Cálculo I

En una variable

Jorge Santiago Tocto Maldonado
Iván Agustín Quizhpe Uchuari

CIDE EDITORIAL

Cálculo I
En una variable

Cálculo I
En una variable

Autores

Jorge Santiago Tocto Maldonado
Iván Agustín Quizhpe Uchuari

Centro de Investigación y Desarrollo Ecuador
Tel.: + (593) 04 2037524
http.:/www.cidecuador.org

ISBN: 978-9942-636-90-4

https://doi.org/10.33996/cide.ecuador.CV2636904

Dirección editorial: Lic. Pedro Misacc Naranjo, Msc.
Coordinación técnica: Lic. María J. Delgado
Diseño gráfico: Lic. Danissa Colmenares
Diagramación: Lic. Alba Gil
Fecha de publicación: julio, 2024

La presente obra fue evaluada por pares académicos experimentados en el área.

Catalogación en la Fuente

Cálculo I en una variable / Jorge Santiago Tocto Maldonado, Iván Agustín Quizhpe Uchuari - Ecuador: Editorial CIDE, 2024.

149 p.: incluye tablas, figuras; 21 x 29,7 cm.

ISBN: 978-9942-636-90-4

1. Cálculo 2. Matemáticas

Semblanza de los autores

Jorge Santiago Tocto Maldonado, Mg. Sc.

https://orcid.org/0000-0002-0455-9333

Correo: santi.tocto@gmail.com

Profesional con estudios de cuarto nivel en Ciencias Matemáticas por la Universidad de La Habana, estudios de tercer nivel en Físico Matemáticas e Ingeniería en Sistemas por la Universidad Nacional de Loja. Importante experiencia en la enseñanza de la Matemática a nivel universitario, así como en la enseñanza de la Matemática y la Física en el nivel de bachillerato. Miembro de la Sociedad Ecuatoriana de Matemática. Becario Senescyt 2012. Representante estudiantil a la Comisión Académica de la Carrera de Físico Matemáticas de la UNL.

Lic. Iván Agustín Quizhpe Uchuari, Mg. Sc.

https://orcid.org/0000-0002-9296-9446

Correo: ivanq8659@gmail.com

Ecuatoriano, casado, residenciado en Loja, es Licenciado en Ciencias de la Educación en la Especialidad de Físico-Matemáticas, en la Universidad Nacional de Loja, Ecuador (2011). Magíster en Pedagogía, Universidad Técnica Particular de Loja, Ecuador (2018). Doctorando en Ciencias Pedagógicas en la Universidad Andina Simón Bolívar (en fase de investigación), Bolivia (2019). Docente de instituciones de nivel medio y de Instituciones de educación superior: Universidad Técnica Particular de Loja y Universidad Nacional de Loja. Autor de libros y artículos de investigación para revistas indexadas. Miembro del comité científico de la revista Tsa'chila, ha participado en cursos, talleres, seminarios y congresos a nivel nacional e internacional.

Dedicatoria

A mi familia, por siempre estar presente.

Ing. Jorge Santiago Tocto Maldonado, Mg. Sc.

Con amor la presente obra va dedicada a toda mi familia, en especial a mi esposa e hijos, a mis padres, hermanos, y a todos que han estado dando muestras de apoyo incondicional.

Lic. Iván Agustín Quizhpe Uchuari, Mg. Sc.

Agradecimiento

Un agradecimiento muy especial a la Universidad Nacional de Loja, en especial a la Carrera de Pedagogía de las Ciencias Experimentales: Matemáticas y la Física y a todos los que han hecho posible la realización de la presente obra; así como un agradecimiento a CIDE y a los diferentes revisores de la obra por ayudarnos en la guía pertinente para realización de la misma.

Contenido

Capítulo 3
La Derivada

Capítulo 4
Otros métodos para calcular límites

Introducción

El libro que a continuación se presenta, fue pensado como material de acompañamiento al curso Cálculo Diferencial que se desarrolla en la Carrera de Pedagogía de las Matemáticas y la Física de la Universidad Nacional de Loja. Su objetivo principal es servir de guía a través del desarrollo de una importante cantidad de ejemplos y ejercicios en los que se detalla cada paso su solución, de tal forma que aquello redunde en un mejor hacer tanto de los docentes como de los estudiantes que se dedican al estudio de esta parte de la Matemática. En este sentido, se da mayor relevancia a la práctica por sobre la teoría, sin que ello signifique que una es más importante que la otra o viceversa; es por esta razón que no se han demostrado los teoremas incluidos en este texto.

