inicial $y'' + y = 0; \quad y(\pi) = 1: y'(\pi) = 1$
4. Problema con valor inicial $y'' - 4y' + 4y = 0; \quad y(0) = 2: y'(0) = 1$

6.5 Resolución de ecuaciones diferenciales lineales de orden n no homogéneas

OBJETIVOS

- Resolver ecuaciones diferenciales lineales de orden "n" no homogéneas aplicando el método más adecuado.
- Analizar las causas por el que no se recomienda ese método de resolución.

INDICACIÓN

Para resolver este tipo de ecuaciones diferenciales se tienen los siguientes métodos:

1. Coeficientes indeterminados.
2. Método de variación de parámetros.
3. Método de operadores.
4. Anuladores.

Ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas

Recordar que la ecuación homogénea es de la forma:

$$a_n(x)y^n + a_{n-1}(x)y^{n-1} + a_{n-2}(x)y^{n-2} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

Por tanto, una no homogénea tendrá la forma:

$$a_n(x)y^n + a_{n-1}(x)y^{n-1} + a_{n-2}(x)y^{n-2} \ldots . a_1 y' + a_0 y = R(x)$$

6.5.1 Resolución por coeficientes indeterminados

OBJETIVO

- Aplicar el método de coeficientes indeterminados cuando R(x) es función polinomial, exponencial, y posee senos y cosenos con las reglas determinadas.

INTRODUCCIÓN

Según Banach (1967), una ecuación diferencial lineal de orden "n" no homogénea es de la forma:

$$a_n(x)y^n + a_{n-1}(x)y^{n-1} + a_{n-2}(x)y^{n-2} \ldots . a_1y^{\prime} + a_0y = R(x)$$

donde,

$$R(x) = \begin{Bmatrix} \text{Polinomio} \\ \text{exponencial} \\ \text{seno o cosenos} \end{Bmatrix}$$

Como los siguientes ejemplos:

$$\begin{Bmatrix} y'' - 5y' + 6y = x^3 - 2x^2 - 5x + 2 \\ y'' - 5y' + 6y = 3e^{3x} - 2e^{2x} \\ y'' - 5y' + 6y = 2sen5x \\ y'' - 5y' + 6y = e^{3x}senx \\ y'' - 5y' + 6y = (x^3 - 3)cos3x - xe^{3x} \end{Bmatrix}$$

es factible aplicar este método de coeficientes indeterminados.

OBSERVACIÓN: No se puede aplicar este método cuando:

$$R(x) = \begin{Bmatrix} lnx \\ tanx \\ \sqrt{x} \end{Bmatrix}$$

En esta sección se aprenderá cómo resolver estas ecuaciones por parámetros.

Se empezará aplicando el método de coeficientes indeterminados considerando el siguiente proceso y tomando en cuenta dos aspectos:

CASO 1. Si Y_h no tiene funciones comunes con $R(x)$.

EJERCICIO RESUELTO

1. Analizando la ecuación diferencial $y'' - 5y' + 6y = x^3 + x$

Solución:

P1. Hallar la solución de la ecuación homogénea, para ello se construye el polinomio característico $y' = r$.

$$r^2 - 5r + 6 = 0$$

Factorizando:

$$(r - 3)(r - 2) = 0$$

Aplicando la ley del anulamiento:

$$r - 3 = 0; r - 2 = 0$$

$$\begin{Bmatrix} r_1 = 2 \\ r_2 = 3 \end{Bmatrix}$$

Es decir, la solución homogénea es:

$$y_h = C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x}$$

$$y_h = C_1e^{2x} + C_2e^{3x}$$

P2. Comparando $R(x)$ con y_h, se observa que no tienen elementos comunes entre ellos ya que $R(x)$ es un polinomio y y_h es una función exponencial.

P3. En este caso se propone y_p que tenga la misma forma de $R(x)$; es decir, para el ejemplo:

$$y_p = A + Bx + Cx^2 + Dx^3$$

Se debe derivar esta ecuación hasta el orden que indique la Ecuación Diferencial.

$$y'_p = B + 2Cx + 3Dx^2$$

$$y''_p = 2C + 6Dx$$

P4. El objetivo es determinar los valores de las constantes, para ello se sustituye en la E.D:

$$y'' - 5y' + 6y = x^3 + x$$

$$(2C + 6Dx) - 5(B + 2Cx + 3Dx^2) + 6(A + Bx + Cx^2 + Dx^3) = x^3 + x$$

$$2C + 6Dx - 5B - 10Cx - 15Dx^2 + 6A + 6Bx + 6Cx^2 + 6Dx^3 = x^3 + x$$

P5. Luego se construye el sistema de ecuaciones aplicando la igualdad de función:

$$\begin{cases} 6D = 1 \\ 6C - 15D = 0 \\ 6B - 10C + 6D = 1 \\ 6A - 5B + 2C = 0 \end{cases}$$

Se debe resolver el sistema:

$$\begin{cases} D = \dfrac{1}{6} \\ 6C - 15\left(\dfrac{1}{6}\right) = 0 \\ 6B - 10C + 6\left(\dfrac{1}{6}\right) = 1 \\ 6A - 5B + 2C = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} D = \dfrac{1}{6} \\ 6C - \left(\dfrac{5}{2}\right) = 0 \\ 6B - 10C + 1 = 1 \\ 6A - 5B + 2C = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} D = \frac{1}{6} \\ C = \frac{5}{12} \\ 6B - 10C = 0 \\ 6A - 5B + 2C = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} D = \frac{1}{6} \\ C = \frac{5}{12} \\ 6B - 10\left(\frac{5}{12}\right) = 0 \\ 6A - 5B + 2\left(\frac{5}{12}\right) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} D = \frac{1}{6} \\ C = \frac{5}{12} \\ B = \frac{25}{36} \\ 6A - 5\left(\frac{25}{36}\right) + 2\left(\frac{5}{12}\right) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} D = \frac{1}{6} \\ C = \frac{5}{12} \\ B = \frac{25}{36} \\ A = \frac{95}{216} \end{matrix}$$

Y con estos valores se debe construir la solución particular:

$$y_p = A + Bx + Cx^2 + Dx^3$$
$$y_p = \frac{95}{216} + \frac{25}{36}x + \frac{5}{12}x^2 + \frac{1}{6}x^3$$

P6. Por tanto, la solución será:

$$y_g = y_h + y_p$$

$$y = C_1e^{2x} + C_2e^{3x} + \frac{95}{216} + \frac{25}{36}x + \frac{5}{12}x^2 + \frac{1}{6}x^3$$

CASO 2. Si Y_h tiene funciones comunes con $R(x)$.

EJERCICIO RESUELTO

1. Analizar la ecuación $y'' - 5y' + 6y = 3e^{2x}$.

Solución:

P1. Hallar la solución de la ecuación homogénea $r^2 - 5r - 6 = 0$, es decir:

$$\begin{Bmatrix} r_1 = 2 \\ r_2 = 3 \end{Bmatrix}$$

Establecer la solución homogénea:

$$y_h = C_1e^{2x} + C_2e^{3x}$$

P2. Comparando $R(x)$ con y_h se observa que tienen elementos comunes entre ellos, ya que:

$$R(x) = 3e^{2x}$$

es una función exponencial:

$$y_h = C_1e^{2x} + C_2e^{3x}$$

es decir, la función e^{2x} está presente en las dos funciones.

P3. En este caso se propone $y_p = Ae^{2x}$, luego multiplicando la solución particular por alguna potencia de x, por la menor, tal que desaparezca la solución en la ecuación homogénea, así: $y_p = Axe^{2x}$. Si no se lo haría de esta manera al sustituir $y_p = Ae^{2x}$ ocurriría:

$$\begin{Bmatrix} y_p = Ae^{2x} \\ y'_p = 2Ae^{2x} \\ y''_p = 4Ae^{2x} \end{Bmatrix}$$

En la ecuación diferencial:

$$y'' - 5y' + 6y = 3e^{2x}$$

$$\begin{Bmatrix} 4Ae^{2x} - 5(2Ae^{2x}) + 6Ae^{2x} = 3e^{2x} \\ 0 = 3e^{2x} \end{Bmatrix}$$

Que es imposible admitir, ya que para que sea solución debe cumplir la igualdad $0 = 0$.

P4. Luego encontrar el valor de la solución particular y calcular sus derivadas:

$$y_p = Axe^{2x}$$

$$y_p{}' = A[xde^{2x} + e^{2x}dx]$$

$$y'_p = Ae^{2x} + 2Axe^{2x}$$

$$y''_p = 2Ae^{2x} + 2Ae^{2x} + 4Axe^{2x}$$

P5. El objetivo es determinar los valores de las constantes para ello, sustituir en la E.D:

$$y'' - 5y' + 6y = 3e^{2x}$$

$$(2Ae^{2x} + 2Ae^{2x} + 4Axe^{2x}) - 5(Ae^{2x} + 2Axe^{2x}) + 6(Axe^{2x}) = 3e^{2x}$$

$$4Ae^{2x} + 4Axe^{2x} - 5Ae^{2x} - 10Axe^{2x} + 6Axe^{2x} = 3e^{2x}$$

$$-A = 3$$

Por tanto, la solución particular es:

$$y_p = -3xe^{2x}$$

P6. Y la solución general es:

$$y_g = y_h + y_p$$

$$y = C_1e^{2x} + C_2e^{3x} - 3xe^{2x}$$

2. Hallar la solución de $y'' - 3y' + 2y = x^2$.

Solución:

Partiendo de la ecuación diferencial homogénea relacionada:

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

P1. Determinando la solución Y_h, se construye la ecuación característica:

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

P2. Resolviendo:

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

$$(\lambda - 2)(\lambda - 1) = 0$$

$$\lambda_1 = 2;\ \lambda_2 = 1$$

P3. Se obtiene la solución $Y_h = C_1e^x + C_2e^{2x}$

P4. Sacando la solución Y_p, como se observa $R(x) = x^2$ es un polinomio, entonces se construye un polinomio de igual grado de manera completa; es decir, $Y_p = Ax^2 + Bx + C$

P5. Para sacar los valores de A, B, C se deriva $Y_p = Ax^2 + Bx + C$, considerando la ecuación diferencial donde se debe sustituir las derivadas, al quedar una igualdad se obtienen dichos valores.

$$\begin{Bmatrix} Y_p = Ax^2 + Bx + C \\ Y'_p = 2Ax + B \\ Y''_p = 2A \end{Bmatrix}$$

P6. Sustituyendo:

$$y'' - 3y' + 2y = x^2$$

se tiene:

$$2A - 3(2Ax + B) + 2(Ax^2 + Bx + C) = x^2$$

resolviendo esta igualdad:

$$2A - 6Ax - 3B + 2Ax^2 + 2Bx + 2C = x^2$$

$$2Ax^2 - (6A - 2B)x + 2A - 3B + 2C = x^2$$

de esto se tiene:

$$\begin{Bmatrix} 2A = 1 \to A = \dfrac{1}{2} \\ 6A - 2B = 0 \to 6\left(\dfrac{1}{2}\right) - 2B = 0 \to 3 - 2B = 0 \to B = \dfrac{3}{2} \\ 2A - 3B + 2C = 0 \to 2\left(\dfrac{1}{2}\right) - 3\left(\dfrac{3}{2}\right) + 2C = 0 \to C = -\dfrac{7}{2} \end{Bmatrix}$$

Por tanto $Y_p = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{7}{2}$

P7. Solución general:

$$Y_G = Y_h + Y_p = C_1e^x + C_2e^{2x} + \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{7}{2}$$

CASO 3. $R(x)$ es una función trigonométrica.

Aplicando el principio de $Y_p = Asenx + Bcosx$,

Si $R(x) = sen5x$ entonces, $Y_p = Asen5x + Bcos5x$, etc.

EJERCICIO RESUELTO

1. Hallar la solución de $y'' - 3y' + 2y = 20sen8x$.

Solución:

Partiendo de la ecuación diferencial homogénea relacionada $y'' - 3y' + 2y = 0$

P1. Sacando su solución Y_h y construyendo la ecuación característica:

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

P2. Resolviendo el polinomio:

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$
$$\rightarrow (\lambda - 2)(\lambda - 1) = 0$$
$$\lambda - 2 = 0; \lambda - 1 = 0$$
$$\rightarrow \lambda_1 = 2;\ \lambda_2 = 1$$

P3. La solución homogénea de raíces reales y distintas es:

$$Y_h = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$$

$$Y_h = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x}$$

P4. Sacando la solución Y_p, como se observa $R(x) = 20sen8x$, es una función trigonométrica, entonces aplicando la relación:

$$Y_p = Asen8x + Bcos8x$$

P5. Para sacar los valores de A, B se deriva $Y_p = Asen8x + Bcos8x$, considerando la ecuación diferencial donde se deben sustituir las derivadas y al quedar una igualdad, se obtienen dichos valores:

$$\begin{Bmatrix} Y_p = Asen8x + Bcos8x \\ Y'_p = 8Acos8x - 8Bsen8x \\ Y''_p = -64Asen8x - 64Bcos8x \end{Bmatrix}$$

P6. Sustituyendo en la ecuación diferencial.

$$y'' - 3y' + 2y = 20sen8x$$

se tiene:

$$-64Asen8x - 64Bcos8x - 3(8Acos8x - 8Bsen8x) + 2(Asen8x + Bcos8x) = 20sen8x$$

Resolviendo está igualdad:

$$(-62A)sen8x - (24A)cos8x - 62Bcos8x + 24Bsen8x = 20sen8x$$

de esto se tiene la igualdad de términos para formar el sistema.

$$\begin{cases} (-62A + 24B)sen8x = 20sen8x \\ (-24A - 62B)cos8x = 0 * cos8x \end{cases}$$

$$\begin{cases} -62A + 24B = 20 \\ 24A + 62B = 0 \end{cases}$$

Resolver el sistema por sumas y restas.

$$\begin{cases} [-62A + 24B = 20] * 12 \\ [24A + 62B = 0] * 31 \end{cases}$$

$$\begin{cases} [-744A + 288B = 240] \\ [744A + 1922B = 0] \end{cases}$$

$$B = \frac{240}{2210}$$

$$B = \frac{24}{221}$$

Simplificando y sustituyendo en la ecuación 2 para determinar el valor de A.

$$24A + 62\left[\frac{24}{221}\right] = 0$$

$$24A = -62\left[\frac{24}{221}\right]$$

$$A = -\frac{62}{221}; B = \frac{24}{221}$$

Por tanto, la solución particular es:

$$Y_p = Asen8x + Bcos8x$$

$$Y_p = -\frac{62}{221}sen8x + \frac{24}{221}cos8x$$

P7. La solución general es:

$$Y_G = Y_h + Y_p = C_1e^x + C_2e^{2x} - \frac{62}{221}sen8x + \frac{24}{221}cos8x$$

CASO4: $R(x)$ es una función exponencial.

Aplicar el principio de $Y_p = Ae^{\alpha x}$.

EJERCICIO RESUELTO

1. Hallar la solución de la ecuación $y'' - 3y' + 2y = 12e^{5x}$ donde $R(x)$ es exponencial.

Solución:

Partiendo de la ecuación diferencial homogénea relacionada:

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

P1. Determinando su solución Y_h y construyendo la ecuación característica:

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

P2. Resolviendo el trinomio:

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

$$\rightarrow (\lambda - 2)(\lambda - 1) = 0$$

$$\rightarrow \lambda_1 = 2;\ \lambda_2 = 1$$

P3. La solución homogénea es:

$$Y_h = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x}$$

P4. Obteniendo la solución Y_p, como se observa $R(x) = 12e^{5x}$ es una función exponencial, en este caso $Y_p = Ae^{5x}$

P5. Para obtener los valores de A, derivar $Y_p = Ae^{5x}$ considerando la ecuación diferencial donde sustituir las derivadas, y al quedar una igualdad se obtienen dichos valores.

$$\begin{Bmatrix} Y_p = Ae^{5x} \\ Y'_p = 5Ae^{5x} \\ Y''_p = 25Ae^{5x} \end{Bmatrix}$$

P6. Luego se debe sustituir en la ecuación diferencial.

$$y'' - 3y' + 2y = 12e^{5x}$$

se tiene:

$$25Ae^{5x} - 3(5Ae^{5x}) + 2(Ae^{5x}) = 12e^{5x}$$

Resolviendo esta igualdad:

$$25A - 15A + 2A = 12$$

de esto se tiene:

$$12A = 12 \rightarrow A = 1$$

Reemplazo el valor de A, la solución particular es:

$$Y_p = Ae^{5x}$$

$$Y_p = e^{5x}$$

P7. Y la solución general es:

$$Y_G = Y_h + Y_p = C_1e^x + C_2e^{2x} + e^{5x}$$

6.5.2 Combinación de funciones

Es la combinación de los casos analizados, se partirá de un ejemplo que reúne los casos tratados.

$$y'' - 3y' + 2y = x^2 + 20sen8x + 12e^{5x}$$

Se observa que la solución homogénea sigue siendo la misma, es decir:

Partiendo de la ecuación diferencial homogénea relacionada es: $y'' - 3y' + 2y = 0$.

P1. Determinar la solución Y_h y construir la ecuación característica.

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

P2. Luego, resolver la ecuación:

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

$$\rightarrow (\lambda - 2)(\lambda - 1) = 0$$

$$\rightarrow \lambda_1 = 2;\ \lambda_2 = 1$$

P3. Establecer la solución homogénea:

$$Y_h = C_1e^x + C_2e^{2x}$$

Y para encontrar la solución particular se aplica el teorema de las superposiciones de soluciones.

TEOREMA DE LAS SUPERPOSICIONES DE SOLUCIONES

Si se logra identificar que las soluciones particulares del problema fueron determinadas en forma individual, lo que se hace es sumar todas las soluciones particulares (Spiegel, 1983):

$$Y_p = Y_{p1} + Y_{p2} + \cdots + Y_{pn}$$

En este caso la solución de la ecuación diferencial:

$$y'' - 3y' + 2y = x^2 + 20sen8x + 12e^{5x}$$

Está dada por la suma de todas sus soluciones particulares.

$$Y_p = Y_{p1} + Y_{p2} + Y_{p3}$$

Por tanto, la solución general será:

$$Y_h = C_1e^x + C_2e^{2x} + \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{7}{2} - \frac{62}{221}sen8x + \frac{24}{221}cos8x + e^{5x}$$

Observación: En el caso de no conocer las soluciones, se recomienda resolver caso por caso para luego aplicar el teorema expuesto.

EJERCICIO RESUELTO

1. Determinar la solución de la siguiente ecuación diferencial homogénea:

$$y'' - 3y' + 2y = 3e^{2x}$$

Solución:
Se analizará la solución homogénea, partiendo de la ecuación diferencial homogénea relacionada $y'' - 3y' + 2y = 0$.

P1. Obtener la solución Y_h y construir polinomios característicos

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

P2. Resolver el polinomio:

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \to (\lambda - 2)(\lambda - 1) = 0 \to \lambda_1 = 2;\ \lambda_2 = 1$$

P3. Luego, la solución homogénea es:

$$Y_h = C_1e^x + C_2e^{2x}$$

P4. Analizando $R(x) = 3e^{2x}$, si se compara, se observa que en la y_h y $R(x)$ se repite un valor e^{2x}, en este caso la $y_p = Ae^{2x}$ no puede ser usada, por lo que para evitar la redundancia se multiplica por un x hasta perder la repetición de respuestas, siendo la nueva solución particular de la forma $y_p = Axe^{2x}$ y con esto se procede de manera similar a lo estudiado en el caso I.

P5. Para sacar los valores de A, derivar $Y_p = Axe^{2x}$, considerando la ecuación diferencial donde se sustituirá las derivadas y al quedar una igualdad se obtiene dichos valores:

$$\left\{\begin{array}{c} Y_p = Axe^{2x} \\ Y'_p = A(e^{2x} + 2xe^{2x}) \\ Y''_p = A\big(2e^{2x} + 2(e^{2x} + 2xe^{2x})\big) = 4Ae^{2x} + 4xAe^{2x} \end{array}\right\}$$

P6. Sustituir en la ecuación diferencial.

$$y'' - 3y' + 2y = 3e^{2x}$$

se tiene:

$$4Ae^{2x} + 4xAe^{2x} - 3(Ae^{2x} + 2xAe^{2x}) + 2(Axe^{2x}) = 3e^{2x}$$

resolviendo esta igualdad y eliminado la función exponencial, se obtiene:

$$4A + 4xA - 3A - 6xA + 2xA = 3,$$

luego se forma el sistema lineal de acuerdo a las variables:

$$\left\{\begin{matrix} 0 = 0 \\ 4A - 3A = 3 \rightarrow A = 3 \end{matrix}\right\}$$

Por tanto, $Y_p = 3xe^{2x}$.

P7. Y la solución general es:

$$Y_G = Y_h + Y_p = C_1e^x + C_2e^{2x} + 3xe^{2x}$$

2. Determinar la solución de la siguiente ecuación diferencial:

$$y'' - 2y' + y = xe^x$$

Solución:

Se analiza la solución homogénea partiendo de la ecuación diferencial homogénea relacionada $y'' - 2y' + y = 0$.

P1. Obteniendo la solución Y_h y construyendo la ecuación característica, o polinomio característico:

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

P2. Resolver:

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \rightarrow$$

$$(\lambda - 1)(\lambda - 1) = 0 \rightarrow$$
$$\lambda - 1 = 0;\ \lambda - 1 = 0$$

$$\lambda_1 = 1;\ \lambda_2 = 1$$

P3. La solución homogénea es:

$$Y_h = C_1e^x + C_2xe^x$$

P4. Analizando $R(x) = xe^x$, si se compara se observa que en la y_h y $R(x)$ se repite un valor xe^x, en este caso la $y_p = (A + Bx)e^x$ ya no puede usarse, por lo que para evitar la redundancia se multiplica por un valor de x hasta que se pierda la repetición de respuestas, siendo la nueva solución particular de la forma $y_p = (A{+}Bx)x^2e^x$, y con esto se procede de manera similar a lo estudiado en el caso I.

P5. Para sacar los valores de A, derivar $Y_p = (Ax^2 + Bx^3)e^x$, considerando la ecuación diferencial donde se sustituirán las derivadas, y al quedar una igualdad se obtienen dichos valores.

$$\left\{\begin{array}{c} Y_p = (Ax^2 + Bx^3)e^x \\ Y'_p = A(x^2e^x + 2xe^x) + B(3x^2e^x + x^3e^x) = Ax^2e^x + 2Axe^x + 3Bx^2e^x + Bx^3e^x \\ Y''_p = A\big(2xe^x + x^2e^x + 2(e^x + xe^x)\big) + B\big(3(x^2e^x + 2xe^x) + (3x^2e^x + x^3e^x)\big) = \\ = A(2xe^x + x^2e^x + 2e^x + 2xe^x) + B(3x^2e^x + 6xe^x + 3x^2e^x + x^3e^x) \\ = 4Axe^x + Ax^2e^x + 2Ae^x + 6Bx^2e^x + 6Bxe^x + Bx^3e^x \end{array}\right\}$$

P6. Luego, sustituir en la ecuación diferencial:

$y'' - 2y' + y = xe^x$ se tiene:

$4Axe^x + Ax^2e^x + 2Ae^x + 6Bx^2e^x + 6Bxe^x + Bx^3e^x - 2(Ax^2e^x + 2Axe^x + 3Bx^2e^x + Bx^3e^x) + Ax^2e^x + Bx^3e^x = xe^x$

$$4Axe^x + Ax^2e^x + 2Ae^x + 6Bx^2e^x + 6Bxe^x + Bx^3e^x - 2Ax^2e^x - 4Axe^x - 6Bx^2e^x - 2Bx^3e^x + Ax^2e^x + Bx^3e^x = xe^x$$

$$2Ae^x + 6Bxe^x = xe^x$$

resolviendo esta igualdad:

$$6Bx + 2A = x$$

Se obtiene:

$$\left\{\begin{array}{l} 6B = 1 \rightarrow B = \dfrac{1}{6} \\ 2A = 0 \rightarrow A = 0 \end{array}\right\}$$

Por tanto, la solución particular es:

$$Y_p = (Ax^2 + Bx^3)e^x$$

$$Y_p = (0 * x^2 + \frac{1}{6}x^3)e^x$$

$$Y_p = \frac{x^3e^x}{6}$$

P7. Finalmente, la solución general es: $Y_G = Y_h + Y_p = C_1e^x + C_2e^{2x} + \frac{x^3e^x}{6}$

EJERCICIO RESUELTO 3

Hallar la solución de la siguiente ecuación diferencial:

$$y''' + y'' = 3e^x + 4x^2$$

Solución:

Se analiza la solución homogénea, partiendo de la ecuación diferencial homogénea relacionada $y''' + y'' = 0$.

P1. Obteniendo la solución Y_h y construyendo la ecuación característica:

$$\lambda^3 + \lambda^2 = 0$$

P2. Resolver:

$$\lambda^3 + \lambda^2 = 0 \rightarrow$$

$$\lambda^2(\lambda + 1) = 0 \rightarrow$$

$$\lambda_1 = 0; \lambda_2 = 0\,; \lambda_3 = -1$$

P3. La solución homogénea es:

$$Y_h = C_1 + C_2x + C_3e^{-x}$$

P4. Analizando $R(x) = 3e^x + 4x^2$, si se compara se observa que en la y_h y y_p se repite un valor $y_p = Ae^x + (B + Cx + Dx^2)$; estos son $C_1 = B; C_2x = Cx$, ya no puede ser utilizada y_p, por lo que para evitar la redundancia se multiplica por un valor de x hasta que se pierda la repetición de respuestas, siendo la nueva solución particular de la forma $y_p = Ae^x + x^2(B + Cx + Dx^2)$.

Y con esto se procede de manera similar a lo estudiado en el caso I.

P5. Para sacar los valores de A se deriva:

$$Y_p = Ae^x + x^2(B + Cx + Dx^2)$$

Considerando la ecuación diferencial donde se sustituirán las derivadas y al quedar una igualdad se obtienen dichos valores:

$$\left\{\begin{array}{c} Y_p = Y_p = Ae^x + x^2(B + Cx + Dx^2) \\ Y'_p = Ae^x + 2Bx + 3Cx^2 + 4Dx^3 \\ Y''_p = Ae^x + 2B + 6Cx + 12Dx^2 \\ Y'''_p = Ae^x + 6C + 24Dx \end{array}\right\}$$

P6. Sustituyendo en la ecuación diferencial:

$$y''' + y'' = 3e^x + 4x^2$$

$$Ae^x + 6C + 24Dx + Ae^x + 2B + 6Cx + 12Dx^2 = 3e^x + 4x^2$$

$$2Ae^x + +(24Dx + 6Cx) + (2B + 6C) + 12Dx^2 = 3e^x + 4x^2$$

$$\left\{\begin{matrix} 2A = 3 \\ 24D + 6C = 0 \\ 2B + 6C = 0 \\ 12D = 4 \end{matrix}\right\} \to \left\{\begin{matrix} A = \frac{3}{2} \\ C = -4D \\ B = -3C \\ D = \frac{1}{3} \end{matrix}\right\} \to \left\{\begin{matrix} A = \frac{3}{2} \\ C = -\frac{4}{3} \\ B = -4 \\ D = \frac{1}{3} \end{matrix}\right\}$$

Por tanto, la solución particular es:

$$Y_p = Ae^x + x^2(B + Cx + Dx^2)$$

$$Y_p = \frac{3}{2}e^x + x^2(-4 - \frac{4}{3}x + \frac{1}{3}x^2)$$

P7. Y la solución general es: $Y_G = Y_h + Y_p = C_1 + C_2x + C_3e^{-x} + \frac{3}{2}e^x + x^2(-4 - \frac{4}{3}x + \frac{1}{3}x^2)$

NOTA: Para generalizar se considera las siguientes recomendaciones.

- Cuando el lado derecho es un polinomio, por ejemplo:

$$y'' + 6y' + 13y = 2x + 1$$

Su solución homogénea está dada por:

$$y_h = C_1 + C_2x + C_3x^3 + C_4x^4$$

Comparando $R(x)$ con y_h para ver si no se repiten algún valor entre ellas, y así plantear la solución particular considerando que es un polinomio de primer grado $y_p = A + Bx$, permite ver que con $y_h = C_1 + C_2x + C_3x^3 + C_4x^4$ se repite $A + Bx$ con $C_1 + C_2x$, multiplicando y_p por x; es decir, $y_p = (A + Bx)x = Ax + Bx^2$ si se compara se observa que se continúa con el mismo problema, por lo que este proceso debe repetirse hasta lograr que sean diferentes, por lo que se recomienda multiplicar por un grado mayor a la homogénea; es decir, $y_p = (A + Bx)x^5$ y se procede como ya se indicó en los problemas anteriores.

- Cuando el lado derecho es exponencial se debe suponer que:

$$y'' + 6y' + 13y = e^{2x} - xe^{2x} + 4e^{3x}$$

y su solución homogénea está dado por:

$$y_h = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x} + e^{4x}$$

Comparando $R(x)$ con y_h para ver si no se repite algún valor entre ellas, y así se plantea la solución particular considerando que es una función polinomial y exponencial $y_p = (A + Bx)e^{2x} + Ce^{3x}$, permite ver que con la solución homogénea $y_h = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x} + e^{4x}$, se repite $Ae^{2x} + Bxe^{2x}$ con las soluciones $C_1e^{2x} + C_2xe^{2x}$, multiplicando y_p por x^2 ; es decir, $y_p = x^2(A + Bx)e^{2x} + Ce^{3x}$ y puede resolverse el problema.

ACTIVIDAD 19

1. Resolver $y'' - 3y' + 2y = 2x + e^{4x}$
Sugerencia para $R(x) = 2x$, emplee el polinomio $A + Bx$; $R(x) = e^{4x}$ emplee Ce^{4x}: es decir $Y_p = A + Bx + Ce^{4x}$, o resolver primero el polinomio luego la exponencial.

2. Resolver $y'' - 3y' + 2y = 5cos2x - e^x$
Sugerencia para $R(x) = 5cos2x$ emplee $Asen2x + Bcos2x$; $R(x) = e^x$ emplee Ce^x: es decir $Y_p = Asen2x + Bcos2x + Ce^x$, o resolver primero el polinomio luego la exponencial.

3. Resolver $y'' - 3y' + 2y = x^2e^{6x}$
Sugerencia para $R(x) = x^2e^{6x}$ emplee $y_p = (A + Bx + Cx^2)e^{6x}$

4. Resolver $y'' - 3y' + 2y = x^3sen3x$
Sugerencia para $R(x) = x^3sen3x$ emplee
$y_p = (A + Bx + Cx^2 + Dx^3)sen3x + (E + Fx + Gx^2 + Hx^3)cos3x$

5. Resolver $y'' - 3y' + 2y = sen(5x)e^{-2x}$.
Sugerencia para $R(x) = sen(5x)e^{-2x}$ emplee $y_p = (Asen5x + Bcos5x)e^{-2x}$

6. Resolver $y'' - 3y' + 2y = 3x^2(sen6x)e^{5x}$
Sugerencia para $R(x) = 3x^2(sen6x)e^{5x}$ emplee
$y_p = (A + Bx + Cx^2)sen3x.e^{5x} + (D + Ex + Fx^2)cos3x.e^{5x}$

7. Resolver $y'' - 3y' + 2y = cos2xe^x - 3x^2senx$
Sugerencia para $R(x) = cos2xe^x - 3x^2senx$ emplee
$y_p = (Asen2xe^x + Bcos2xe^x) + (C + Dx + Ex^2)senx + (F + Gx + Hx^2)cosx$

8. Resolver $y'' - 4y' + 4y = 2x - sen2x$

9. Resolver $y'' - 4y' + 4y = x^2 + x$
   Resp. $y_G = y_h + y_p = C_1e^{2x} + C_2e^{3x} + \frac{x^2}{5} + \frac{4x}{9} + \frac{17}{54}$

10. Resolver $y'' + 4y' + 3y = 5e^{2x}$
   Resp. $y_G = y_h + y_p = C_1e^{-x} + C_2e^{-3x} + \frac{e^{2x}}{3}$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Resolver $y'' + 6y' + 13y = e^{-3x}cos2x$
   Sugerencia para $Y_p = (Asen2x + Bcos2x)xe^{-3x}$ manifieste que pasó con Y_h y Y_p al momento de la resolución.

2. Resolver la ecuación $y'' + y' = senx$

3. Resolver $y^{(4)} - 2y'' + y = xe^x$, sugerencia $Y_p = (Ax^3 + Bx^2)e^x$,
   Resp. $y = C_1e^x + C_2xe^x + C_3e^{-x} + C_4xe^{-x} + \left(-\frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{24}\right)e^x$

4. Resolver $y'' + y' + y = e^x(x + x^2)$
   Resp. $y = C_1e^{-\frac{x}{2}}cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2e^{-\frac{x}{2}}sen\frac{\sqrt{3}}{2}x + \left(\frac{x^2}{3} - \frac{x}{3} + \frac{1}{3}\right)e^x$

5. Resolver $y'' + 2y' + 5y = e^{-x}sen2x$
   Resp. $y = C_1e^{-x}cos2x + C_2e^{-x}sen2x - \frac{xe^{-x}}{4}cos2x$

6.6 Método de variación de parámetro

Se considerará una ecuación diferencial no homogénea de coeficientes constantes, a la ecuación con la forma:

$$a_n(x)y^n + a_{n-1}(x)y^{n-1} + a_{n-2}(x)y^{n-2} \ldots . a_1y' + a_0y = R(x) \quad (1)$$

donde se tiene, $a_0 \ldots a_n$ son constantes y $f(x)$ es una función sólo de "x" o constante.

Para entender mejor se considera una ecuación diferencia de tercer orden:

$$a_3y''' + a_2y'' + a_1y' + a_0y = f(x)$$

Suponiendo que la solución general de la ecuación diferencial homogénea es:

$$y_h = C_1y_1 + C_2y_2 + C_3y_3$$

luego la solución particular de la ecuación (1) es:

$$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2 + u_3 y_3$$

donde u_1, u_2, u_3 son funciones incógnitas que satisfacen a las condiciones siguientes:

$$\left\{\begin{array}{c} u_1' y_1 + u_2' y_2 + u_3' y_3 = 0 \\ u_1' y_1' + u_2' y_2' + u_3' y_3' = 0 \\ u_1' y_1'' + u_2' y_2'' + u_3' y_3'' = f(x) \end{array}\right\} \qquad (2)$$

La ecuación (2) es un sistema de ecuaciones en u_1', u_2', u_3', el método de parametrización consiste en (Zill, 2009; Castro, 2022):

1. Escribir la solución general de la ecuación diferencial homogénea:

$$y_h = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3$$

2. Remplazar C_1, C_2, C_3 por las funciones incógnitas u_1, u_2, u_3, obteniendo la solución particular de la ecuación (1)

$$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2 + u_3 y_3$$

3. Formar el sistema bajo las condiciones de la ecuación (2).

4. Por medio de integración se obtiene u_1, u_2, u_3.

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Resolver la ecuación diferencial siguiente $\frac{d^2y}{dx^2} + y = cscx$.

Solución:

P1. Hallar la solución general de la ecuación homogénea para esto se tiene que estudiar el polinomio característico:

$$r = y'$$

$$p(r) = r^2 + 1 = 0$$

$$r^2 = -1$$

$$r = \sqrt{-1} = \sqrt{i^2}$$

$$r_1 = i;\ r_2 = -i$$

$$r_1 = 0 + i;\ r_2 = 0 - i$$

$$y_h = Ae^{\alpha x}cos\beta x + Be^{\alpha x}sen\beta x$$

$$y_h = Ae^{0x}cosx + Be^{0x}senx$$

$$y_h = Acosx + Bsenx$$

P2. Se cambia de nomenclatura:

$$y_h = C_1cosx + C_2senx$$

Y se establece la solución particular:

$$y_p = u_1cosx + u_2senx$$

P3. Construyendo el sistema de parametrización:

$$\begin{array}{ccc} Col1 & Col2 & Col3 \end{array}$$

$$\begin{Bmatrix} u_1'cosx + u_2'senx = 0 \\ -u_1'senx + u_2'cosx = cscx \end{Bmatrix}$$

P4. Determinando las soluciones u_1', u_2'. Por el método de determinantes:

$$u_1' = \frac{|Col3 \quad Col2|}{|Col1 \quad Col2|}$$

$$u_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & senx \\ cscx & cosx \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} cosx & senx \\ -senx & cosx \end{vmatrix}} = \frac{0 - senx * cscx}{cos^2x + sen^2x}$$

$$u_1' = \frac{0 - senx * \frac{1}{senx}}{1} = \frac{0-1}{1} = -1$$

Integrando esta función:

$$\int u_1' = -1\int dx$$

$$u_1 = -x$$

De igual manera la otra función u_2:

$$u_2' = \frac{|Col1 \quad Col3|}{|Col1 \quad Col2|}$$

$$u_2' = \frac{\begin{vmatrix} cosx & 0 \\ -senx & cscx \end{vmatrix}\begin{matrix} - \\ + \end{matrix}}{\begin{vmatrix} cosx & senx \\ -senx & cosx \end{vmatrix}\begin{matrix} - \\ + \end{matrix}} = \frac{cosx.cscx + 0}{cos^2x + sen^2x} = \frac{\frac{cosx}{senx}}{1} = ctgx$$

Integrando la función:

$$\int u_2' = \int ctgxdx$$
$$\int u_2' = \int \frac{cosxdx}{senx}$$

Sustituyendo una nueva variable:

$$u = senx: \;\; du = cosxdx$$

$$u_2 = \int \frac{du}{u}$$

$$u_2 = lnu$$

Sustituyendo el valor de u:

$$u_2 = \ln(senx)$$

Sustituyendo en la solución particular:

$$y_p = u_1 cosx + u_2 senx$$

$$y_p = -xcosx + (\ln(senx)) * senx$$

P5. Por tanto, la ecuación general es:

$$y_G = y_h + y_p = C_1 cosx + C_2 senx - xcosx + (\ln(senx))senx$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Resolver la ecuación diferencial siguiente $y'' + 4y = 4sec^2x$.

Resp: $\left\{\begin{matrix} y_h = C_1 cos2x + C_2 sen2x \\ y_p = 4cos2x.\ln(cosx) + (4x - 2tgx)sen2x \\ y = y_h + y_p \end{matrix}\right\}$

2. Resolver la ecuación diferencial siguiente $\frac{d^2y}{dx^2} + y = sec^2x$.

Resp: $\left\{\begin{matrix} y_g = C_1cosx + C_2senx \\ y_p = -1 + senx.\ln(secx + tgx) + (4x - 2tgx)sen2x \\ y = y_g + y_p \end{matrix}\right\}$

3. Resolver la ecuación diferencial siguiente $\frac{d^2y}{dx^2} + y = cscx.tgx$.

Resp: $\left\{\begin{matrix} y_g = C_1cosx + C_2senx \\ y_p = -cosx.\ln(senx) - (ctgx + x)senx \\ y = y_g + y_p \end{matrix}\right\}$

CASO 4. CAUCHY-EULER

Es de la forma $ax^2y'' + bxy' + cy = 0$, para resolverlas se debe hacer hincapié que tiene una solución de la forma $y = x^r$, donde r no necesariamente es un entero, por esta aclaración se debe restringir el dominio; es decir, $x > 0$ con esto se evita la división para cero y las raíces negativas. Se debe considerar también los tres tipos de soluciones (Zill, 2009):

1. Raíces distintas:

$$y_1 = x^{r_1};\ \ y_2 = x^{r_2}$$

Se debe determinar un conjunto fundamental de soluciones. Wronskiano es:

$$W(x^{r_1}, x^{r_2}) = \begin{vmatrix} x^{r_1} & x^{r_2} \\ r_1x^{r_1-1} & r_2x^{r_2-1} \end{vmatrix} = x^{r_1}r_2x^{r_2-1} - x^{r_2}r_1x^{r_1-1} \neq 0$$

Como el determinante es distinto de cero, la solución es:

$$y(x) = C_1x^{r_1} + C_2x^{r_2}$$

2. Raíces iguales:

$$y(x) = C_1x^{r_1} + C_2x^{r_1}lnx$$

3. Raíces complejas y conjugadas:

$$y(x) = x^{\alpha}\left[C_1cos\big(\beta ln(x)\big) + C_2sen\big(\beta ln(x)\big)\right]$$

EJERCICIO RESUELTO

1. Hallar la solución de $x^2y'' + xy' - 9y = 0$

Solución

Partiendo de la ecuación diferencial homogénea relacionada $x^2y'' + xy' - 9y = 0$.