En el capítulo 1, se abordan los contenidos referentes a límites de una función real de una sola variable; se inicia con la introducción de la idea intuitiva de límite utilizando la representación numérica de la función, después se trabaja con límites laterales, luego con la definición formal de límite, además se calculan diferentes tipos de límites a través de las leyes de los límites. El capítulo 2, arranca con el análisis de continuidad de una función y el estudio de las condiciones que ella debe cumplir para que lo sea, luego se aborda continuidad en un punto como en un intervalo. En el capítulo 3, se introduce la idea de derivada como el límite del cociente diferencial, posteriormente se revisan las reglas de derivación, sus propiedades y las diferentes técnicas que se utilizan para calcular derivadas.

Finalmente, en el capítulo 4 se retoma el estudio de límites mediante series de potencias, selección de la parte principal de una función entre otras técnicas.

Se deja constancia del reconocimiento a todos aquellos que, con sus sugerencias y útiles consejos, permitieron mejorar las distintas versiones del manuscrito empleado en la construcción del presente trabajo.

Ing. Jorge Santiago Tocto Maldonado, Mg. Sc.
Lic. Iván Agustín Quizhpe Uchuari, Mg. Sc.

Prólogo

Los autores Ing. Jorge Santiago Tocto Maldonado, Mg.Sc. y el Lic. Iván Agustín Quizhpe Uchuari nos ofrecen en esta oportunidad otro excelente texto, titulado *Cálculo I en una variable* el cual fue concebido para guiar y orientar a estudiantes de la carrera de las Matemáticas y la Física de la Universidad Nacional de Loja.

Por su contenido práctico y lenguaje sencillo, este texto ofrece una variedad de ejemplos detallados de forma adecuada y comprensible, fundamentado con conceptos básicos en cuanto al tema se refiere, facilitando además, una serie de ejercicios explicando el paso a paso de cada uno de ellos, lo que le permitirá al estudiante obtener habilidad de razonamiento analítico para la resolución de problemas matemáticos en su área de estudio y su futura ocupación profesional, desarrollando su capacidad de pensamiento abstracto, así como modelado y resolución de problemas.

Del mismo modo, desde el punto de vista teórico se explican los conceptos básicos del cálculo con lenguaje sencillo, todos desarrollados en los 4 capitulos del libro para mayor flexibilidad y eficiencia en el aprendizaje del estudiante y comprende los siguientes tópicos:

Límite, tipos de límites; Continuidad, tipos de continuidad; Derivada, propiedades, funciones; Oros métodos para calcular límites.

Un reconocimiento a la constancia de los autores en continuar con la produccion de importantes investigaciones plasmadas en texto de calidad didáctica que respaldan el aprendizaje de los estudiantes no solo de la Universidad Nacional de Loja, sino también de otras instituciones académicas del país y otras latitudes.

Dr. J.M.Estrada
Universidad Pedagógica Experimental Libertador
Monagas, Venezuela

Capítulo 1

Límites

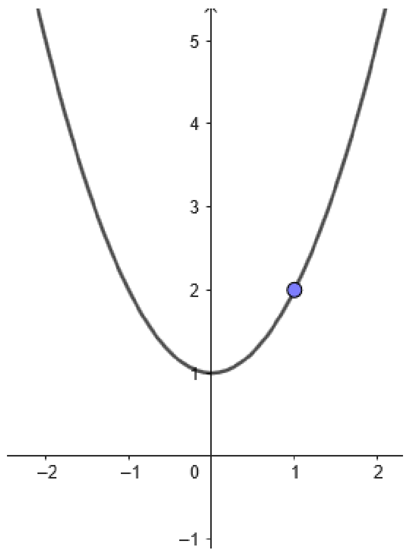
Capítulo 1

Límites

Es necesario antes de empezar con el estudio de los límites es conveniente realizar una introducción de lo que es el cálculo, en este sentido Larson & Edwards (2010) se le considera como la "matemática de los cambios (velocidades y aceleraciones). También son objeto del cálculo rectas tangentes, pendientes, áreas, volúmenes, longitudes de arco, curvaturas y una gran variedad de conceptos que han permitido elaborar modelos para situaciones de la vida real" (p. 42), de ahí la importancia del estudio del cálculo por el amplio campo de aplicación.

Para ello se analizará la siguiente función real:

x	$f(x) = x^2 + 1$
0,5	1,25
0,8	1,64
0,9	1,81
0,99	1,9801
0,999	1,998001
0,9999	1,99980001
1,1	2,21
1,11	2,2321
1,111	2,234321
1,1111	2,23454321
1,12	2,2544



A partir de la tabla y de la gráfica de la función $f(x) = x^2 + 1$, vemos que cuando x está cercano a 1 (tanto por la izquierda o por la derecha), $f(x)$ lo está a 2. Expresamos este hecho de la siguiente manera: el límite de la función $f(x) = x^2 + 1$, cuando x tiende a 1, es igual a 2.