P1. Estableciendo la condición $y = x^r, x > 0$ y de acuerdo con la ecuación diferencial realizar la derivada.

P2. Derivando la condición:

$$\left\{\begin{matrix} y = x^r \\ y' = rx^{r-1} \\ y'' = r(r-1)x^{r-2} \end{matrix}\right\}$$

P3. Sustituyendo en la ecuación diferencial: $x^2y'' + xy' - 9y = 0$; es decir:

$$x^2r(r-1)x^{r-2} + xrx^{r-1} - 9x^r = 0$$

P4. Operando la parte exponencial:

$$r(r-1)x^{r-2+2} + rx^{r-1+1} - 9x^r = 0$$

$$r(r-1)x^r + rx^r - 9x^r = 0$$

Factorando la ecuación:

$$(r^2 - r + r - 9)x^r = 0$$

$$(r^2 - 9 = 0 \rightarrow (r-3)(r+3) = 0$$

$$r_1 = 3\ ;\ o;\ r_2 = -3$$

P5. Sustituyendo estos valores en $y = x^r$ se tiene:

$$y_1 = x^3, y_2 = x^{-3}$$

que son las funciones L.I, con esto se escribe la solución:

$$Y_h = C_1y_1 + C_2y_2$$

$$Y_h = C_1x^3 + C_2x^{-3}$$

2. Hallar la solución de $x^2y'' - 6y = 0$.

Solución:

Partiendo de la ecuación diferencial homogénea relacionada $x^2y'' - 6y = 0$.

P1. Estableciendo la condición $y = x^r$ y de acuerdo con la ecuación diferencial realizar la derivada.

P2. Derivar la condición.

$$\left\{\begin{matrix} y = x^r \\ y' = rx^{r-1} \\ y'' = r(r-1)x^{r-2} \end{matrix}\right\}$$

P3. Sustituyendo en $x^2y'' - 6y = 0$, es decir.

$$x^2r(r-1)x^{r-2} - 6x^r = 0$$

P4. Operando la parte exponencial:

$$r(r-1)x^{r-2+2} - 6x^r = 0$$

$$r(r-1)x^r - 6x^r = 0$$

P5. Resolviendo el polinomio característico eliminando x^r.

$$(r^2 - r - 6)x^r = 0$$

$$(r^2 - r - 6) = 0$$

$$(r^2 - r - 6 = 0 \rightarrow (r-3)(r+2) = 0$$

$$r_1 = 3\ ;\ o\ ;\ r_2 = -2$$

P6. Sustituyendo estos valores de las raíces en $y = x^r$:

$$y_1 = x^3, y_2 = x^{-2}$$

que son las funciones L.I., con esto se obtiene la solución:

$$Y_h = C_1x^3 + C_2x^{-2}$$

3. Hallar la solución de: $x^2y'' + 3xy' + y = 0$.

Solución:

Partir de la ecuación diferencial homogénea relacionada $x^2y'' + 3xy' + y = 0$.

P1. Establecer la condición $y = x^r$ y de acuerdo con la ecuación diferencial derivar.

P2. Derivar la condición:

$$\begin{Bmatrix} y = x^r \\ y' = rx^{r-1} \\ y'' = r(r-1)x^{r-2} \end{Bmatrix}$$

P3. Sustituir en $x^2y'' + 3xy' + y = 0$ es decir:

$$x^2r(r-1)x^{r-2} + 3xrx^{r-1} + x^r = 0$$

P4. Operar la parte exponencial:

$$r(r-1)x^{r-2+2} + 3rx^r + x^r = 0$$

$$r(r-1)x^r + 3rx^r + x^r = 0$$

P5. Resolver el polinomio característico eliminando x^r:

$$(r^2 - r + 3r + 1)x^r = 0$$

$$(r^2 + 2r + 1) = 0$$

$$(r+1)(r+1) = 0$$

$$r_1 = -1\ ;\ o\ ;\ r_2 = -1$$

P6. Sustituir estos valores de las raíces en $y = x^r$, pero $r_1 = r_2$:

$$y_1 = x^{-1}, y_2 = x^{-1}$$

que son las funciones L:D con esto se obtiene la solución:

$$Y_h = C_1x^{-1} + C_2x^{-1}lnx$$

$$Y_h = \frac{1}{x}(C_1 + C_2lnx)$$

4. Hallar la solución de: $3x^2y'' + 6xy' + y = 0$.

Solución:

Partir de la ecuación diferencial homogénea relacionada $3x^2y'' + 6xy' + y = 0$.

P1. Establecer la condición $y = x^r$ y de acuerdo con la ecuación diferencial derivar.

P2. Derivar la condición:

$$\left\{\begin{matrix} y = x^r \\ y' = rx^{r-1} \\ y'' = r(r-1)x^{r-2} \end{matrix}\right\}$$

P3. Sustituir en $3x^2y'' + 6xy' + y = 0$ es decir:

$$3x^2r(r-1)x^{r-2} + 6xrx^{r-1} + x^r = 0$$

P4. Operar la parte exponencial:

$$3r(r-1)x^{r-2+2} + 6rx^r + x^r = 0$$

$$3r(r-1)x^r + 6rx^r + x^r = 0$$

P5. Resolver el polinomio característico eliminando x^r:

$$(3r^2 - 3r + 6r + 1)x^r = 0$$

$$(3r^2 + 3r + 1) = 0$$

P6. Aplicar la ecuación cuadrática; $a = 3; b = 3; c = 1$:

$$r = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$r = \frac{-3 \pm \sqrt{(3)^2 - 4 * 3 * 1}}{2 * 3}$$

$$r = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 12}}{6}$$

$$r = \frac{-3 \pm \sqrt{3}i}{6}$$

$$r = -\frac{3}{6} \pm \frac{\sqrt{3}i}{6}$$

$$r = -\frac{1}{2} \pm \frac{i}{2\sqrt{3}}$$

P7. Sustituir estos valores de las raíces en $y = x^r$:

$$y_1 = x^{-\frac{1}{2}+\frac{i}{2\sqrt{3}}}, y_2 = x^{-\frac{1}{2}-\frac{i}{2\sqrt{3}}}$$

P8. Determinar los valores real e imaginario:

$$\alpha = -\frac{1}{2};\ \beta = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

P9. Finalmente, se obtiene la solución:

$$y(x) = x^{\alpha}\left[C_1 cos\big(ln(x)\big) + C_2 sen\big(\beta ln(x)\big)\right]$$

$$y(x) = x^{-\frac{1}{2}}\left[C_1 cos\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}ln(x)\right) + C_2 sen\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}ln(x)\right)\right]$$

ACTIVIDAD 20

1. Resolver $2x^2y'' - xy' - 2y = 0$
2. Resolver $x^2y'' + xy' - 2y = 0$
3. Resolver $x^2y'' - 5xy' + 13y = 0$
4. Resolver $x^2y'' + xy' + y = 0$
5. Resolver $4x^2y'' - 8xy' + 9y = 0$

EJERCICIOS PROPUESTOS

6. Resolver $x^3y''' + 4x^2y'' - 4xy' = 0.$
7. Resolver $x^3y''' + 2x^2y'' + xy' - y = 0.$
8. Resolver $x^2y'' + xy' - 9y = 0;$ con valor inicial $y(1) = 1; y'(1) = 0.$
9. Resolver $x^2y'' + xy' + y = 0;$ con valor inicial $y(1) = 2; y'(1) = 5.$
10. Resolver $x^2y'' - xy' + y = 0;$ con valor inicial $y(1) = 2; y'(1) = 5.$

6.7 Ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas por Euler

Son de la forma:

$$ax^2y'' + bxy' + cy = R(x)$$

para resolverlas se debe hacer hincapié que tiene una solución y_h que se encuentra de

$$ax^2y'' + bxy' + cy = 0$$

y una solución y_p particular que se determina por parámetros en función de la solución homogénea. Para una mejor interpretación obsérvese si se tiene:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \quad (*) \qquad y \qquad y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad (**)$$

Se calcula la y_h y se supone que es $y_h = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$.

Sacando la solución particular tomando como referencia la ecuación homogénea, las constantes se reemplazan por la función $y_p = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)$, si se calcula la derivada de esta solución particular se tiene:

$$y_p' = u_1'y_1 + u_1y_1' + u_2'y_2 + u_2y_2'$$

la segunda derivada es más larga, por lo que se escriben unas condiciones a u_1, u_2 para proceder a hallar la segunda derivada:

1. $u'_1y_1 + u'_2y_2 = 0$
2. $u_1y_1 + u_2y_2 = 0$ satisface la ecuación diferencial

Con estas condiciones se establece:

$$y_p' = u_1y_1' + u_2y_2'$$

Determinando la segunda derivada:

$$y''_p = u'_1y'_1 + u_1y''_1 + u'_2y'_2 + u_2y''_2$$

Sustituyendo en la ED:

$$u'_1y'_1 + u_1y''_1 + u'_2y'_2 + u_2y''_2 + p(u_1y'_1 + u_2y'_2) + q(u_1y_1 + u_2y_2) = f(x)$$

Agrupando o factorizando u_1, u_2 queda:

$$u_1(y''_1 + py'_1 + qy_1) + u_2(y''_2 + py'_2 + qy_2) + u'_1y'_1 + u'_2y'_2 = f(x)$$

Se conoce que:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

que es solución de la ED homogénea, esto reduce a:

$$u'_1y'_1 + u'_2y'_2 = f(x)$$

Esto lleva a construir el sistema a resolver:

$$\begin{array}{ccc} C_1 & C_2 & C_3 \end{array}$$
$$\begin{Bmatrix} u'_1y_1 + u'_2y_2 = 0 \\ u'_1y'_1 + u'_2y'_2 = f(x) \end{Bmatrix}$$

Resolviendo por determinantes, aplicando la regla de Crammer:

$$\left\{\begin{array}{l} u'_1 = \frac{32}{12} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y'_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix}} \\ u'_2 = \frac{13}{12} = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y'_1 & f(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix}} \end{array}\right\}$$

recordando que el determinante principal $\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix} = W$ (Wronskiano), es decir:

$$\left\{\begin{array}{l} u'_1 = \frac{-y_2 f(x)}{W} \\ u'_2 = \frac{y_1 f(x)}{W} \end{array}\right\}$$

integrando las funciones incógnitas se tiene:

$$\left\{\begin{array}{l} u_1 = -\int \frac{y_2 f(x)}{W} dx \\ u_2 = \int \frac{y_1 f(x)}{W} dx \end{array}\right\}$$

NOTA: Para realizar el cálculo y_p en un sólo paso sin tener que realizar el proceso:

$$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2$$

Se aplica el cálculo.

$$\left\{\begin{array}{l} u_1 = -y_1 \int \frac{y_2 f(x)}{W} dx \\ u_2 = y_2 \int \frac{y_1 f(x)}{W} dx \end{array}\right\} \rightarrow y_p = u_1 + u_2$$

Por tanto $y = y_h + y_p$.

NOTA: Este proceso sirve solo para ecuaciones de orden 2.

OBSERVACIÓN: Para el orden 3 y 4 se construyen determinantes de ese orden.

EJERCICIO RESUELTO

1. Hallar la solución de $y'' + y = sec^2 x$

Solución:

Partiendo de la ecuación diferencial homogénea relacionada:

$$y'' + y = 0$$

P1. Establecer la condición $y' = \lambda$

P2. Factorando el polinomio característico:

$$\begin{Bmatrix} \lambda^2 + 1 = 0 \\ \lambda^2 = -1 \\ \lambda_1 = 0 + i;\ \lambda_2 = 0 - i \end{Bmatrix}$$

De la solución de sus raíces se obtiene el valor $\alpha = 0;\ \beta = 1$

P3. Escribir la solución homogénea:

$$y_h = C_1 e^{\alpha x} sen\beta x + C_2 e^{\alpha x} cos\beta x$$

sustituyendo los valores:

$$y_h = C_1 e^{0x} sen(1)x + C_2 e^{0x} \cos(1)\, x$$

$$y_h = C_1 senx + C_2 cosx$$

P4. Estableciendo la solución particular cambiando las constantes de la ecuación homogénea por una función, como se definió en la teoría $y_p = u_1 senx + u_2 cosx$, que es el método de variación de parámetro.

P5. Aplicando las ecuaciones determinadas:

$$\begin{Bmatrix} u_1 = \int \dfrac{-y_2 f(x)}{W} dx \\ u_2 = \int \dfrac{y_1 f(x)}{W} dx \end{Bmatrix}$$

Para facilitar su aplicación, se calcula primero el Wroskiano:

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix}$$

$$W = \begin{vmatrix} senx & cosx \\ cosx & -senx \end{vmatrix}\begin{matrix} - \\ + \end{matrix} = -sen^2x - cos^2x$$

$$W = -(sen^2x + cos^2x) = -1$$

Sustituyendo los valores en el paso P5 inicial:

$$\begin{Bmatrix} u_1 = \int \frac{-cosx.sec^2x}{-1} dx \\ u_2 = \int \frac{senx.sec^2x}{-1} dx \end{Bmatrix} \to \begin{Bmatrix} u_1 = \int cosx.sec^2x\,dx \\ u_2 = -\int senx.sec^2x\,dx \end{Bmatrix} \to$$

$$\begin{Bmatrix} u_1 = \int cosx.sec^2x\,dx \\ u_2 = -\int senx.secx.secx\,dx \end{Bmatrix} \to \begin{Bmatrix} u_1 = \int \frac{1}{secx}.sec^2x\,dx \\ u_2 = -\int \frac{senx}{cosx}.secx\,dx \end{Bmatrix} \to$$

$$\begin{Bmatrix} u_1 = \int secx.dx \\ u_2 = -\int tanx.secx\,dx \end{Bmatrix} \to \begin{Bmatrix} u_1 = ln|secx + tanx| \\ u_2 = -secx \end{Bmatrix}$$

Por lo tanto, la solución particular queda expresada como:

$$y_p = u_1senx + u_2cosx$$

$$y_p = (ln|secx + tanx|)senx - secxcosx$$

$$y_p = (ln|secx + tanx|)senx - 1$$

P6. Estableciendo la solución general $y_g = y_h + y_p$, es igual a:

$$y_g = C_1senx + C_2cosx + (ln|secx + tanx|)senx - 1$$

2. Hallar la solución de $x^2y'' - 2xy' + 2y = x^2$.

Solución:

Partiendo de la ecuación diferencial homogénea relacionada:

$$x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$$

P1. Estableciendo la condición $y = x^r$ y de acuerdo con la ecuación diferencial derivada, este es el proceso de Caushy-Euler:

P2. Derivando $y = x^r$, hasta la segunda derivada:

$$\begin{Bmatrix} y = x^r \\ y' = rx^{r-1} \\ y'' = r(r-1)x^{r-2} \end{Bmatrix}$$

P3. Sustituyendo en la ecuación diferencial:

$$x^2(r(r-1)x^{r-2}) - 2x(rx^{r-1}) + 2x^r = 0$$

$$(r(r-1)x^{r-2+2}) - 2(rx^{r-1+1}) + 2x^r = 0$$

P4. Resolviendo la ecuación:

$$(r(r-1)x^r) - 2(rx^r) + 2x^r = 0$$

Factorando y simplificando la ecuación, se halla el polinomio característico:

$$x^r(r^2 - r - 2r + 2) = 0$$

$$\begin{Bmatrix} (r^2 - 3r + 2) = 0 \\ (r-2)(r-1) = 0 \\ r_1 = 2;\ r_2 = 1 \end{Bmatrix}$$

P5. La solución homogénea sustituye el valor $y = x^r$

$$y_1 = x;\ y_2 = x^2$$

$$y_h = C_1x + C_2x^2$$

P6. Determinando la solución particular, realizando una estructura similar a la y_h, pero cambiando las constantes por funciones, es decir:

$$\begin{Bmatrix} y_p = u_1x + u_2x^2 \\ y_1 = x \\ y_2 = x^2 \end{Bmatrix}$$

P7. Encontrando u_1, u_2, aplicando el método de la parametrización:

$$\begin{Bmatrix} u_1 = \int \dfrac{-y_2f(x)}{W}dx \\ u_2 = \int \dfrac{y_1f(x)}{W}dx \end{Bmatrix}$$

Determinando el valor de $f(x) = \frac{x^2}{x^2} = 1$, que es el resultado de dividir:

$$f(x) = \frac{R(x)}{coeficiente\ de\ la\ mayor\ derivada}$$

Calculando el Wroskiano:

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix}$$

$$W = \begin{vmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} \begin{matrix} - \\ + \end{matrix}$$

$$W = 2x^2 - x^2 = x^2$$

$$\left\{ \begin{matrix} u_1 = \int \dfrac{-x^2 * 1}{x^2} dx \\ u_2 = \int \dfrac{x * 1}{x^2} dx \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} u_1 = -\int dx \\ u_2 = \int \dfrac{dx}{x} \end{matrix} \right\}$$

$$\left\{ \begin{matrix} u_1 = -x \\ u_2 = lnx \end{matrix} \right\}$$

Por tanto, la solución particular queda:

$$y_p = u_1 x + u_2 x^2$$

$$y_p = (-x)x + lnx.x^2$$

$$y_p = -x^2 + x^2 lnx$$

Y la solución general es:

$$y_g = y_h + y_p = C_1 x + C_2 x^2 - x^2 + x^2 lnx.$$

NOTA: Si se reducen los términos semejantes, $C_2 x^2 - x^2 = C_2 x^2$, la solución final se escribe:

$$y_g = y_p + y_h = C_1 x + C_2 x^2 + x^2 lnx.$$

3. Hallar la solución de $x^2 y'' + xy' - y = 4x.lnx$

Solución:

Partiendo de la ecuación diferencial homogénea relacionada:

$$x^2 y'' + xy' - y = 0$$

P1. Estableciendo la condición $y = x^r$ y de acuerdo con la ecuación diferencial derivada, este es el proceso de Caushy-Euler.