En lenguaje matemático:

$$\lim_{x \to 1}(x^2 + 1) = 2$$

En general:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Y decimos, "el límite de $f(x)$, cuando x tiende a a, es igual a L". Si podemos acercar arbitrariamente los valores de $f(x)$ a L (tanto como deseemos) tomando x lo bastante cerca de a, pero no igual a a.

Nota. Al hallar el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a, nunca consideramos $x = a$; no es necesario que $f(x)$ esté definido cuando $x = a$, solo importa cómo está definida f cerca de a

En el ejercicio la función $\frac{|x|}{x}$ se define de la siguiente manera:

$$\frac{|x|}{x} = \begin{cases} \frac{x}{x} = 1 & para\ x > 0 \\ -\frac{x}{x} = 1 & para\ x < 0 \end{cases}$$

A medida que x se acerca a 0 por la izquierda, la función tiende a -1. Cuando x se aproxima a 0 por la derecha, esta tiende a 1. No existe un número único al que la función se aproxima cuando x tiende a 0. Por lo tanto, $\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$ no existe.

Límites laterales

Anteriormente vemos que $\frac{|x|}{x}$ tiende a -1 cuando x lo hace a 0 por derecha que esta función tiende a 1 cuando x lo hace a 0 por la derecha.

En lenguaje matemático escribimos:

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1 \quad \wedge \quad \lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1$$

Para la definición de límite lateral hay que considerar que x se aproxima al punto a por la derecha o por la izquierda, al respecto Stewart (2012) refiere que:

> Cuando escribimos $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$, estamos diciendo que el límite izquierdo de $f(x)$ cuando x se aproxima a a [o el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a por la izquierda] es igual a L si podemos hacer que los valores de $f(x)$ se acerquen arbitrariamente a L, tanto como queramos, tomando x suficientemente cercanos a a, pero menores que a. (p. 92)

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = L$$

Decimos que el límite izquierdo de $f(x)$ cuando x tiende a a (o el límite de $f(x)$ cuando x se acerca a a desde la izquierda) es igual a L, si podemos acercar los valores de $f(x)$ a L tanto como queramos, escogiendo x lo bastante cerca de a pero nunca menos que a.

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = L$$

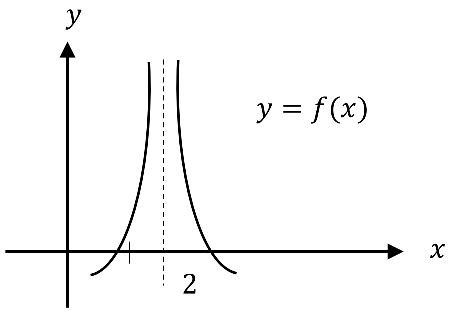
Comparando definiciones anteriores tenemos:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = L \ si\ y\ solo\ si\ \lim_{x \to 0^-} f(x) = L \ \wedge \ \lim_{x \to 0^+} f(x) = L$$

Límites infinitos

Se puede afirmar que una función tiene un límite al infinito si existe un número en el cual la función se acerca a medida que crece; en otras palabras, es decir, $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$. Hay que entender la importancia de los límites infinitos, debido que a partir de ellos se puede comprender el comportamiento de una función a medida que su variable independiente se acerca al infinito o a menos infinito.

Encuentre $\lim_{x \to 2} f(x)$ si existe:



A partir de la gráfica de la función, vemos que a medida que x se aproxima a 2 (tanto por derecha como por la izquierda), los valores de $f(x)$ se hacen cada vez más grandes (no tienden a un mismo número) de tal forma que $\lim_{x \to 2} f(x)$ no existe.

En este caso se dice que $\lim_{x \to 2} f(x) = \infty$

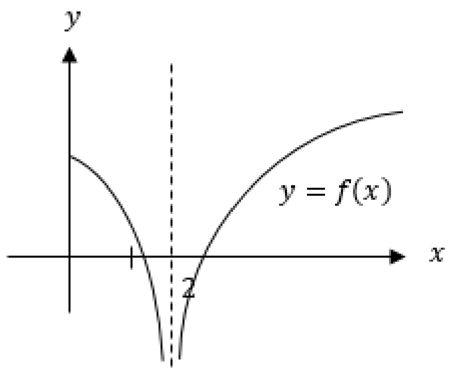
Definición 1

*S*ea una función f definida a ambos lados de a, exceptos tal vez en el mismo. Entonces:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

Significa que los valores de $f(x)$ pueden hacerse arbitrariamente grandes (tan grandes como se quiera) tomando x suficientemente cerca de a pero distinto de a.

Encuentre el límite de $\lim_{x \to 2} f(x)$ si existe



A partir de la gráfica de la función, vemos que a medida que x se aproxima a 2 (por la derecha o por la izquierda), los valores de $f(x)$ se hacen cada vez más grandes (valores negativos) de tal forma que $\lim_{x\to 2} f(x)$ no existe.

En este caso se dice que $\lim_{x\to 2} f(x) = -\infty$

Definición 2

De acuerdo con Stewart (2012) sea f la función definida en ambos lados de a, quizás con excepción del mismo valor a. Entonces:

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$$

Significa que los valores de $f(x)$pueden hacerse arbitrariamente grandes en valor negativo al tomar x suficientemente cerca de a pero distinto de a.

Definición 3

De acuerdo con el autor antes mencionado la recta $x = a$ se llama asíntota vertical de la curva $y = f(x)$ si por lo menos una de las siguientes afirmaciones es verdadera:

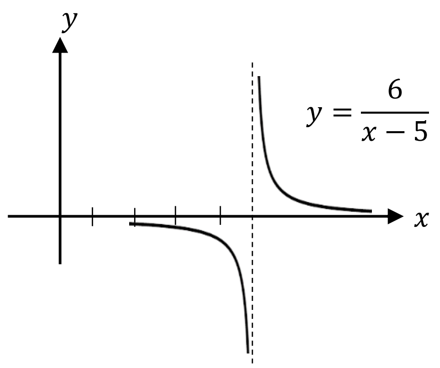
$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty \qquad \lim_{x\to a^-} f(x) = \infty \qquad \lim_{x\to a^+} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$$

Ejemplo

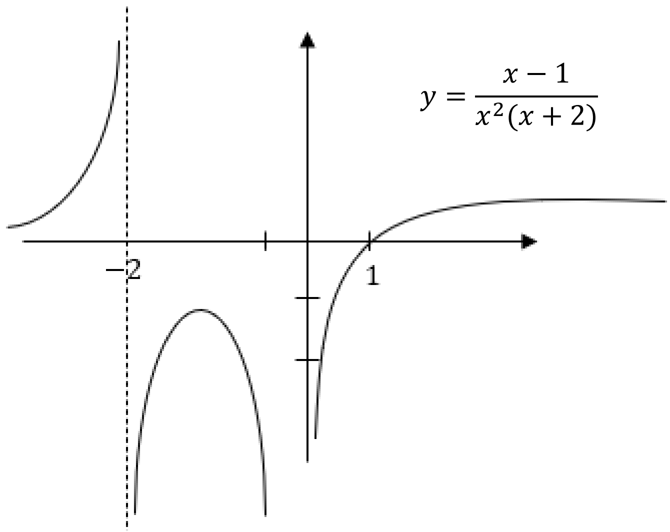
1. Determinar el límite infinito:

$$\lim_{x \to 5^+} \frac{6}{x-5} = +\infty \qquad \lim_{x \to 5^-} \frac{6}{x-5} = -\infty$$



2. Determinar el límite de la siguiente función:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x-1}{x^2(x+2)} = -\infty$$



Se debe hacer un análisis para valores cercanos a cero por la izquierda y por la derecha.

Cálculo de límites utilizando las Leyes de los Límites

Supóngase *f* y *g* son funciones reales y que c es una constante y que los limites $\lim_{x\to a} f(x)$ y $\lim_{x\to a} g(x)$existen

Entonces:

1. $\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$
2. $\lim_{x\to a}[f(x)-g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x)$
3. $\lim_{x\to a}[cf(x)] = c\lim_{x\to a} f(x)$
4. $\lim_{x\to a}[f(x)g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$
5. $\lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}\ siempre\ que \lim_{x\to a} g(x) \neq 0$
6. $\lim_{x\to a}[f(x)]^n = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^n$ en donde n es un entero positivo
7. $\lim_{x\to a} c = c \rightarrow$ función constante es continua
8. $\lim_{x\to a} x = a \rightarrow$ función identidad es continua
9. $\lim_{x\to a} x^n = a^n \rightarrow$ donde n es un entero positivo
10. $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a} \rightarrow$ donde n es un entero positivo; si n es par, $a > 0$
11. $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)} \rightarrow$ si n es par, suponemos $\lim_{x\to a} f(x) > 0$
12. Si f es un polinomio o una función racional y a está en el dominio de f, entonces:

$$\lim_{x\to a} P(x) = P(a)$$

$$\lim_{x\to a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(a)}{Q(a)}\ , siempre\ que\ Q(a) \neq 0$$