P2. Derivando el valor $y = x^r$, hasta la máxima derivada de la ecuación diferencial:

$$\left\{ \begin{matrix} y = x^r \\ y' = rx^{r-1} \\ y'' = r(r-1)x^{r-2} \end{matrix} \right\}$$

P3. Sustituyendo en la ecuación diferencial:

$$x^2(r(r-1)x^{r-2}) + x(rx^{r-1}) - x^r = 0$$

$$(r(r-1)x^{r-2+2}) + (rx^{r-1+1}) - x^r = 0$$

P4. Resolviendo la ecuación resultante:

$$(r(r-1)x^r) + (rx^r) - x^r = 0$$

Factorando:

$$x^r(r^2 - r + r - 1) = 0$$

$$\left\{\begin{matrix} (r^2-1) = 0 \\ (r+1)(r-1) = 0 \\ r_1 = -1;\ r_2 = 1 \end{matrix}\right\}$$

P5. La solución homogénea, sustituye el valor $y = x^r$

$$y_2 = x^{-1}; y_1 = x$$

$$y_h = C_1 x + C_2 x^{-1}$$

P6. Determinando la solución particular, realizando una estructura similar a la y_h, pero cambiando las constantes por funciones, es decir:

$$\left\{\begin{matrix} y_p = u_1 x + u_2 x^{-1} \\ y_1 = x \\ y_2 = x^{-1} \end{matrix}\right\}$$

P7. Encontrar u_1, u_2, aplicando el método de la parametrización:

$$\left\{\begin{matrix} u_1 = \int \frac{-y_2 f(x)}{W} dx \\ u_2 = \int \frac{y_1 f(x)}{W} dx \end{matrix}\right\}$$

Determinando el valor de $f(x) = \frac{4x.lnx}{x^2} = \frac{4lnx}{x}$ que es el resultado de dividir:

$$f(x) = \frac{R(x)}{coeficiente\ de\ la\ mayor\ derivada}$$

Calculando el Wronskiano:

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

$$W = \begin{vmatrix} x & x^{-1} \\ 1 & -x^{-2} \end{vmatrix} \begin{matrix} - \\ + \end{matrix}$$

$$W = -x * x^{-2} - x^{-1} = -x^{-2+1} - x^{-1} = -x^{-1} - x^{-1}$$

$$W = -2x^{-1}$$

$$\left\{ \begin{matrix} u_1 = -\int \dfrac{x^{-1}\left(\dfrac{4lnx}{x}\right)}{-2x^{-1}} dx \\ u_2 = \int \dfrac{x\left(\dfrac{4lnx}{x}\right)}{-2x^{-1}} dx \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} u_1 = 2\int \dfrac{lnx}{x} dx \\ u_2 = -2\int xlnx\, dx \end{matrix} \right\}$$

Resolviendo por separado cada integral:

$$u_2 = -2\int x.lnx.dx$$

por partes, usando ILATE:

$$\left\{ \begin{matrix} u = lnx & dv = xdx \\ du = \dfrac{dx}{x} & v = \dfrac{x^2}{2} \end{matrix} \right\}$$

$$-2\int x.lnx.dx = u.v - \int v.du = -2\left[\frac{x^2.lnx}{2} - \int \frac{x^2}{2}.\frac{dx}{x}\right]$$

Resolviendo la última integral:

$$-2\left[\frac{x^2.lnx}{2} - \int \frac{x^2}{2}.\frac{dx}{x}\right] = -x^2.lnx + \int x.dx = -x^2.lnx + \frac{x^2}{2}$$

Es decir, la solución es:

$$u_2 = -x^2.lnx + \frac{x^2}{2}$$

Hallando la otra integral u_1

$$u_1 = 2\int \frac{lnx}{x} dx$$

Aplicando el método de sustitución:

$$u = lnx: du = \frac{dx}{x}$$

Sustituyendo en la integral:

$$u_1 = 2\int u du$$

$$u_1 = 2\frac{u^2}{2}$$

$$u_1 = u^2$$

$$u_1 = ln^2 x$$

Por tanto,

$$\begin{Bmatrix} u_1 = ln^2 x \\ u_2 = -x^2 . lnx + \dfrac{x^2}{2} \end{Bmatrix}$$

Por tanto, la solución particular queda:

$$y_p = u_1 x + u_2 x^{-1}$$

$$y_p = (ln^2 x)x + \left(-x^2 . lnx + \frac{x^2}{2}\right) . x^{-1}$$

$$y_p = x(ln^2 x) + \left(-x . lnx + \frac{x}{2}\right).$$

Así la solución general es:

$$y_g = y_h + y_p = C_1 x + C_2 x^{-1} + xln^2 x - xlnx + \frac{x}{2}$$

4. Hallar la solución de $x^3 y''' - x^2 y'' + 2xy' - 2y = x$

Solución:

Partiendo de la ecuación diferencial homogénea relacionada:

$$x^3 y''' - x^2 y'' + 2xy' - 2y = 0$$

P1. Estableciendo la condición $y = x^r$

P2. Derivando de acuerdo a la ecuación:

$$\left\{\begin{array}{c} y = x^r \\ y' = rx^{r-1} \\ y'' = r(r-1)x^{r-2} \\ y''' = r(r-1)(r-2)x^{r-3} \end{array}\right\}$$

P3. Sustituyendo en la ecuación diferencial:

$$x^3(r(r-1)(r-2)x^{r-3} - x^2(r(r-1)x^{r-2} + 2xrx^{r-1} - 2x^r = 0$$

P4. Operando la potenciación:

$$(r(r-1)(r-2)x^{r-3+3} - (r(r-1)x^{r-2+2} + (2rx^{r-1+1} - 2x^r) = 0$$

$$r(r-1)(r-2) - r(r-1) + (2r-2) = 0$$

P5. Factorando:

$$r(r-1)(r-2) - r(r-1) + 2(r-1) = 0$$

$$(r-1)[r(r-2) - r + 2] = 0 \rightarrow (r-1)[r^2 - 2r - r + 2] = 0$$

$$(r-1)[r^2 - 3r + 2] = 0 \rightarrow (r-1)[(r-2)(r-1)] = 0$$

$$r = 1; r = 1\ ;\ r = 2$$

P6. Sustituyendo estos valores $y_1 = x, y_2 = x; y_3 = x^2$, que son las funciones L.I con esto, se escribe la solución $Y_h = C_1x + C_2xlnx + C_3x^2$.

P7. Determinando la solución particular realizando una estructura similar a la y_h, pero cambiando las constantes por funciones, es decir: $Y_p = u_1x + u_2xlnx + u_3x^2$.

P8. Encontrando u_1, u_2, u_3 para ello derivar y encontrar tres ecuaciones haciendo el siguiente proceso:

Primera ecuación, cambiando las funciones por sus derivadas:

$$u_1'x + u_2'xlnx + u_3'x^2 = 0$$

Segunda ecuación, derivando la primera ecuación, pero sólo los términos de x:

$$u_1'(1) + u_2'(lnx + 1) + u_3'(2x) = 0 \rightarrow u_1' + u_2'(lnx + 1) + 2u_3'x = 0$$

Tercera ecuación, al ser la última ecuación se tiene que igualar:

$\frac{R(x)}{coeficiente\ de\ la\ mayor\ derivada}$; es decir, resulta: $u_2'\left(\frac{1}{x}\right) + 2u_3' = \frac{1}{x^2}$.

P9. Para sacar la solución de las funciones, resolver el sistema:

$$\left\{\begin{array}{c} x\left(u_1' + u_2' lnx + u_3' x\right) = 0 \rightarrow u_1' + u_2' lnx + u_3' x = 0 \quad (\mathbf{1}) \\ u_1' + u_2'(lnx + 1) + 2u_3' x = 0 \qquad (2) \\ u_2'\left(\frac{1}{x}\right) + 2u_3' = \frac{1}{x^2} \qquad (3) \end{array}\right\}$$

Aplicar el método de eliminación Gaussiana (1) y (2).

$$\left\{\begin{array}{c} u_1' + u_2' lnx + u_3' x = 0 \quad *(-1) \\ u_1' + u_2'(lnx + 1) + 2u_3' x = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{c} -u_1' - u_2' lnx - u_3' x = 0 \\ u_1' + u_2'(lnx + 1) + 2u_3' x = 0 \end{array}\right\}$$

Sumando queda:

$$u_2' + u_3' x = 0 \rightarrow u_2' = -u_3' x \qquad (4)$$

Esta nueva ecuación (4) se sustituye en (3):

$$-u_3' x\left(\frac{1}{x}\right) + 2u_3' = \frac{1}{x^2} \rightarrow u_3' = \frac{1}{x^2}$$

Para encontrar los otros valores, sustituir en la ecuación (4):

$$u_2' = -\frac{1}{x^2}.x = -\frac{1}{x}$$

de igual manera para $u_1' + u_2' lnx + u_3' x = 0$, es decir:

$$u_1' - \frac{1}{x} lnx + \frac{1}{x^2} x = 0 \rightarrow u_1' = \frac{lnx}{x} - \frac{1}{x}$$

P10. Integrando las funciones, se tiene:

$$\int u_3' = \int \frac{1}{x^2} dx \rightarrow u_3 = -\frac{1}{x}$$
$$\int u_2' = -\int \frac{1}{x} dx \rightarrow u_2 = -lnx$$
$$\int u_1' = \int \frac{lnx}{x} dx - \int \frac{dx}{x} \rightarrow u_1 = \frac{1}{2} ln^2 x - lnx$$

P11. Sustituyendo en la solución particular $Y_p = u_1x + u_2xlnx + u_3x^2$, resulta:

$Y_p = \left(\frac{1}{2}ln^2x - lnx\right)x + (-lnx)xlnx - \frac{1}{x}x^2$ reduciendo los términos semejantes:

$Y_p = \left(-\frac{1}{2}xln^2x - xlnx\right) - x$. Por tanto, la solución general es:

$$y_G = y_H + y_P = C_1x + C_2xlnx + C_3x^2 - \frac{1}{2}xln^2x - xlnx - x$$

Observación: Este proceso se lo conoce como el de variación de parámetros.

ACTIVIDAD 21

Resolver aplicando el principio de Cauchy-Euler homogéneo.

1. Hallar la solución de $2x^2y'' - xy' - 2y = 0$
2. Hallar la solución de $x^2y'' + xy' - 2y = 0$
3. Hallar la solución de $x^2y'' - 12y = 0$
4. Hallar la solución de $x^2y'' + 5xy' - 5y = 0$
5. Hallar la solución de $25x^2y'' + 25xy' + y = 0$
6. Hallar la solución de $x^3y''' + 6x^2y'' + 7xy' + y = 0$, Nota cuando se repite la raíz la solución se multiplica lnx a partir de la segunda y así sucesivamente hasta completar la multiplicidad.
   Resp. $y = C_1x^{-1} + C_2x^{-1}lnx + C_3x^{-1}(lnx)^2$.

7. Hallar la solución de $x^3y''' + 2x^2y'' + xy' - y = 0$
   NOTA: Cuando en la solución existen raíces imaginarias se debe aplicar
   $y_1 = x^a\cos(blnx)$; $y_2 = x^a\,\mathrm{sen}(blnx)$
   Resp. $y = C_1x + C_2coslnx + C_3sen(lnx)$

8. Hallar la solución de $x^2y'' + xy' - 9y = 0; y(1) = 1; y'(1) = 0$
   Resp.
   $$y = \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^{-3}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

Resolver aplicando el principio de Cauchy - Euler no homogéneo.

1. Resolver por variación de parámetros la ecuación
   $$y''' + y'' - y' - y = 2e^{-x}$$
2. Hallar la solución de $x^2y'' - xy' + y = 2x$,
   Resp. $y_h = C_1x + C_2xlnx,\ y_p = xln^2x$
3. Hallar la solución de $x^2y'' - 3xy' + 13y = 4 + 3x$,
   Resp. $y_h = C_1x^2cos(3lnx) + C_2x^2sen(3lnx),\ y_p = \frac{4}{13} + \frac{3}{10}x$
4. Resolver la ecuación $x^2y'' + 10xy' + 8y = x^2$
5. Hallar la solución de $y'' - 4y = 8e^{2x}$
6. Hallar la solución de $x^2y'' + y = 2xlnx$

7. Hallar la solución de $y'' + y = tanx$:
   Sol. $y = C_1senx + C_2cosx - cosxln|secx + tanx|$
8. Hallar la solución de la ecuación diferencial:
$$y'' - y = 2lnx$$
   Resp. $C_1e^x + C_2e^{-x} + e^x(\int e^{-x}lnxdx) - e^{-x}(\int e^x lnxdx)$

6.7.1 Método de resolución por operadores

OBJETIVOS

- Relacionar el principio de derivada con las ecuaciones diferenciales de grado superior.
- Resolver problemas con estos principios con seguridad.

Introducción.

Se debe tener claro que cuando se hable de operadores se refiere a operadores de derivación, se recordará con ejemplos sus interpretaciones en el siguiente problema.

$$y'' + 6y' + 13y = e^{-3x}$$

Solución:

P1. Considerando que y'', significa segunda derivada:

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{VD}: y \\ \boldsymbol{VI}: x \end{cases}$$

y', significa primera derivada:

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{VD}: y \\ \boldsymbol{VI}: x \end{cases}$$

Es decir, dos notaciones hasta aquí bien conocidas, ahora se pondrá una tercera notación de primera derivada (y'), que indica la misma interpretación y que se empleará de aquí en adelante.

$$y' = \frac{dy}{dx} = D_x[y]$$

$D_x[y]$, significa derivada de y con respecto a x, es decir $[\boldsymbol{y}]$ es lo que se está derivando que es la variable dependiente y el subíndice x la variable independiente con la cual se está derivando.

Simplificando, se tiene:

$$\boldsymbol{D}[\boldsymbol{y}] = \boldsymbol{y}'$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

Recuerde que $D[y] = y'$, significa la primera derivada.

1. Hallar la derivada de: $D[x^2 + 3x - 1]$.

   Solución:

$$D[x^2 + 3x - 1] = Dx^2 + 3Dx - D1$$

$$D[x^2 + 3x - 1] = 2x + 3$$

2. Hallar la derivada de $D[e^{4x}]$.

   Solución:

$$D[e^{4x}] = De^{4x}$$

$$D[e^{4x}] = 4e^{4x}$$

3. Escriba como operador y''.

   Solución:

   Significa segunda derivada, por lo que su nueva forma es:

$$y'' = D\big[D[y]\big] = D^2[y]$$

4. Escriba como operador y'''.

   Solución:

   Significa tercera derivada, por lo que su nueva forma es:

$$y''' = D\Big[D\big[D[y]\big]\Big] = D^3[y]$$

5. Escriba como operador la ecuación diferencial:$y''' + y''$

   Solución:

La derivada se denota de manera similar a los polinomios característicos:

$$y''' + y'' = (D^3 + D^2)[y]$$

6. Escriba como operador la ecuación diferencial: $4y'' - 2y'$

Solución:
La derivada se denota de manera similar a los polinomios característicos:

$$4y'' - 2y' = (4D^2 - 2D)[y]$$

7. Escriba como operador la ecuación diferencial: $y'' - 5y' + 6y$

Solución:

La derivada se denota de manera similar a los polinomios característicos:

$$y'' - 5y' + 6y = (D^2 - 5D + 6)[y]$$

8. Escriba el operador como ecuación diferencial: $(2D - 3)[y]$

Solución:
La derivada se denota de manera similar a los polinomios característicos:

$$(2D - 3)[y] = 2y' - 3y$$

9. Escriba como operador la ecuación diferencial: $x^3y'' + 4xy' + (x^2 - 1)y = 0$

Solución:

Tener presente que el operador D solo aplica a las derivadas

$$(x^3D^2 + 4xD + x^2 - 1)[y] = 0$$

10. Hallar la solución de $\{(xD)(D)\}[y]$.

Solución:

P1. Proceder de adentro hacia afuera:

$$(xD)(D)[y]$$

Escribir en un orden formal:

$$(xD)[y'] = xy''$$

11. Hallar la solución de $(D)(xD)[y]$.

Solución:

P1. Aplicar la derivada desde la parte interna hacia afuera:

$$(D)(xD)[y]$$

P2. Resolver como la derivada de un producto:

$$(D)[xy'] = xDy' + y'Dx$$

$$(D)[xy'] = xy'' + y'$$

Esto demuestra que los operadores no son conmutativos.

OBSERVACIÓN: Los operadores son conmutativos cuando sus coeficientes son constantes.

$$(2D)(3D)[y] = (3D)(2D)[y]$$

DEMOSTRACIÓN

P1. Para demostrar que $a * b = b * a$

$$(2D)(3D)[y] = (3D)(2D)[y]$$

en efecto se tiene:

$$\left\{\begin{array}{c} (2D)(3y') = (3D)(2y') \\ (2)(3Dy') = (3)(2Dy') \\ 2(3y'') = 3(2y'') \\ 6y'' = 6y'' \\ (6D^2)[y] \end{array}\right\}$$

Los operadores con coeficientes constantes son conmutativos.

1. Escribir la ecuación del operador: $(D+3)(D-1)[y]$.

Solución.

$$(D+3)(D-1)[y] = (D+3)(y' - y)$$

$$= Dy' - Dy + 3y' - 3y$$

$$= y'' - y' + 3y' - 3y$$

$$= y'' + 2y' - 3y$$

$$= (D^2 + 2D - 3)[y]$$

2. (NOTA) Se obtiene la misma respuesta si se resuelve como operaciones de polinomios.
Solución:

P1. Aplicando la propiedad distributiva de polinomios:

$$(D + 3)(D - 1)[y] = (D^2 - D + 3D - 3)[y]$$

$$(D + 3)(D - 1)[y] = (D^2 + 2D - 3)[y]$$

PROPIEDADES DE LOS OPERADORES

PROPIEDAD 1.

Si $(D)(e^{\alpha x})[y] = D[e^{\alpha x} y] = \alpha e^{\alpha x} y + e^{\alpha x} y' = e^{\alpha x}(y' + \alpha y) = e^{\alpha x}(D + a)[y]$

EJERCICIO 1.

Resolver $D[e^{2x} senx]$

Solución:

P1. Interpretar el problema según la propiedad:

$$D[e^{2x} senx] = e^{2x}(D + 2)senx$$

$$= e^{2x}(Dsenx + 2senx)$$

$$= e^{2x}(cosx + 2senx)$$

P2. Derivar:

$$D[e^{2x} senx] = e^{2x} Dsenx + 2e^{2x} senx$$

$$D[e^{2x} senx] = e^{2x} cosx + 2e^{2x} senx$$

$$D[e^{2x} senx] = e^{2x}(cosx + 2senx)$$

OBSERVACIÓN: El desarrollo anterior más que realizar derivadas conduce a resolver ciertas ecuaciones diferenciales haciendo el siguiente proceso:

P1. Partir de la ecuación:

$$(D)(e^{ax})[y] = e^{ax}(D+a)[y]$$

P2. Multiplicar por e^{-ax} a la ecuación:

$$e^{-ax}(D)(e^{ax})[y] = e^{-ax}e^{ax}(D+a)[y]$$

Se obtiene:

$$e^{-ax}(D)(e^{ax})\ [y] = (D+a)[y]$$

Esto significa que aplicar un operador a una función y, es lo mismo que aplicar el operador $(D+a)$ a la función y.

P3. Quitando "y" para tener una igualdad de operadores:

$$e^{-ax}(D)(e^{ax})\ = (D+a)$$

Esta es la expresión que ayuda a resolver la ecuación diferencial por operadores.

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Resolver la ecuación $y'' - y = e^{x}$ aplicando operadores:

Solución:

P1. Aplicar $(D+a) = e^{-ax}(D)(e^{ax})$, para ello expresar la ecuación diferencial con operadores:

$$(D^2 - 1)[y] = e^{x}$$

P2. Factorando (la diferencia de cuadrados):

$$(D-1)(D+1)[y] = e^{x}$$

Aplicando la propiedad a cada factor:

$$\begin{Bmatrix} (D-1) = e^{x}De^{-x} \\ (D+1) = e^{-x}De^{x} \end{Bmatrix}$$

Sustituyendo en la ecuación inicial de P2:

$$(D-1)(D+1)[y] = e^{x}$$

$$(e^{x}De^{-x})(e^{-x}De^{x})[y] = e^{x}$$

P3. Operando se elimina el exponencial del lado izquierdo:

$$\{e^{x}De^{-x}e^{-x}De^{x}[y] = e^{x}\} \div e^{x}$$

$$De^{-x}e^{-x}De^{x}[y] = 1$$

$$De^{-2x}De^{x}[y] = 1$$

P4. Procediendo a integrar hasta eliminar la derivada:

$$\int De^{-2x}De^{x}[y] = \int dx$$

$$e^{-2x}De^{x}[y] = \int dx$$

$$e^{-2x}De^{x}[y] = x$$

Despejando el operador $e^{-2x}De^{x}[y] = x$

$$De^{x}[y] = \frac{x}{e^{-2x}}$$

Integrando otra vez:

$$\int De^{x}[y] = \int xe^{2x}\,dx$$

$$e^{x}[y] = \int xe^{2x}dx$$

$$e^{x}[y] = \int x.e^{2x}dx$$

Resolviendo $\int x.e^{2x}dx = x\frac{e^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4}$

Derivada	Integral
x	e^{2x}
1	$+\frac{e^{2x}}{2}$
0	$-\frac{e^{2x}}{4}$

Para escribir la integral se lo hace en diagonal intercalando los signos, para luego sustituir:

$$e^x[y] = x\frac{e^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4},$$

despejando "y",

$$y = \frac{x\frac{e^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4}}{e^x}$$

$$y = \frac{xe^x}{2} - \frac{e^x}{4}$$

Se obtiene la solución particular:

$$y_p = \frac{xe^x}{2} - \frac{e^x}{4}$$

P5. Para la solución homogénea se toma el diferencial y se cambia al polinomio característico $(D-1)(D+1) = 0$

$$(\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0$$
$$\lambda_1 = 1; \quad \lambda_2 = -1$$

Por tanto, la solución homogénea es:

$$y_h = C_1e^{\lambda_1 x} + C_2e^{\lambda_2 x}$$
$$y_h = C_1e^x + C_2e^{-x}$$

P6. La solución total es: $y = y_h + y_p$

$$\boldsymbol{y} = C_1e^x + C_2e^{-x} + \frac{xe^x}{2} - \frac{e^x}{4}$$

2. Resolver la ecuación $y'' + 4y' + 4y = x^{-2}e^{-2x}$ aplicando operadores.

Solución:

P1. Aplicar $e^{-ax}(D)(e^{ax}) = (D+a)$ para ello se expresa la ecuación diferencial con operadores $(D^2 + 4D + 4)[y] = x^{-2}e^{-2x}$.

P2. Factorar $(D+2)^2[y] = (D+2)(D+2) = x^{-2}e^{-2x}$, así:

$$\begin{Bmatrix}(D+2) = e^{-2x}De^{2x} \\ (D+2) = e^{-2x}De^{2x}\end{Bmatrix}$$

Sustituir:

$$e^{-2x}De^{2x} * e^{-2x}De^{2x}[y] = x^{-2}e^{-2x}$$

P3. Operando la ecuación, se tiene:

$$\{e^{-2x}DDe^{2x}[y] = x^{-2}e^{-2x}\} \div e^{-2x}$$

$$DDe^{2x}[y] = x^{-2}$$

Eliminar derivadas por medio de la integración.

P4. Integrando:

$$\int DDe^{2x}[y] = \int x^{-2}\, dx$$

$$De^{2x}[y] = \int x^{-2}dx = -\frac{1}{x}$$

Realizando el mismo proceso para eliminar otra derivada:

$$\int De^{2x}[y] = -\int \frac{1}{x}dx$$

$$e^{2x}[y] = -\int \frac{1}{x}dx = -lnx$$

Despejando y,

$$e^{2x}[y] = -lnx$$

$$y = -\frac{lnx}{e^{2x}}$$

$$y = -e^{-2x}lnx$$

La solución particular es:

$$y_p = -e^{-2x}lnx$$

P5. Para determinar la solución homogénea se toma el diferencial y se cambia al polinomio característico $(\lambda + 2)^2 = 0$:

$$(\lambda + 2)(\lambda + 2) = 0$$

$$\lambda + 2 = 0;\ \lambda + 2 = 0$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -2$$

La solución homogénea $y_h = C_1e^{-2x} + C_2xe^{-2x}$

P6. La solución total es: $y = y_h + y_p$

$$\boldsymbol{y} = C_1e^{-2x} + C_2xe^{-2x} - e^{-2x}lnx$$

3. Resolver la ecuación $y^{(iv)} - 4y''' + 6y'' - 4y' + y = e^x sen2x$ aplicando operadores.

Solución

P1. Aplicar $e^{-ax}(D)(e^{ax}) = (D + a)$, para ello se expresa la ecuación diferencial con operadores $(D^4 - 4D^3 + 6D^2 - 4D + 1)[y] = e^x sen2x$.

P2. Factorar $(D - 1)^4[y] = e^x sen2x$, así:

Aplicando Ruffini:

$$\begin{array}{r|l} 1 - 4 + 6 - 4 + 1 & 1 \\ 1 - 3 + 3 - 1 & \\ \hline 1 - 3 + 3 - 1 + 0 & \end{array}$$

De esta operación se tiene: $(D - 1)(D^3 - 3D^2 + 3D - 1) = 0$

$$\begin{array}{r|l} 1 - 3 + 3 - 1 & 1 \\ 1 - 2 + 1 & \\ \hline 1 - 2 + 1 \quad 0 & \end{array}$$

De esta operación se tiene: $(D - 1)(D - 1)(D^2 - 2D + 1) = 0$
Finalmente, factorizando el término $(D^2 - 2D + 1)$, se tiene:

$$(D - 1)(D - 1)(D - 1)^2 = 0$$

Dando lugar a:

$$(D - 1)^4[y] = e^x sen2x$$

Descomponiendo sus factores y aplicando la propiedad $e^{-ax}(D)(e^{ax}) = (D + a)$, se tiene:

$$\begin{Bmatrix} (D - 1) = e^x De^{-x} \\ (D - 1) = e^x De^{-x} \\ (D - 1) = e^x De^{-x} \\ (D - 1) = e^x De^{-x} \end{Bmatrix}$$

Sustituyendo en la ecuación original, se tiene:

$$(D - 1)(D - 1)(D - 1)(D - 1) = e^x sen2x$$

$$e^xDe^{-x} * e^xDe^{-x} * e^xDe^{-x} * e^xDe^{-x}[y] = e^x sen2x$$

P3. Operando y eliminando el exponencial:

$$\{e^xDDDDe^{-x}[y] = e^x sen2x\} \div e^x$$

$$DDDDe^{-x}[y] = sen2x$$

Retirando las derivadas mediante la integración:

P4. Integrando:

$$\int DDDDe^{-x}[y] = \int sen2xdx$$

$$DDDe^{-x}[y] = \int sen2xdx = -\frac{1}{2}cos2x$$

Realizando el mismo proceso para eliminar una a una las derivadas, se tiene:

$$\int DDDe^{-x}[y] = -\int \frac{1}{2}cos2xdx$$

$$DDe^{-x}[y] = -\frac{1}{2}\int cos2x\,dx = -\frac{1}{4}sen2x$$

Repitiendo el proceso hasta eliminar D:

$$\int DDe^{-x}[y] = -\frac{1}{4}\int sen2x\,dx$$

$$De^{-x}[y] = \frac{cos2x}{8}$$

Integrar otra vez:

$$\int De^{-x}[y] = \int \frac{cos2xdx}{8}$$

$$e^{-x}[y] = \frac{sen2x}{16}$$

Despejando "y",

$$y = \frac{sen2x}{16e^{-x}}$$

$$y = \frac{e^x sen2x}{16}$$

La solución particular es:

$$y_p = \frac{e^x sen2x}{16}$$

P5. Para determinar la solución homogénea se toma el diferencial y se cambia al polinomio característico $(\lambda - 1)^4 = 0$

$$(\lambda - 1)(\lambda - 1)(\lambda - 1)(\lambda - 1) = 0$$
$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 1$$

La solución homogénea es:

$$y_h = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 x^2 e^x + C_4 x^3 e^x$$

P6. La solución total es, $y = y_h + y_p$:

$$y = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 x^2 e^x + C_2 x^3 e^x + \frac{e^x sen2x}{16}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Resolver la ecuación $y''' + 3y'' + 3y' + y = \sqrt{x}e^{-x}$ aplicando operadores.
2. Resolver la ecuación $y^v + 5y^{iv} + 10y''' + 10y'' + 5y' + y = e^{-x} sen2x$ aplicando operadores.
3. Resolver la ecuación $y'' + 10y' + 25y = e^{-x} cos2x$ aplicando operadores.
4. Resolver la ecuación $y'' + 10y' + 25y = e^{-x} cos2x$ aplicando operadores.
5. Resolver la ecuación $y''' + 2y'' - y - 2 = e^{-x} sen2x$ aplicando operadores.
6. Resolver la ecuación $y''' + 2y'' - y - 2 = \sqrt{x}e^{-x}$ aplicando operadores.
7. Resolver la ecuación $y''' + 6y'' + 11y + 6 = e^{-x} tagx$ aplicando operadores.

6.7.2 Resolución de sistemas por operadores diferenciales

OBJETIVOS

- Aplicar los operadores en la resolución de sistemas de ecuaciones de orden superior.
- Determinar cuándo es aconsejable aplicar este método.

Introducción

Es importante recordar que las ecuaciones diferenciales del tipo, $y'' + y' + 3y = 0$, se solucionan mediante la utilización del operador "D" que significa el orden de la derivada, escribiendo:

$$D^2 + D + 3 = 0$$

Se debe indicar a qué variable se le está aplicando el operador, así:

$$L(y): \qquad D^2 + D + 3 = 0$$

Si la ecuación fuese no homogénea se tendrá:

$$L(y): \qquad D^2 + D + 3 = x + 3$$

Por otra parte, dada la ecuación operadora $L(w)$: $D^3 - 2D^2 + 5D + 3 = 0$ escriba la ecuación diferencial.

Solución:

P1. Identificar con respecto a qué variable se indica el diferencial u operador L, en este caso es respecto a w.

P2. En función a esta variable se escribe la ecuación diferencial:

$$w''' - 2w'' + 5w' + 3w = 0$$

PLANTEAMIENTO PARA UN SISTEMA DE ECUACIONES

Si se tiene el sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} L_1(x_1) + L_2(x_2) = g_1(t) \\ L_3(x_1) + L_4(x_2) = g_2(t) \end{cases}$$

Solución:
Resolviendo el sistema por cualquier método del algebra lineal para determinar los valores de x_1 y x_2.

P1. Utilizando el método de sumas y restas para eliminar x_2:

$$\begin{cases} L_1(x_1) + L_2(x_2) = g_1(t) \;\rightarrow \quad \boldsymbol{F_1} \\ L_3(x_1) + L_4(x_2) = g_2(t) \;\rightarrow \quad \boldsymbol{F}_2 \end{cases}$$

$$L_4F_1 - L_2F_2$$

$$\begin{cases} \;\; L_4L_1(x_1) + L_4L_2(x_2) = L_4g_1(t) \\ -L_2L_3(x_1) - L_2L_4(x_2) = -L_2g_2(t) \end{cases}$$

Resultando la ecuación:

$$L_4L_1(x_1) - L_2L_3(x_1) = L_4g_1(t) - L_2g_2(t)$$

resolviendo esta expresión como un polinomio:

$$[L_4L_1 - L_2L_3](x_1) = L_4g_1(t) - L_2g_2(t)$$

que es la expresión que se utilizará para resolver el sistema siempre y cuando lo permita; es decir, es recomendable cuando el sistema tiene varias variables de derivación.

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x_1{'} = x_1 + x_2 \\ x_2{'} = 4x_1 - 2x_2 \end{cases};\begin{cases} x_1(0) = 1 \\ x_2(0) = 2 \end{cases}$$

Solución:

P1. El método indica que se debe llevar el sistema a la forma:

$$\begin{cases} L_1(x_1) + L_2(x_2) = g_1(t) \\ L_3(x_1) + L_4(x_2) = g_2(t) \end{cases}$$

P2. Para ello agrupar los x_1 con los x_1, y los x_2 $c$on los x_2:

$$\begin{cases} (x_1{'} - x_1) - x_2 = 0 \\ -4x_1 + (x_2{'} + 2x_2) = 0 \end{cases}$$

P3. Aplicando operadores al sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} (D-1)x_1 + (-1)x_2 = 0 \\ (-4)x_1 + (D+2)x_2 = 0 \end{cases}$$

P4. Determinar los valores de las funciones (coeficientes):

$$\begin{cases} L_1 = (D-1);\ L_2 = -1;\ g_1(t) = 0 \\ L_3 = -4;\ L_4 = (D+2);\ g_2(t) = 0 \end{cases}$$

P5. Aplicar la forma de eliminación de x_1:

$$[L_4L_1 - L_2L_3](x_1) = L_4g_1(t) - L_2g_2(t)$$

$$[(D+2)(D-1) - (-1)(-4)](x_1) = (D+2) * 0 - (-1) * 0$$

$$(D^2 + D - 2 - 4)(x_1) = 0$$

$$(D^2 + D - 6)(x_1) = 0$$

P6. Escribir el polinomio característico:

$$x_1'' + x_1' - 6x_1 = 0$$

$$r^2 + r - 6 = 0$$

Resolver el polinomio:

$$(r+3)(r-2) = 0$$

$$r + 3 = 0; \;\; r - 2 = 0$$

$$r_1 = -3; \; r_2 = 2$$

La solución de la función x_1 es:

$$x_1 = C_1e^{r_1t} + C_2e^{r_2t}$$

$$x_1 = C_1e^{-3t} + C_2e^{2t}$$

P7. Hallar la función x_2, para lo cual se despeja de la ecuación original:

$$x_1' = x_1 + x_2$$

$$x_2 = x_1' - x_1$$

Hallar la derivada de la función x_1:

$$x_1 = C_1e^{-3t} + C_2e^{2t}$$

$$dx_1 = C_1de^{-3t} + C_2de^{2t}$$

$$x_1' = -3C_1e^{-3t} + 2C_2e^{2t}$$

Sustituir en la ecuación: $x_2 = x_1' - x_1$

$$x_2 = -3C_1e^{-3t} + 2C_2e^{2t} - C_1e^{-3t} - C_2e^{2t}$$

$$x_2 = -4C_1e^{-3t} + C_2e^{2t}$$

De esta manera se hallan los valores de las funciones del sistema.

P8. Aplicar las condiciones iniciales:

$$\begin{cases} x_1(0) = 1 \\ x_2(0) = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = C_1e^{-3t} + C_2e^{2t} \\ x_2 = -4C_1e^{-3t} + C_2e^{2t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 = C_1e^{-3*0} + C_2e^{2*0} \\ 2 = -4C_1e^{-3*0} + C_2e^{2*0} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 = C_1 + C_2 \\ 2 = -4C_1 + C_2 \end{cases}$$

Resolver el sistema de constantes:

$$\begin{cases} 1 = C_1 + C_2 \\ 2 = -4C_1 + C_2 \end{cases}$$
$$4F_1 + F_2$$

$$\begin{cases} 4 = 4C_1 + 4C_2 \\ 2 = -4C_1 + C_2 \end{cases}$$

$$6 = 5C_2;\ C_2 = \frac{6}{5}$$

Se halla $1 = C_1 + C_2$

$$1 = C_1 + \frac{6}{5}$$

$$C_1 = 1 - \frac{6}{5}$$

$$C_1 = \frac{5-6}{5}$$

$$C_1 = -\frac{1}{5}$$

P9. Para determinar la solución final se sustituyen las constantes:

$$\begin{cases} x_1 = C_1e^{-3t} + C_2e^{2t} \\ x_2 = -4C_1e^{-3t} + C_2e^{2t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{5}e^{-3t} + \frac{6}{5}e^{2t} \\ x_2 = \frac{4}{5}C_1e^{-3t} + \frac{6}{5}e^{2t} \end{cases}$$

NOTA: Todos son de coeficientes son constantes.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x_1'' + x_1' + x_1 + x_2'' + x_2 = e^t \\ x_1'' + x_1' + x_2'' = e^{-t} \end{cases}$$

Resp.

$$\begin{cases} x_1 = -2e^{-t} - e^{t} + C_1 \\ x_2 = e^{-t} + 2e^{t} - C_1 \end{cases}$$

2. Resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x_1' + 6x_1 - 3x_2 = 6t \\ -4x_1 + x_2' + x_2 = 2e^{-t} \end{cases}$$

Resp.

$$\begin{cases} x_1 = C_1 e^{(-7+\sqrt{13})t} - C_2 e^{(-7-\sqrt{13})t} - \dfrac{19}{54} + \dfrac{4t}{3} + \dfrac{6e^{-t}}{23} \\ x_2 = \dfrac{-1+\sqrt{13}}{3} C_1 e^{(-7+\sqrt{13})t} + \dfrac{-1-\sqrt{13}}{3} C_2 e^{(-7-\sqrt{13})t} - \dfrac{7}{27} + \dfrac{2t}{3} + \dfrac{10e^{-t}}{23} \end{cases}$$

3. Resolver la ecuación $y''' + 3y'' + 3y' + y = \sqrt{x}e^{-x}$ aplicando operadores.
4. Resolver la ecuación $y^{iv} - 4y''' + 6y'' - 4y' + y = e^{x}sen2x$ aplicando operadores.

6.7.3 Anuladores

$D^2[x]$, es l asegunda derivada, si se resuelve la derivada de x se obtiene $D[1]$ y ahora derivando 1 se tiene $D[1] = 0$, esto indica que D^2 es el anulador para x. Con esta indicación se procederá a desarrollar los ejercicios 1, 2 y 3.

EJERCICIOS RESUELTOS 1

1. Verificar si $D^3[5x^2 + 3x - 1]$ es un anulador.

Solución:

P1. Resolver las derivadas de afuera hacia dentro:

$$D^3[5x^2 + 3x - 1] = D^2[10x + 3] = D[10] = 0$$

P2. Es decir, reducir hasta demostrar que D^3 es un anulador de la función $5x^2 + 3x - 1$.

Conclusión: Un anulador es un operador que anula a la función que se le aplica, como también cualquier múltiplo cumple este principio.

2. Sea el anulador $(D^2 + 3)D^3$ es un anulador de $5x^2 + 3x - 1$

Solución:

P1. Se sabe que $D^3(5x^2+3x-1)=0$

P2. Entonces $(D^2+3)(0)=0$ queda demostrado que si es un anulador de la función

$$5x^2+3x-1$$

OBSERVACIÓN: El anulador de los polinomios de grado n es (D^{n+1}). Por ejemplo, el polinomio $5x^4-3x^2+12x-3$ tiene anulador $D^{4+1}=D^5$.

A continuación, se presentan ejemplos para otro tipo de anuladores.

3. Determinar el anulador e^x.

Solución:
Como se sabe es la misma función $D[e^x]=e^x$, ahora note $e^x-e^x=0$, lo que indica que $[e^x]=e^x-e^x=0$, concluyendo que el operador $(D-1)$ es el anulador de e^x.

4. Determinar el anulador de $D(e^{5x})=(D-5)$.

Solución:
Para e^{rx}, el anulador es $(D-r)$, en conclusión $(D-5)$, es anulador de e^{5x}.

Por otra parte, la función $y=f(x)$, tiene anulador de coeficientes constantes si y solo sí, es solución de una Ecuación Diferencial Ordinaria Homogénea de coeficientes constantes.

$$a_n y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+a_{n-2}y^{(n-2)}+\cdots+a_1 y' +a_0 y=0,$$

sustituyendo $y=e^{rx}$, permite encontrar la ecuación característica y transformarla en la siguiente expresión algebraica:

$$a_n r^n+a_{n-1}y^{r-1}+a_{n-2}y^{r-2}+\cdots+a_1 r+a_0=0.$$

Luego se debe determinar los valores de r que llevan a las siguientes opciones:

1. Las raíces reales dan soluciones de tipo:
$$y=e^{rx}=C_1e^{rx}$$
2. Las raíces reales repetidas dan soluciones del tipo:
$$y=x^n e^{rx}$$
3. Las raíces complejas $a+bi$ dan soluciones del tipo:
$$y=e^{\alpha x}cos\beta x+e^{\alpha x}sen\beta x$$
4. Las raíces complejas $\alpha+\beta i$ son repetidas dan soluciones del tipo:

$$y=x^n e^{\alpha x}cos\beta x+x^n e^{\alpha x}sen\beta x$$

CONCLUSIÓN

Tienen anuladores las funciones que tienen la forma

1. $a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + a_{n-2} y^{(n-2)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y$
2. e^{rx}
3. $senbx, cosbx$
4. Sus combinaciones
5. El anulador de $senbx, cosbx$ es $(D^2 + b^2)$

REGLA DE LOS OPERADORES

Cuando se requiera determinar los operadores, aplicar las siguientes reglas:

1. D^{n+1} cuando la función es polinomial:

$$a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

2. $(D - a)[y]$, da cuando la función es exponencial

$$y = e^{\alpha x}$$

3. $(D^2 + b^2)[y]$, da cuando la función tiene $y = senbx; y = \ cosbx$

4. $(D - a)^{n+1}[y]$, cuando se tiene un polinomio multiplicado por una función exponencial
$$y = (a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n)e^{\alpha x}$$
5. $(D^2 + b^2)^{n+1}[y]$, cuando se tiene una función seno o coseno multiplicado por una función polinomial, sea con la función seno o coseno:
$$y = (a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n)senbx \quad (1)$$

$$y = (a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n)cosbx \quad (2)$$

6. $(D - a)^2 + b^2$, cuando es el producto de función exponencial con la función seno o coseno:
$$y = e^{\alpha x}senbx \quad (1)$$
$$y = e^{\alpha x}cosbx \quad (2)$$

7. $((D - a)^2 + b^2)^{n+1}$, cuando están presentes las tres funciones mencionadas en un solo problema:
$$(a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n)e^{\alpha x}senbx \quad (1)$$
$$(a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n)e^{\alpha x}cosbx \quad (2)$$

EJERCICIO RESUELTO 2

1. Determinar el anulador de $f(x) = senx$

Solución:

Se empieza derivando la función $f(x) = senx$

$$f'(x) = cosx$$

$$f''(x) = -senx$$

P1. Formar la ecuación anuladora $y'' + y = 0$
P2. Usar la ecuación característica $r^2 + 1 = 0$
P3. Hallar la solución de la ecuación de P1, resolviendo el polinomio característico.

$$r^2 = -1$$

$$r = \sqrt{-1} = \pm i$$

$$r_1 = 0 + i: r_2 = 0 - i$$

P4. Hallar los valores $\alpha = 0;\ \beta = 1.$

P5. Escribir la solución aplicando: $y = e^{\alpha x} cos\beta x + e^{\alpha x} sen\beta x$

$$y = e^{0x}\cos(1 * x) + e^{\alpha 0} sen(1 * x)$$

$$y = cosx + senx$$

P6. Se concluye que: $(D^2 + 1)[senx] = 0$

2. Determinar el anulador de $f(x) = sen5x$

Solución:

P1. Aplicando $(D^2 + b^2)senbx = (D^2 + 5^2)sen5x$

P2. Resolviendo $(D^2 + 5^2)sen5x = D^2 sen5x + 25sen5x$

$$= D(5cos5x) + 25sen5x$$

$$= -25sen5x + 25sen5x = 0$$

3. Determinar el anulador de $f(x) = xe^{2x}$

Solución:

Aplicando el proceso para determinar el anulador, obtener hasta la segunda derivada:

$$f(x) = xe^{2x}$$
$$f'(x) = 2xe^{2x} + e^{2x}$$
$$f''(x) = 4xe^{2x} + 2e^{2x} + 2e^{2x} = 4xe^{2x} + 4e^{2x}$$

Si se continúa derivando el anulador sería imposible, por tanto, en base a la segunda derivada se construye la ecuación anuladora.

$$4xe^{2x} + 4e^{2x} - 4(2xe^{2x} + e^{2x}) + 4xe^{2x} = 0$$
$$y'' - 4y' + 4y = 0$$

P1. Esta ecuación permite determinar el polinomio característico:

$$r^2 - 4r + 4 = 0$$

$$(r-2)^2 = 0$$

Donde sus raíces son reales e iguales:

$$r_1 - 2 = 0 \; o \; r_2 - 2 = 0$$

$$r_1 = 2 \; o \; r_2 = 2$$

es decir:

$$r = 2$$

P2. Por otro lado, la expresión xe^{2x} significa que tiene multiplicidad, por tanto la ecuación característica:

$$(r-2)(r-2) = 0$$

P3. Esto significa que la solución de la ecuación diferencial es:

$$y = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x}$$

y aquí está precisamente la ecuación que se desea anular C_2xe^{2x}.

P4. Se debe encontrar la ecuación diferencial que tiene esta ecuación característica con el cambio $r = D$, así: $(D-2)^2[y] = 0$.

P5. Comprobando al sustituir en el paso anterior:

$$(D-2)^2[xe^{2x}] = 0$$

$$D^2[xe^{2x}] - 4D[xe^{2x}] + 4[xe^{2x}] = 0$$

$$D[2xe^{2x} + e^{2x}] - 4[2xe^{2x} + e^{2x}] + 4[xe^{2x}] = 0$$

$$[2(2xe^{2x}+e^{2x})+e^{2x}]-4[2xe^{2x}+e^{2x}]+4[xe^{2x}]=0$$

$$[4xe^{2x}+2e^{2x}+2e^{2x}]-4[2xe^{2x}+e^{2x}]+4[xe^{2x}]=0$$

$$4xe^{2x}+4e^{2x}-8xe^{2x}-4e^{2x}+4xe^{2x}=0$$

$$0=0$$

Se concluye que $(D-2)^2$ es el anulador de xe^{2x}

4. Determinar el anulador de $f(x)=x^3e^{2x}$.

Solución:

P1. Analizando el problema se determina que el exponente de la función exponencial es 2, entonces su raíz es $r_1-2=0$ es decir $r=2$.

P2. Por otro lado, la expresión x^3e^{2x} significa que tiene multiplicidad 4, por tanto la ecuación característica

$$(r-2)(r-2)(r-2)(r-2)=0;\ (r-2)^4=0$$

P3. Esto significa que la solución $y=C_1e^{2x}+C_2xe^{2x}+C_3x^2e^{2x}+C_4x^3e^{2x}$ y aquí está precisamente la ecuación que se desea anular $C_4x^3e^{2x}$.
P4. Se debe encontrar la ecuación diferencial que tiene esta ecuación característica con el cambio $r=D$, asi: $(D-2)^4[y]=0$.

P5. Comprobar sustituyendo en el paso anterior $(D-2)^4[x^3e^{2x}]=0$ y se concluye que $(D-2)^4$ es el anulador de x^3e^{2x}.

5. Determinar el anulador de x^2sen5x

Solución:

P1. Aplicar $(D^2+b^2)^{n+1}$:

P2. Sustituir para obtener $(D^2+5^2)^{2+1}[y]=(D^2+25)^3[x^2sen5x]=0$

P3. Así $(D^2+25)^3$ es el anulador x^2sen5x, comprobar:

$$(D^2+25)^3[x^2sen5x]=0$$

$$(D^6+75D^4+1875D^2+15625)[x^2sen5x]=0$$

$$D^6[x^2sen5x]+75D^4[x^2sen5x]+1875D^2[x^2sen5x]+15625[x^2sen5x]=0$$

Derivar parte por parte los operadores:

$$\begin{cases} D^6[x^2sen5x] = D^5[x^2dsen5x + sen5xdx^2] \\ 75D^4[x^2sen5x] = 75D^3[x^2dsen5x + sen5xdx^2] \\ 1875D^2[x^2sen5x] = 1875D[x^2dsen5x + sen5xdx^2] \\ 15625[x^2sen5x] \end{cases}$$

$$\begin{cases} D^6[x^2sen5x] = D^5[5x^2cos5x + 2xsen5x] \\ 75D^4[x^2sen5x] = 75D^3[5x^2cos5x + 2xsen5x] \\ 1875D^2[x^2sen5x] = 1875D[5x^2cos5x + 2xsen5x] \\ 15625[x^2sen5x] \end{cases}$$

Derivar el siguiente operador:

$$\begin{cases} D^5[5x^2cos5x + 2xsen5x] = D^4[5(-5x^2sen5x + 2xcos5x) + 2(5xcos5x + sen5x)] \\ 75D^3[5x^2cos5x + 2xsen5x] = 75D^2[5(-5x^2sen5x + 2xcos5x) + 2(5xcos5x + sen5x)] \\ 1875D[5x^2cos5x + 2xsen5x] = 1875[5(-5x^2sen5x + 2xcos5x) + 2(5xcos5x + sen5x)] \\ 15625[x^2sen5x] = 15625[x^2sen5x] \end{cases}$$

$$\begin{cases} D^5[5x^2cos5x + 2xsen5x] = D^4[-25x^2sen5x + 20xcos5x + 2sen5x] \\ 75D^3[5x^2cos5x + 2xsen5x] = 75D^2[-25x^2sen5x + 20xcos5x + 2sen5x] \\ 1875D[5x^2cos5x + 2xsen5x] = 1875[-25x^2sen5x + 20xcos5x + 2sen5x] \\ 15625[x^2sen5x] = 15625[x^2sen5x] \end{cases}$$

Derivar el siguiente operador:

$$\begin{cases} D^5[5x^2cos5x + 2xsen5x] = D^4[-25x^2sen5x + 20xcos5x + 2sen5x] \\ 75D^3[5x^2cos5x + 2xsen5x] = 75D^2[-25x^2sen5x + 20xcos5x + 2sen5x] \\ 1875D[5x^2cos5x + 2xsen5x] = -46875x^2sen5x + 37500xcos5x + 3750sen5x \\ 15625[x^2sen5x] = 15625[x^2sen5x] \end{cases}$$

$$\begin{cases} D^4[-25x^2sen5x + 20xcos5x + 2sen5x] = D^3[-25(5x^2cos5x + 2xsen5x) + 20(-5xsen5x + cos5x) + 10cos5x] \\ 75D^2[-25x^2sen5x + 20xcos5x + 2sen5x] = 75D[-25(5x^2cos5x + 2xsen5x) + 20(-5xsen5x + cos5x) + 10cos5x] \\ -46875x^2sen5x + 37500xcos5x + 3750sen5x \\ 15625[x^2sen5x] = 15625[x^2sen5x] \end{cases}$$

$$\begin{cases} D^4[-25x^2sen5x + 20xcos5x + 2sen5x] = D^3[-125x^2cos5x - 150xsen5x + 30cos5x] \\ 75D^2[-25x^2sen5x + 20xcos5x + 2sen5x] = 75D[-125x^2cos5x - 150xsen5x + 30cos5x] \\ -46875x^2sen5x + 37500xcos5x + 3750sen5x \\ 15625[x^2sen5x] = 15625[x^2sen5x] \end{cases}$$

Derivar el siguiente operador:

$$\begin{cases} D^3[-125x^2cos5x - 150xsen5x + 30cos5x] = D^2[-625x^2sen5x - 300sen5x - 1000xcos5x] \\ 75D[-125x^2cos5x - 150xsen5x + 30cos5x] = 75[-625x^2sen5x - 300sen5x - 1000xcos5x] \\ -46875x^2sen5x + 37500xcos5x + 3750sen5x \\ 15625[x^2sen5x] = 15625[x^2sen5x] \end{cases}$$

$$\begin{cases} D^3[-125x^2cos5x - 150xsen5x + 30cos5x] = D^2[625x^2sen5x - 300sen5x - 1000xcos5x] \\ 75D[-125x^2cos5x - 150xsen5x + 30cos5x] = 46875x^2sen5x - 22500sen5x - 75000xcos5x \\ -46875x^2sen5x + 37500xcos5x + 3750sen5x \\ 15625[x^2sen5x] = 15625[x^2sen5x] \end{cases}$$

Derivar el siguiente operador:

$$\begin{cases} D^2[625x^2sen5x - 300sen5x - 1000xcos5x] = D[625x^2sen5x - 300sen5x - 1000xcos5x] \\ 46875x^2sen5x - 22500sen5x - 75000xcos5x \\ -46875x^2sen5x + 37500xcos5x + 3750sen5x \\ 15625[x^2sen5x] = 15625[x^2sen5x] \end{cases}$$

$$\begin{cases} D^2[625x^2sen5x - 300sen5x - 1000xcos5x] = D[3125x^2cos5x + 6250xsen5x - 2500cos5x] \\ 46875x^2sen5x - 22500sen5x - 75000xcos5x \\ -46875x^2sen5x + 37500xcos5x + 3750sen5x \\ 15625[x^2sen5x] = 15625[x^2sen5x] \end{cases}$$

Último operador

$$\begin{cases} D[3125x^2cos5x + 6250xsen5x - 2500cos5x] = -15625x^2sen5x + 18750sen5x + 37500xcos5x \\ 46875x^2sen5x - 22500sen5x - 75000xcos5x \\ -46875x^2sen5x + 37500xcos5x + 3750sen5x \\ 15625[x^2sen5x] = 15625[x^2sen5x] \end{cases}$$

Sumar todos los factores $0 = 0$

6. Determinar el anulador de $2x^2 + 3e^x + 1$

Solución:

P1. Analizar cada término:

$$2x^2 + 3e^x + 1$$

$$\boldsymbol{D^3} \qquad \boldsymbol{(D-1)} \qquad \boldsymbol{D}$$

P2. Para determinar el anulador de esta suma sacar el mínimo común múltiplo:

$$m.c.m.(D^3(D-1))$$

P3. Así el anulador:

$$(D^3(D-1))[2x^2 + 3e^x + 1]$$

7. Determinar el anulador de $cos^2x + 3e^{2x} - sen2x$

Solución:

P1. Analizar cada término de: $cos^2x + 3e^{2x} - sen2x$ y notar que no hay regla para cos^2x.

P2. Establecer la función identidad $cos^2x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}cos2x$ y sustituir, para aplicar el método de anuladores.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}cos2x + 3e^{2x} - sen2x$$

$$\boldsymbol{D} \qquad (\boldsymbol{D^2} + \mathbf{4}) \qquad (\boldsymbol{D} - \mathbf{2}) \quad (\boldsymbol{D^2} + \mathbf{4})$$

Para determinar el anulador de esta suma sacar el mínimo común múltiplo:

$$m.c.m.\boldsymbol{D}(\boldsymbol{D^2} + \mathbf{4})(\boldsymbol{D} - \mathbf{2})$$

P3. Por tanto, el anulador es:

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{D^2} + \mathbf{4})(\boldsymbol{D} - \mathbf{2})\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}cos2x + 3e^{2x} - sen2x\right)$$

8. Resolver $y'' + y = x^2$

Solución:

P1. Aplicar el método de anuladores, para ello es necesario cambiar la notación:

$$(\boldsymbol{D^2} + \mathbf{1})[\boldsymbol{y}] = \boldsymbol{x^2}$$

P2. Anular la función que aparece en el lado derecho, y tomar en cuenta que se puede anular sólo polinomios, exponenciales, funciones trigonométricas seno y coseno; además de sus combinaciones.

P3. Resolver la ecuación característica apoyándose en los operadores $(D^2 + 1) = r^2 + 1 = 0$: su solución es $\begin{Bmatrix} r_1 = 0 + i \\ r_2 = 0 - i \end{Bmatrix}$, por tanto, la solución homogénea es $y_h = C_1senx + C_2cosx$.

P4. Ahora anular x^2, como se observa es un polinomio, por ello se debe aplicar D^{n+1}, aplicar a los dos lados el anulador para obtener: $D^3(D^2 + 1)[y] = D^3[x^2]$.

P5. Derivar el lado derecho, para obtener:

$$D^3[x^2] = D^2[2x] = 2Dx = 0$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

Determinar los anuladores de los siguientes problemas:

1. $f(x) = e^{3x}sen2x$
2. $f(x) = xe^{3x}sen2x$
3. $f(x) = 2e^{3x} - 5xsen2x$
4. $f(x) = 2e^{3x} - 5xsen2x$

6.8 Sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

6.8.1 Método determinante (Operadores)

Este método consiste en escribir el sistema de ecuaciones diferenciales, con operadores de derivadas y aplicar el método del Wronskiano; ya que sus funciones son linealmente independientes, de manera que se obtiene que: $D[x] = x´$.

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Determinar la solución para el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales, aplicando el principio de los operadores:

$$\begin{Bmatrix} x´ = 2x - 3y \\ y´ = -x + 4y \end{Bmatrix}$$

Solución:

P1. Escribir el sistema con los operadores, que es otra forma de representar la derivada.

$$\begin{Bmatrix} D[x] = 2x - 3y \\ D[y] = -x + 4y \end{Bmatrix}$$

P2. Igualar a cero las ecuaciones con la finalidad de desarrollar como si las otras variables también fuesen operadores:

$$\begin{Bmatrix} D[x] - 2x + 3y = 0 \\ x + D[y] - 4y = 0 \end{Bmatrix} \to \begin{Bmatrix} (D - 2)[x] + 3[y] = 0 \\ 1[x] + (D - 4)[y] = 0 \end{Bmatrix}$$

P3. Hallar el determinante, conociendo que las soluciones son L.I, es decir aplicando el Wroskiano, se obtiene:

$$\Delta = \begin{vmatrix} (D-2) & 3 \\ 1 & (D-4) \end{vmatrix} \begin{matrix} - \\ + \end{matrix} = (D-2)(D-4) - 3$$

$$D^2 - 6D + 8 - 3 = D^2 - 6D + 5$$

Este operador tiene como finalidad anular a la solución "x" y "y".

P4. El operador $D^2 - 6D + 5$, es el que anulará el sistema, el mismo que permitirá llevar a un sistema homogéneo, de la siguiente manera:

$$\begin{Bmatrix} (D^2 - 6D + 5)[x] = 0 \\ (D^2 - 6D + 5)[y] = 0 \end{Bmatrix} \to \begin{Bmatrix} x'' - 6x' + 5x = 0 \\ y'' - 6y' + 5y = 0 \end{Bmatrix}$$

P5. Resolver por separado las ecuaciones aplicando el método del polinomio característico:

$$\begin{Bmatrix} r^2 - 6r + 5 = 0 \\ (r-5)(r-1) = 0 \\ r = 5; r = 1 \end{Bmatrix}$$

Entonces la solución es $x = C_1e^{5t} + C_2e^t$.

La solución de "y" se realiza de la misma manera, ya que se trata de la misma ecuación característica, pero con otras constantes $y = D_1e^{5t} + D_2e^t$
Es decir, la solución del sistema es:

$$\begin{Bmatrix} x = C_1e^{5t} + C_2e^t \\ y = D_1e^{5t} + D_2e^t \end{Bmatrix}$$

P6. Determinar los valores de las constantes, para ello se toma el sistema original y se debe relacionarlo con las soluciones:

$$\begin{Bmatrix} x' = 2x - 3y \\ y' = -x + 4y \end{Bmatrix}$$

Con,

$$\begin{Bmatrix} x = C_1e^{5t} + C_2e^t \\ y = D_1e^{5t} + D_2e^t \end{Bmatrix}$$

derivar las soluciones para sustituir en el sistema:

$$\begin{Bmatrix} x' = 5C_1e^{5t} + C_2e^t \\ y' = 5D_1e^{5t} + D_2e^t \end{Bmatrix}$$

sustituir en $x' = 2x - 3y$:

$$5C_1e^{5t} + C_2e^t = 2(C_1e^{5t} + C_2e^t) - 3(D_1e^{5t} + D_2e^t)$$

resolver,

$$5C_1e^{5t} + C_2e^t = 2C_1e^{5t} + 2C_2e^t - 3D_1e^{5t} - 3D_2e^t$$

igualando las expresiones, se obtiene:

$$\begin{Bmatrix} 5C_1 = 2C_1 - 3D_1 \\ C_2 = 2C_2 - 3D_2 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} 3D_1 = 2C_1 - 5C_1 \rightarrow D_1 = -C_1 \\ 3D_2 = 2C_2 - C_2 \rightarrow D_2 = \dfrac{C_2}{3} \end{Bmatrix}$$

P7. Sustituir estos valores para tener la solución en función de las dos constantes:

$$\begin{Bmatrix} x = C_1e^{5t} + C_2e^{t} \\ y = -C_1e^{5t} + \dfrac{1}{3}C_2e^{t} \end{Bmatrix}$$

Luego, expresar el resultado de forma vectorial:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} C_1e^{5t} + \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} C_2e^{t}$$

2. Determinar la solución para el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales, aplicando el principio de los operadores de derivación.

$$\begin{Bmatrix} x'' + 2x + y' = 0 \\ x''' + y'' - y = 0 \end{Bmatrix}$$

Solución:

P1. Para resolver este sistema se aplican operadores. Otra forma de representar la derivada es:

$$\begin{Bmatrix} (D^2 + 2)[x] + D[y] = 0 \\ D^3[x] + (D^2 - 1)[y] = 0 \end{Bmatrix}$$

P2. Aplicar matrices de operadores y expresarla en forma matricial $Ax = b$:

$$\begin{pmatrix} D^2 + 2 & D \\ D^3 & D^2 - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

P3. El número de soluciones L.I. es igual al grado del determinante de la matriz operacional, de esa manera se responde a la pregunta anterior.

$$\Delta = \begin{vmatrix} D^2 + 2 & D \\ D^3 & D^2 - 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} - \\ + \end{matrix} = (D^2 + 2)(D^2 - 1) - D^4 = D^4 + D^2 - 2 - D^4 = D^2 - 2;$$

como el grado del polinomio es 2, hay 2 soluciones L.I. Este operador tiene como finalidad anular a la solución x de idéntica manera para y.

P4. El valor $D^2 - 2 = \Delta$, es el operador que anula al sistema, esto permite llevar a un sistema homogéneo de la siguiente manera:

$$\begin{Bmatrix} (D^2-2)[x]=0 \\ (D^2-2)[y]=0 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} x'' - 2x = 0 \\ y'' - 2y = 0 \end{Bmatrix}$$

P5. Resolver las ecuaciones por separado y aplicar el método del polinomio característico:

$$\begin{Bmatrix} r^2 - 2 = 0 \\ (r+\sqrt{2})(r-\sqrt{2}) = 0 \\ r_1 = -\sqrt{2}; r_2 = \sqrt{2} \end{Bmatrix}$$

Entonces, la solución de la función en "x" es:

$$x = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$$

$$x = C_1 e^{\sqrt{2}t} + C_2 e^{-\sqrt{2}t}$$

La solución de la función "y" se realiza de la misma manera, ya que se trata de la misma ecuación característica, pero con otras constantes:

$$y = D_1 e^{\sqrt{2}t} + D_2 e^{-\sqrt{2}t}$$

P6. Determinar los valores de las constantes, para ello relacionar el sistema original y con las soluciones:

$$\begin{Bmatrix} x'' + 2x + y' = 0 \\ x''' + y'' - y = 0 \end{Bmatrix} \; con \; \begin{Bmatrix} x = C_1 e^{\sqrt{2}t} + C_2 e^{-\sqrt{2}t} \\ y = D_1 e^{\sqrt{2}t} + D_2 e^{-\sqrt{2}t} \end{Bmatrix}$$

Derivar las soluciones para sustituir en el sistema:

$$\begin{Bmatrix} x' = \sqrt{2}C_1 e^{\sqrt{2}t} - \sqrt{2}C_2 e^{-\sqrt{2}t} \\ y' = \sqrt{2}D_1 e^{\sqrt{2}t} - \sqrt{2}D_2 e^{-\sqrt{2}t} \end{Bmatrix}$$

Calcular la segunda derivada de cada E.D.:

$$\begin{Bmatrix} x'' = 2C_1 e^{\sqrt{2}t} + 2C_2 e^{-\sqrt{2}t} \\ y'' = 2D_1 e^{\sqrt{2}t} + 2D_2 e^{-\sqrt{2}t} \end{Bmatrix}$$

Derivar, la función "x", hasta la tercera derivada:

$$\begin{Bmatrix} x''' = 2\sqrt{2}C_1 e^{\sqrt{2}t} - 2\sqrt{2}C_2 e^{-\sqrt{2}t} \\ y'' = 2D_1 e^{\sqrt{2}t} + 2D_2 e^{-\sqrt{2}t} \end{Bmatrix}$$

Sustituir, las derivadas calculadas, en la primera ecuación $x'' + 2x + y' = 0$

$$\left(2C_1e^{\sqrt{2}t} + 2C_2e^{-\sqrt{2}t}\right) + 2\left(C_1e^{\sqrt{2}t} + C_2e^{-\sqrt{2}t}\right) + \left(\sqrt{2}D_1e^{\sqrt{2}t} - \sqrt{2}D_2e^{-\sqrt{2}t}\right) = 0$$

Resolver:

$$2C_1e^{\sqrt{2}t} + 2C_2e^{-\sqrt{2}t} + 2C_1e^{\sqrt{2}t} + 2C_2e^{-\sqrt{2}t} + \sqrt{2}D_1e^{\sqrt{2}t} - \sqrt{2}D_2e^{-\sqrt{2}t} = 0$$

Reducir términos, para obtener:

$$\left(4C_1 + \sqrt{2}D_1\right)e^{\sqrt{2}t} + \left(4C_2 - \sqrt{2}D_2\right)e^{-\sqrt{2}t} = 0$$

Igualar las expresiones:

$$\begin{Bmatrix} 4C_1 + \sqrt{2}D_1 = 0 \\ 4C_2 - \sqrt{2}D_2 = 0 \end{Bmatrix} \to \begin{Bmatrix} \sqrt{2}D_1 = -4C_1 \\ \sqrt{2}D_2 = 4C_2 \end{Bmatrix} \to \begin{Bmatrix} D_1 = -2\sqrt{2}C_1 \\ D_2 = 2\sqrt{2}C_2 \end{Bmatrix}$$

P7. Sustituir estos valores para tener la solución en función de las dos constantes,

$$\begin{Bmatrix} x = C_1e^{\sqrt{2}t} + C_2e^{-\sqrt{2}t} \\ y = -2\sqrt{2}C_1e^{\sqrt{2}t} + 2\sqrt{2}C_2e^{-\sqrt{2}t} \end{Bmatrix}$$

Se obtendrá la siguiente función vectorial:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} C_1e^{\sqrt{2}t} + C_2e^{-\sqrt{2}t} \\ -2\sqrt{2}C_1e^{\sqrt{2}t} + 2\sqrt{2}C_2e^{-\sqrt{2}t} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1e^{\sqrt{2}t} \\ -2\sqrt{2}C_1e^{\sqrt{2}t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_2e^{-\sqrt{2}t} \\ 2\sqrt{2}C_2e^{-\sqrt{2}t} \end{pmatrix}$$

Factorando, se obtiene la solución:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2\sqrt{2} \end{pmatrix} C_1e^{\sqrt{2}t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2\sqrt{2} \end{pmatrix} C_2e^{-\sqrt{2}t}$$

3. Resolver el sistema $\begin{cases} x' + 6x - 3y = 6t \\ -4x + y' + 8y = 2e^{-t} \end{cases}$

Solución:

Para su resolución se aplica el principio de los operadores de derivación.

P1. Aplicar operadores:

$$\begin{Bmatrix} (D+6)[x]-3[y]=6t \\ -4[x]+(D+8)[y]=2e^{-t} \end{Bmatrix}$$

P2. Eliminar la variable "y", suponiendo que son sistemas comunes y expresar el sistema sólo en términos de la función "x" :

$$\begin{Bmatrix} (D+6)[x]-3[y]=6t \\ -4[x]+(D+8)[y]=2e^{-t} \end{Bmatrix}$$

$$[D+8]F_1+3F_2$$

$$\begin{Bmatrix} (D+8)(D+6)[x]-3[y](D+8)=(D+8)6t \\ -4.3[x]+3(D+8)[y]=3.2e^{-t} \end{Bmatrix}$$

$$(D+8)(D+6)[x]-12[x]=(D+8)6t+6e^{-t}$$

P3. Resolver:

$$(D^2+14D+48)[x]-12[x]=6+48t+6e^{-t}$$

$$(D^2+14D+36)[x]=6+48t+6e^{-t}$$

P4. Observar e identificar que se trata de una ecuación diferencial de segundo orden. Expresar otra vez en forma de derivadas.

$$x''+14x'+36x=6+48t+6e^{-t}$$

P5. Resolver la ecuación homogénea:

$$x''+14x'+36x=0$$

$$r^2+14r+36=0$$

Aplicar la fórmula de segundo grado:

$$r=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2.a}$$

$$r=\frac{-14\pm\sqrt{14^2-4(1)(36)}}{2(1)}$$

$$r=\frac{-14\pm\sqrt{196-144}}{2}$$

$$r = \frac{-14 \pm \sqrt{52}}{2}$$

$$r = \frac{-14 \pm \sqrt{4 * 13}}{2}$$

$$r = \frac{-14 \pm 2\sqrt{13}}{2}$$

$$r = -7 \pm \sqrt{13}$$

Es decir:

$$r_1 = -7 + \sqrt{13};\ r_2 = -7 - \sqrt{13}$$

Escribir la solución homogénea:

$$x = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$$

$$x_h = C_1 e^{(-7+\sqrt{13})t} + C_2 e^{(-7-\sqrt{13})t}$$

P6. Encontrar la solución particular con el método de coeficientes indeterminados:

$$x'' + 14x' + 36x = 6 + 48t + 6e^{-t}$$

$$x_p = A + Bt + Ce^{-t}$$

Calcular la primera y segunda derivada:

$$\begin{cases} x'_p = B - Ce^{-t} \\ x''_p = Ce^{-t} \end{cases}$$

Sustituir estos valores en la ecuación diferencial $x'' + 14x' + 36x = 6 + 48t + 6e^{-t}$:

$$Ce^{-t} + 14(B - Ce^{-t}) + 36(A + Bt + Ce^{-t}) = 6 + 48t + 6e^{-t}$$

$$Ce^{-t} + 14B - 14Ce^{-t} + 36A + 36Bt + 36Ce^{-t} = 6 + 48t + 6e^{-t}$$

$$23Ce^{-t} + 14B + 36A + 36Bt = 6 + 48t + 6e^{-t}$$

Aplicar la igualdad de polinomios para construir el sistema lineal:

$$\begin{cases} 23C = 6 \\ 36B = 48 \\ 14B + 36A = 6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} C = \dfrac{6}{23} \\ B = \dfrac{4}{3} \\ 14\left(\dfrac{4}{3}\right) + 36A = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C = \dfrac{6}{23} \\ B = \dfrac{4}{3} \\ A = -\dfrac{19}{54} \end{cases}$$

Sustituir los valores en la solución particular:

$$x_p = -\frac{19}{54} + \frac{4}{3}t + \frac{6}{23}e^{-t}$$

La solución en "x" es:

$$x(t) = x_h + x_p = C_1 e^{(-7+\sqrt{13})t} + C_2 e^{(-7-\sqrt{13})t} - \frac{19}{54} + \frac{4}{3}t + \frac{6}{23}e^{-t}$$

P7. Encontrar la función "y". Considerar la primera ecuación diferencial:

$$x' + 6x - 3y = 6t$$

Despejar "y" de la primera ecuación del sistema:

$$x' + 6x - 6t = 3y$$

Encontrar x'

$$x'(t) = \left(-7 + \sqrt{13}\right)C_1 e^{(-7+\sqrt{13})t} + \left(-7 - \sqrt{13}\right)C_2 e^{(-7-\sqrt{13})t} + \frac{4}{3} - \frac{6}{23}e^{-t}$$

Sustituir los valores en la ecuación:

$$\begin{aligned} &\left(-7 + \sqrt{13}\right)C_1 e^{(-7+\sqrt{13})t} + \left(-7 - \sqrt{13}\right)C_2 e^{(-7-\sqrt{13})t} + \frac{4}{3} - \frac{6}{23}e^{-t} \\ &\qquad + 6\left(C_1 e^{(-7+\sqrt{13})t} + C_2 e^{(-7-\sqrt{13})t} - \frac{19}{54} + \frac{4}{3}t + \frac{6}{23}e^{-t}\right) - 6t = 3y \end{aligned}$$

Multiplicar los factores:

$$-7C_1e^{(-7+\sqrt{13})t}+\sqrt{13}C_1e^{(-7+\sqrt{13})t}-7C_2e^{(-7-\sqrt{13})t}-\sqrt{13}C_2e^{(-7-\sqrt{13})t}+\frac{4}{3}-\frac{6}{23}e^{-t}$$
$$+6C_1e^{(-7+\sqrt{13})t}+6C_2e^{(-7-\sqrt{13})t}-\frac{19}{9}+8t+\frac{36e^{-t}}{23}-6t=3y$$

Agrupar los términos semejantes:

$$-C_1e^{(-7+\sqrt{13})t}+\sqrt{13}C_1e^{(-7+\sqrt{13})t}-C_2e^{(-7-\sqrt{13})t}-\sqrt{13}C_2e^{(-7-\sqrt{13})t}-\frac{7}{9}+\frac{30e^{-t}}{23}+2t=3y$$

Despejar "y":

$$y(t)=\frac{-1+\sqrt{13}}{3}C_1e^{(-7+\sqrt{13})t}+\frac{-1-\sqrt{13}}{3}C_2e^{(-7-\sqrt{13})t}-\frac{7}{27}+\frac{10e^{-t}}{23}+\frac{2t}{3}$$

EJERCICIO PROPUESTO

Hallar la solución del sistema de ecuaciones diferenciales:

$\begin{Bmatrix} x' + 2y' = 4x + 5y \\ 2x' - y' = 3x \end{Bmatrix}$ con las condiciones $\begin{Bmatrix} x(0) = 1 \\ y(0) = -1 \end{Bmatrix}$

6.9 Sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

FORMA NORMAL DE UN SISTEMA

El sistema normal con dos funciones desconocidas es de la forma: $\begin{Bmatrix} x' = F_1(x,y,t) \\ y' = F_2(x,y,t) \end{Bmatrix}$

En el lado derecho deben aparecer derivadas. Se desea que en el lado izquierdo aparezca una derivada de primer orden.

El sistema normal con tres funciones desconocidas es:

$$\begin{Bmatrix} x' = F_1(x,y,z,t) \\ y' = F_2(x,y,z,t) \\ z' = F_3(x,y,z,t) \end{Bmatrix},$$

generalizando se tiene:

$$\begin{Bmatrix} x_1' = F_1(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \\ x'_2 = F_2(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \\ x'_n = F_n(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \end{Bmatrix}$$

EJERCICIO RESUELTO 1

Dar la especificación de los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales.

a. $\begin{Bmatrix} x' = 2x + 3y \\ y' = 5x - 2y \end{Bmatrix}$

b. $\begin{Bmatrix} x' = 4x + y - 4t^2 \\ y' = 2x - 3y - 1 \end{Bmatrix}$

c. $\begin{Bmatrix} x' = x^2 + y^2 \\ y' = 2xy \end{Bmatrix}$

Solución:

a. $\begin{Bmatrix} x' = 2x + 3y \\ y' = 5x - 2y \end{Bmatrix}$, es un sistema normal homogéneo.

b. $\begin{Bmatrix} x' = 4x + y - 4t^2 \\ y' = 2x - 3y - 1 \end{Bmatrix}$, es un sistema lineal no homogéneo en forma normal.

c. $\begin{Bmatrix} x' = x^2 + y^2 \\ y' = 2xy \end{Bmatrix}$, sistema no lineal.

NOTA. Todo sistema de ecuaciones diferenciales, sean homogéneas, no homogéneas, lineales no lineales se pueden transformar a normales, como se mostrará en los siguientes ejemplos.

EJERCICIO RESUELTO 2

Transformar a un sistema normal, $\begin{Bmatrix} x'' + 3y' = 5t \\ y''' + 2x = 3t^2 \end{Bmatrix}$.

Solución:

El sistema no es de la forma normal por cómo están sus derivadas, por lo que se debe transformarlas.

P1. Cuando se tienen derivadas mayores a orden uno, se introduce una nueva función menor al orden que aparezca en la ecuación. La primera ecuación, será de orden dos.

PRIMERA ECUACIÓN (Orden 2) $x'' + 3y' = 5t$. La función que se introduce es $x' = u$,

ya que al no aparecer otra derivada respecto a "x", se tiene $x'' = u'$.

SEGUNDA ECUACIÓN (Orden 3) $y''' + 2x = 3t^2$. La función que se introduce es:

$y' = v$; y como hay la segunda derivada con respecto a "y", se introduce otra función, es decir:

$y'' = w;\ y''' no\ hace\ falta$ ya que $y''' = w'$.

Sustituir en cada ecuación para que quede solo una derivada. Por tanto, hace falta encontrar $x'' = u'$ de igual manera $y'' = w; y''' = w'$

$\begin{Bmatrix} u' + 3v = 5t \\ w' + 2x = 3t^2 \end{Bmatrix}$ ahora se puede obtener la ecuación normal.

Observar que al hacer estos cambios se tienen cinco variables, por lo que se necesita encontrar cinco ecuaciones diferenciales, el sistema final en forma normal, es:

$$\begin{Bmatrix} u' = 5t - 3v \\ w' = 3t^2 - 2x \\ x' = u \\ y' = v \\ v' = w \end{Bmatrix}$$

EJERCICIO RESUELTO 3

Transformar a un sistema normal, $\begin{Bmatrix} x' + 5y' + 3y = t \\ 3x + 2x' - 2y' = t^2 \end{Bmatrix}$.

Solución: Cuando se tiene el sistema de esta forma, debe tratarse como si fuesen funciones algebraicas para aplicar eliminación Gaussiana:

P1. Separar las derivadas de las variables:

$$\begin{Bmatrix} x' + 5y' + 3y = t \\ 3x + 2x' - 2y' = t^2 \end{Bmatrix} \to \begin{Bmatrix} x' + 5y' = t - 3y \\ 2x' - 2y' = t^2 - 3x \end{Bmatrix}$$

P2. Resolver el sistema como si las derivadas x', y' fueran las incógnitas, así realizando la eliminación a la primera ecuación multiplicando por (-2), se obtiene:

$$\left\{\begin{matrix} x' + 5y' = t - 3y \ \ (-2) \\ 2x' - 2y' = t^2 - 3x \end{matrix}\right\} \to \left\{\begin{matrix} -2x' - 10y' = -2t + 6y \\ 2x' - 2y' = t^2 - 3x \end{matrix}\right\}$$

$$-12y' = -2t + t^2 + 6y - 3x$$

Es decir, $y' = -\frac{1}{12}(t^2 - 2t - 3x + 6y)$, que es la forma normal.

Realizar el mismo procedimiento para x':

$$\left\{\begin{matrix} x' + 5y' = t - 3y \ \ (2) \\ 2x' - 2y' = t^2 - 3x \ \ \ (5) \end{matrix}\right\} \to \left\{\begin{matrix} 2x' + 10y' = 2t - 6y \\ 10x' - 10y' = 5t^2 - 15x \end{matrix}\right\} \to$$

$$12x' = 5t^2 + 2t - 6y - 15x$$

Es decir, $x' = \frac{5t^2+2t-6y-15x}{12}$, que es la forma normal.

EJERCICIO RESUELTO 4

Resolver la ecuación $x''' + 5x'' + 2tx' + 4x = 5cost$

Solución:

P1. Como se observa, no es un sistema, pero puede ser transformado, aplicando los principios de introducción de una nueva función, $\left\{\begin{matrix} x' = y \\ x'' = z \end{matrix}\right\}$ para determinar x''' derivar $x'' = z'$

P2. Sustituir $z' + 5z + 2ty + 4x = 5cost$, con esta información se tienen tres incógnitas, por tanto, se necesitan tres ecuaciones:

$$\left\{\begin{matrix} z' = -5z - 2ty - 4x + 5cost \\ x' = y \\ y' = z \end{matrix}\right\}$$

6.10 Método de la forma matricial

La ecuación diferencial es lineal, homogénea y de coeficientes constantes, recordar que la forma de representar un sistema de ecuaciones lineales en forma matricial es $Ax = b$, donde A es la matriz dada por los coeficientes de las variables del sistema, "x" es el vector de las variables, "b" es la matriz de los términos independientes.

Otra manera de expresar:

$$x'(t) = A * x(t)$$

Donde el sistema es de dos ecuaciones, por tanto sus elementos son:

$$\begin{pmatrix} x_1{}' \\ x_2{}' \end{pmatrix} = A * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

"A" es la matriz de coeficientes y servirá para resolver el sistema.

Solución:

1. La solución es de forma exponencial, $x = e^{\lambda t}\vec{v}$, en donde "λ" son los valores propios de la matriz de coeficientes, $\vec{v}$ son los valores propios del vector.

2. Luego se debe determinar los valores propios de "λ" mediante el cálculo del determinante, $|A - \lambda I| = 0$, de donde se obtendrán las raíces del polinomio característico.

3. Calcular los vectores propios y resolver $(A - \lambda I)\vec{v} = 0$:

$$\begin{aligned} \lambda = \lambda_1 &\rightarrow [A - \lambda_1 I][v_1] = \vec{0} \\ \lambda = \lambda_2 &\rightarrow [A - \lambda_2 I][v_2] = \vec{0} \\ &\cdots \\ \lambda = \lambda_n &\rightarrow [A - \lambda_n I][v_n] = \vec{0} \end{aligned}$$

4. Las soluciones son:

$$\begin{aligned} x_1 &= e^{\lambda_1 t}\vec{v}_1 \\ x_2 &= e^{\lambda_2 t}\vec{v}_2 \\ &\ldots \\ x_n &= e^{\lambda_n t}\vec{v}_n \end{aligned}$$

5. Las cuales son L.I., entonces va existir una solución general del sistema:

$$x(t) = C_1 x_1 + C_2 x_2 + \cdots + C_n x_n$$

A continuación, se presenta un ejercicio para sustentar la explicación.

EJERCICIO RESUELTO 1

Resolver por el método de matrices el siguiente sistema: $\begin{Bmatrix} x' = 2x + y \\ y' = 5x - 2y \end{Bmatrix}$.

Solución:

P1. Transformar el sistema de ecuaciones a forma matricial:

$$x'(t) = A * x(t)$$

$$A * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1{}' \\ x_2{}' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1{}' \\ x_2{}' \end{pmatrix}$$

El vector consta de las primeras derivadas y recuerde que x_1, x_2 son funciones desconocidas que van a depender de t.

Sea $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, es un vector que depende de t, para cada valor.
Derivando $\vec{x}' = \begin{pmatrix} x_1{}' \\ x_2{}' \end{pmatrix}$ y de la forma general $A\vec{x} = \vec{x}'$, se conoce que la matriz $A\ es$ $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$

P2. Calcular los valores propios:

$$|A - \lambda I| = 0$$

$$\left| \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 5 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(2-\lambda)(-2-\lambda) - 5 = 0$$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2\lambda - 4 - 5 = 0$$

$$\lambda^2 - 9 = 0$$

$$(\lambda + 3)(\lambda - 3) = 0$$

$$\lambda_1 = -3;\ \lambda_2 = 3$$

P3. Determinar los correspondientes vectores propios:

Para $\lambda_2 = 3$

$$(A - \lambda I)\vec{v} = 0$$

$$(A - 3I)\vec{v} = 0$$

$$\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \right) \vec{v}_2 = 0$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 5 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -v_1 + v_2 = 0 \\ 5v_1 - 5v_2 = 0 \end{cases}$$

Para encontrar el vector propio se debe determinar la relación que existe entre v_1 y v_2.

$$v_1 = v_2$$

Así el vector solución particular:

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

Es decir $v_1 = 1$ entonces $v_2 = 1$

El vector será:

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Si se da otro, por ejemplo, el valor $v_1 = 2$

entonces $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

En general el vector:

$$v = k\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Cabe señalar que se elige cualquiera de los vectores, lo importante es establecer su relación.

La solución es:

$$x_2 = e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Para hallar x_1, para $\lambda_1 = -3$, se tiene:

$$(A - \lambda I)\vec{v} = 0$$

$$(A + 3I)\vec{v} = 0$$

$$\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\right) v_1 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 5v_1 + v_2 = 0 \\ 5v_1 + v_2 = 0 \end{cases}$$

Para encontrar el vector propio se determina la relación que existe entre v_1 y v_2.

$$5v_1 = -v_2$$

Así si $v_1 = 1$ entonces $v_2 = -5$, dando otras alternativas:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ -25 \end{pmatrix} \text{ entonces } v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -10 \end{pmatrix}$$

$$v_1 = k\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Cabe señalar que se elige cualquiera de los vectores, lo importante es establecer su relación.

La solución es:

$$x_1 = e^{-3t}\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

P5. Son L.I., entonces va a existir una solución general del sistema:

$$x(t) = C_1x_1 + C_2x_2 + \cdots + C_nx_n$$

$$x(t) = C_1e^{-3t}\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix} + C_2e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

En forma matricial se tiene:

$$x(t) = \begin{pmatrix} C_1e^{-3t} & C_2e^{3t} \\ -5C_1e^{-3t} & C_2e^{3t} \end{pmatrix}$$

OBSERVACIÓN: Todos los sistemas que se han resuelto son homogéneos de coeficientes constantes.

NOTA: Para sistemas con 3 incógnitas se procede de igual manera.

EJERCICIO RESUELTO 2

1. Resolver el siguiente sistema, que se presenta en forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} x_1{}' = x_2 \\ x_2{}' = x_3 \\ x_3{}' = 4x - 7y + 3z \end{Bmatrix}$$

Solución:

P1. Partir de la forma matricial dada y escribir el sistema de la siguiente manera:

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & 7 & 3 \end{pmatrix}.\vec{x}$$

$$\begin{pmatrix} x_1{}' \\ x_2{}' \\ x_3{}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & 7 & 3 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Finalmente, se tiene: $x(t) = C_1 e^{t}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + C_2 e^{4t}\begin{pmatrix}1\\4\\16\end{pmatrix} + C_3 e^{2t}\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$

6.11 Problemas con coeficientes variables

A continuación, se presentan ejercicios del método matricial con coeficiente variables.

EJERCICIO RESUELTO

Escribir el sistema de ecuaciones diferenciales, partiendo del sistema expresado en forma matricial:

$$\boldsymbol{\vec{x}'} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{2t} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{t^2}\\ \boldsymbol{3} & \boldsymbol{cost} & \boldsymbol{t+1}\\ \boldsymbol{5} & \boldsymbol{e^t} & \boldsymbol{2}\end{pmatrix}.\boldsymbol{\vec{x}}$$

Solución.

P1. Escribir el vector:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

P2. Escribir el vector con sus derivadas:

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$$

P3. Hallar el sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2t & 1 & t^2\\ 3 & cost & t+1\\ 5 & e^t & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} x' = 2tx + y + zt^2\\ y' = 3x + (cost)y + (t+1)z\\ z' = 5x + e^t y + 2z\end{Bmatrix}$$

6.12 Métodos de resolución

Otro método de resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales, consisten en la aplicación métodos para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, estudiado en algebra lineal, como:

1. Eliminación Gaussiana, escalonada.
2. Igualación.
3. Sustitución.
4. Regla de Crammer.
5. Matricial.

EJERCICIO RESUELTO

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} x' = x + y \\ y' = 3x - y \end{cases}$$

Solución:

P1. Si se llaman ecuación 1 y 2, respectivamente:

$$\begin{cases} x' = x + y & Ec\ 1 \\ y' = 3x - y & Ec\ 2 \end{cases}$$

P2. Despejar "y" de la ecuación 1 y derivar.

$$y = x' - x$$

$$y' = x'' - x'$$

P3. Sustituir en la segunda ecuación:

$$y' = 3x - y$$
$$x'' - x' = 3x - (x' - x)$$

Y se tiene una ecuación solo en "x" y sus derivadas.

P4. Escribir en forma normal:

$$x'' - x' = 3x - x' + x$$

$$x'' = 4x$$
$$x'' - 4x = 0$$

P5. Como es un ED homogénea, se resuelve aplicando el polinomio característico:

$$r^2 - 4 = 0$$

$$(r + 2)(r - 2) = 0$$

$$\begin{cases} r_1 = -2 \\ r_2 = 2 \end{cases}$$

La solución en términos de la variable "x" es:

$$x = C_1e^{-2t} + C_2e^{2t}$$

P6. Encontrar la solución de "y", para ello se toma la ecuación despejada:

$$y = x' - x$$

Se necesita x', para eso derivar la ecuación determinada en el paso P5.

$$x' = -2C_1e^{-2t} + 2C_2e^{2t}$$

Sustituir,

$$y = -2C_1e^{-2t} + 2C_2e^{2t} - C_1e^{-2t} - C_2e^{2t}$$

$$y = -3C_1e^{-2t} + C_2e^{2t}$$

La solución es:

$$\begin{cases} x = C_1e^{-2t} + C_2e^{2t} \\ y = -3C_1e^{-2t} + C_2e^{2t} \end{cases}$$

En forma vectorial

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} C_1e^{-2t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} C_2e^{2t}$$

6.12.1 Método de resolución por parámetro

Este método es similar al método de matrices, y se fundamentará el desarrollo ya que este método hace hincapié en el uso de determinantes, valores propios y valores propios vectoriales.

La metodología de aplicación se ilustra mediante la resolución del siguiente ejercicio.

EJERCICIO RESUELTO

1. Resolver el sistema $\vec{x}' = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} 3t \\ e^{-t} \end{pmatrix}$.

Solución:

P1. Resolver la ecuación por $det(A - \lambda I) = 0$

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} -3 - \lambda & 1 \\ 2 & -4 - \lambda \end{pmatrix}$$

Ahora, se debe calcular el determinante:

$$\begin{vmatrix} -3-\lambda & 1 \\ 2 & -4-\lambda \end{vmatrix} = (-3-\lambda)(-4-\lambda) - 2$$

$$= 12 + 3\lambda + 4\lambda + \lambda^2 - 2 = \lambda^2 + 7\lambda + 10 = 0$$

Esta ecuación es el polinomio característico:

$$\lambda_1 = -2;\ \lambda_2 = -5$$

P2. Calcular los vectores propios resolviendo $(A - \lambda I)\vec{v} = 0$

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} -3-\lambda & 1 \\ 2 & -4-\lambda \end{pmatrix}$$

Sustituir el valor $\lambda = -2$

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} -3-(-2) & 1 \\ 2 & -4-(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3+2 & 1 \\ 2 & -4+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Aplicar $(A - \lambda I)\vec{v} = 0$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Formando una de las ecuaciones:

$$-a + b = 0 \to a = b$$

Dando un valor:

$$a = 1; b = 1$$

$$\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Proceder con el otro valor $\lambda_2 = -5$

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} -3-(-5) & 1 \\ 2 & -4-(-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3+5 & 1 \\ 2 & -4+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Aplicar $(A - \lambda I)\vec{v} = 0$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Formar una de las ecuaciones:

$$2a + b = 0 \to b = -2a$$

Dar cualquier valor $a = 1; b = -2$ y obtener el otro valor propio:

$$\overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

P3. Escribir la solución del sistema homogéneo:

$$\vec{x} = C_1\overrightarrow{v_1}e^{\lambda_1 t} + C_2\overrightarrow{v_2}e^{\lambda_2 t}$$

$$\overrightarrow{x_c} = C_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{-2t} + C_2\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}e^{-5t}$$

P4. Para calcular la solución particular se utilizará el método de variación de parámetros:

$$\overrightarrow{x_1} = \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ e^{-2t} \end{pmatrix}; \quad \overrightarrow{x_2} = \begin{pmatrix} e^{-5t} \\ -2e^{-5t} \end{pmatrix}$$

Escribir la matriz fundamental:

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} e^{-2t} & e^{-5t} \\ e^{-2t} & -2e^{-5t} \end{pmatrix}$$

Aplicar la fórmula de variación de parámetros:

$$\overrightarrow{x_p} = \phi(t)\int \phi(t)^{-1}F(t)dt$$

Se debe calcular la inversa, recordar que:

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ entonces la matriz inversa $A^{-1} = \frac{1}{detA}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Calcular el determinante de la matriz:

$$det\phi(t) = \begin{vmatrix} e^{-2t} & e^{-5t} \\ e^{-2t} & -2e^{-5t} \end{vmatrix} = -2e^{-7t} - e^{-7t} = -3e^{-7t}$$

Calcular la inversa:

$$\phi(t)^{-1} = \frac{1}{-3e^{-7t}}\begin{pmatrix} -2e^{-5t} & -e^{-5t} \\ -e^{-2t} & e^{-2t} \end{pmatrix}$$

$$\phi(t)^{-1} = \frac{e^{7t}}{-3}\begin{pmatrix} -2e^{-5t} & -e^{-5t} \\ -e^{-2t} & e^{-2t} \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2e^{2t} & e^{2t} \\ e^{5t} & -e^{5t} \end{pmatrix}$$

Sustituir:

$$\overrightarrow{x_p} = \phi(t)\int \phi(t)^{-1}F(t)dt$$

$$\overrightarrow{x_p} = \begin{pmatrix} e^{-2t} & e^{-5t} \\ e^{-2t} & -2e^{-5t} \end{pmatrix} \int \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2e^{2t} & e^{2t} \\ e^{5t} & -e^{5t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3t \\ e^{-t} \end{pmatrix} dt$$

$$\overrightarrow{x_p} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} e^{-2t} & e^{-5t} \\ e^{-2t} & -2e^{-5t} \end{pmatrix} \int \begin{pmatrix} 6te^{2t} + e^{t} \\ 3te^{5t} - e^{4t} \end{pmatrix} dt$$

$$\overrightarrow{x_p} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} e^{-2t} & e^{-5t} \\ e^{-2t} & -2e^{-5t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6\displaystyle\int te^{2t}dt + \int e^{t}dt \\ 3\displaystyle\int te^{5t} - \int e^{4t} \end{pmatrix}$$

Hallar la integral de $\int te^{2t}dt$ aplicando ILATE con los signos $+, -$ cruzados:

Derivada	**Integral**
t	e^{2t}
1	$+\dfrac{e^{2t}}{2}$
0	$-\dfrac{e^{2t}}{4}$

Integrar la función vectorial por partes:

$$\overrightarrow{x_p} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} e^{-2t} & e^{-5t} \\ e^{-2t} & -2e^{-5t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3te^{2t} - \dfrac{3}{2}e^{2t} + e^{t} \\ \dfrac{3te^{5t}}{5} - \dfrac{3e^{5t}}{25} - \dfrac{e^{4t}}{4} \end{pmatrix}$$

Resolviendo esta multiplicación de matrices:

$$\overrightarrow{x_p} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3t - \dfrac{3}{2} + e^{-t} + \dfrac{3}{5}t - \dfrac{3}{25} - \dfrac{e^{-t}}{4} \\ 3t - \dfrac{3}{2} + e^{-t} - \dfrac{6}{5}t + \dfrac{6}{25} + \dfrac{e^{-t}}{2} \end{pmatrix}$$

Reduciendo términos semejantes:

$$\overrightarrow{x_p} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \dfrac{18t}{5} - \dfrac{81}{50} + \dfrac{3e^{-t}}{4} \\ \dfrac{9}{5}t - \dfrac{63}{50} + \dfrac{3e^{-t}}{2} \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{x_p} = \begin{pmatrix} \dfrac{6t}{5} - \dfrac{27}{50} + \dfrac{e^{-t}}{4} \\ \dfrac{3}{5}t - \dfrac{21}{50} + \dfrac{e^{-t}}{2} \end{pmatrix}$$

Llegando a la solución general,

$$\vec{x} = \overrightarrow{x_h} + \overrightarrow{x_p}$$

$$\vec{x} = C_1\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}e^{-2t} + C_2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}e^{-5t} + \begin{pmatrix}\frac{6t}{5} - \frac{27}{50} + \frac{e^{-t}}{4}\\ \frac{3}{5}t - \frac{21}{50} + \frac{e^{-t}}{2}\end{pmatrix}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Resolver el sistema $\begin{cases} x' = x - 5y \\ y' = x - y \end{cases}$

2. Resolver el sistema $\begin{cases} x' = 3x + 5y \\ y' = -4x - y \\ x(0) = 2; y(0) = 1 \end{cases}$

3. Resolver el sistema $\begin{cases} x' = 3x - \frac{y}{2} - 3t^2 - \frac{t}{2} + \frac{3}{2} \\ y' = 2y - 2t - 1 \end{cases}$

   Resp. $\begin{cases} x = C_1e^{2t} + C_2e^{3t} + t^2 + 1 \\ y = 2C_1e^{2t} + t + 1 \end{cases}$

4. Resolver el sistema $\begin{cases} x' = 2x - 9y \\ y' = x + 8y \end{cases}$

   Resp. $\begin{cases} x = C_1e^{5t} - 3C_1te^{5t} - 3C_2e^{5t} \\ y = C_1e^{5t} + C_2te^{5t} \end{cases}$

5. Resolver el sistema $\begin{cases} x' = y + z \\ y' = 3x + z \\ z' = 3x + y \end{cases}$

   Resp. $\begin{cases} x = C_1e^{-2t} + C_2e^{3t} \\ y = \frac{3}{2}C_1e^{3t} - C_2e^{-3t} - C_3e^{-t} \\ z = \end{cases}$

6. Resolver el sistema $\begin{cases} x' = 8y \\ y' = -2z \\ z' = 2x + 8y - 2z \end{cases}$

Resp. $\begin{cases} x = C_1e^{-2t} + C_2cos4t + C_3sen4t \\ y = -\frac{1}{4}C_1e^{-2t} + \frac{1}{2}C_2cos4t - \frac{1}{2}C_3sen4t \\ z = -\frac{1}{4}C_1e^{-2t} + C_2cos4t + C_3sen4t \end{cases}$

7. Resolver el sistema $\begin{cases} x' = 2x + y - 2z - t + 2 \\ y' = 1 - x \\ z' = x + y - z - t + 1 \end{cases}$

Resp. $\begin{cases} x = C_1e^{-2t} + C_2cos4t + C_3sen4t \\ y = -\frac{1}{4}C_1e^{-2t} + \frac{1}{2}C_2cos4t - \frac{1}{2}C_3sen4t \\ z = -\frac{1}{4}C_1e^{-2t} + C_2cos4t + C_3sen4t \end{cases}$

8. Resolver el sistema $\begin{cases} x' = -4x - 4y \\ x' - 4y' = -4y \\ x(0) = 1; y(0) = 0 \end{cases}$

Resp. $\begin{cases} x = C_1e^{-2t} + C_2te^{-2t} \\ -4y = 2C_1e^{-2t} + C_2e^{-2t} + 2C_2te^{-2t} \end{cases}$

$\begin{cases} x = (1 - 2t)e^{-t} \\ y = te^{-2t} \end{cases}$

9. Resolver el sistema $\begin{cases} x' + y' = e^{-t} - y \\ 2x' + y' = sent - 2y \\ x(0) = -2; y(0) = 1 \end{cases}$

Resp. $\begin{cases} x = -cost - sent - e^{-t} + C_1t + C_2 \\ y = -2e^{-t} + cost + C_1 \end{cases}$

$\begin{cases} x = -cost - sent - e^{-t} + 2t \\ y = -2e^{-t} + cost + 2 \end{cases}$

10. Resolver el sistema $\begin{cases} x' + 2y' = 17x + 8y \\ 13x' = 53x + 2y \\ x(0) = 2; y(0) = -1 \end{cases}$

Resp. $\begin{cases} x = C_1e^{3t} + C_2e^{5t} \\ y = -7C_1e^{3t} + 6C_2e^{5t} \end{cases}$

$\begin{cases} x = e^{3t} + e^{5t} \\ y = -7e^{3t} + 6e^{5t} \end{cases}$

Bibliografía

Apostol, Tom M. (2002). *Calculus.* Volumen II. 2da Ed., 7ma Reimpresión. Editorial Reverté Ediciones,

Banach, Stefan. (1967). *Cálculo diferencial e integral*. (2da. ed.) Unión Tipográfica Editorial Hispano Americana.

Baranenkov, G.; Demidovich, V.; Efimenko, V.; Kogan, S.; Lunts, G.; Porshneva, E.; Sichova, E.; Frolov, S.; Shostak, R. & Yanpolski, A. (1967). *Problemas y ejercicios de análisis matemático*. (2da ed.). Editorial Mir.

Betz, H., Burcham, P. B. &Ewing, G. M. (1977). *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones*. Editorial Harla.

Boyce, W. E. & DiPrima, R. C. (1994). Introducción a las ecuaciones diferenciales. (7ma Reimp.), Editorial Limusa.

Boyce, W. E., & DiPrima, R. C. (2009). *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera*. (4ta. ed.). Editorial Limusa.

Campbell, S. L. & Haberman, R. (1998). *Introducción a las ecuaciones diferenciales con problemas de valor de frontera.* (1ra ed.) Editorial McGraw-Hill.

Castro, L. (2022). *Ecuaciones diferenciales ordinarias. Teoría y ejercicios resueltos*. CIDE Editorial.

Churchill, R. V. (1977). *Series de Fourier y problemas de contorno*. (2da. ed.) Editorial McGraw-Hill.

Dankó, P.E. & Popov, A.G.; Kozhévnikova. (1983). *Matemáticas superiores en ejercicios y problemas,* Parte 1. Editorial Mir.

Dankó, P.E.; Popov, A.G. & Kozhévnikova. (1983). *Matemáticas superiores en ejercicios y problemas*, Parte 2. Editorial Mir.

Espinoza, E. (2004).*Ecuaciones diferenciales y aplicaciones para estudiantes de ciencias e ingeniería*. (6da. ed.) Editorial Servicios Gráficos.

Espinoza, E. (2008). *Análisis matemático IV para estudiantes de ciencias e ingeniería*. (2da. ed.) Editorial Servicios Gráficos.

Larson, R. & Hostettler, R. P. (2006). *Cálculo con geometría analítica*, Vol. I. (8va ed.), McGraw Hill.

Ross, S. L. & Navarro, C. (1980). *Ecuaciones diferenciales*. (1ra ed). Editorial Reverté.

Seeley, R. T. (1970). Introducción a las Series e Integrales de Fourier. Editorial Reverté.

Series de Fourier y Problemas de Contorno Ruel V. Chijrchill

Spiegel, Murray R. (1983). *Ecuaciones diferenciales aplicadas*. (3ra ed.). Editorial Prentice-Hall Hispanoamericana.

Stuart, R. D. (1965). *Introducción al análisis de Fourier*. Editorial UTEHA.

Teba.E. & Rothe, R. (1959). *Matemática superior para matemáticos, físicos e ingenieros*. Tomo II. Editorial Labor.

Zill, D. G. (2009). *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado*. (9na ed.) Editorial Cengage Learning.

ISBN: 978-9942-679-50-5
9789942679505