Teorema unicidad del límite

Si existe $\lim_{x\to a} f(x)$, entonces hay un único número L tal que:

$$L = \lim_{x\to a} f(x)$$

Funciones localmente iguales

Definición 4

De acuerdo con Rojas et al. (2017), sean:

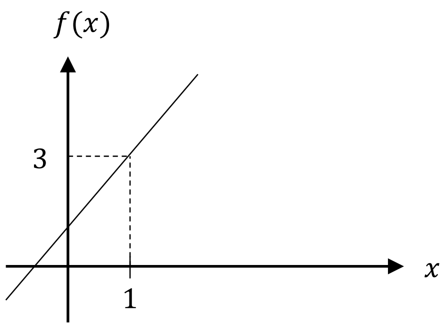
- a un número real.
- I un intervalo abierto que contiene el número a.
- f y g dos funciones reales definidas en I, salvo tal vez en a.

Diremos que "$f = g$ localmente cerca de a" o simplemente que "$f = g$ cerca de a", si existe $r > 0$ tal que para todo $x \in]\, a - r, a + r[\setminus \{a\}, f(x) = g(x)$.

Ejemplo

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x \to f(x) = 2x + 1$$



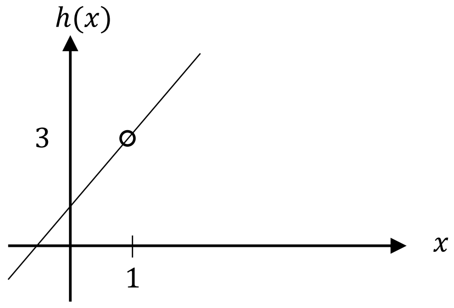
Entonces:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 3 = f(1)$$

Ejemplo

$$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x \to g(x) = \begin{cases} 2x + 1 & si\ x \neq 1 \\ 1 & si\ x = 1 \end{cases}$$



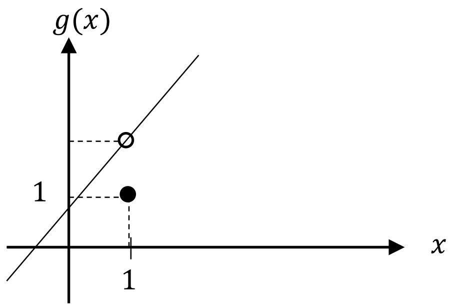
Entonces:

$$\lim_{x \to 1} g(x) = 3 \neq g(1)$$

Ejemplo

$$h: \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R}$$

$$x \to h(x) = 2x + 1$$



Entonces:

$$\lim_{x \to 1} h(x) = 3$$
$$h(1)\ no\ existe$$

Límite de funciones localmente iguales

El estudio de los límites de las funciones localmente iguales se fundamente en el siguiente teorema:

Teorema

Sean:

- a un número real.
- I un intervalo abierto que contiene el número a.
- f y g dos funciones reales definidas en I, salvo tal vez en a.

Si $f = g$ cerca de a, entonces:

1. Existe $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ si y solo si existe $\lim\limits_{x \to a} g(x)$.
2. Si los límites existen, son iguales.

Nota: en el ejemplo de las funciones f, g y h definidas anteriormente, vemos que $f = g = h$ cerca de 1, y como existe $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 3$, entonces también existen $\lim\limits_{x \to 1} g(x)$ y $\lim\limits_{x \to 1} h(x)$ y son $x - 1$ iguales a 3.

Ejemplos

1.

Calcular $\lim\limits_{x \to 1^+} \frac{|x^2-1|}{x-1}$ y $\lim\limits_{x \to 1^-} \frac{|x^2-1|}{x-1}$. ¿Existe $\lim\limits_{x \to 1} \frac{|x^2-1|}{x-1}$?

$$\frac{|x^2-1|}{x-1} = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & si\ x^2 - 1 > 0 \\ \dfrac{-(x^2-1)}{x-1} & si\ x^2 - 1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{(x+1)(x-1)}{x-1} & si\ x^2 > 1 \\ \dfrac{-(x+1)(x-1)}{x-1} & si\ x^2 < 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x+1 & si\ |x| > 1 \\ -(x+1) & si\ |x| < 1 \end{cases} = \begin{cases} x+1 & si \quad x < -1 \vee x > 1 \\ -(x+1) & si \quad -1 < x > 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{|x^2-1|}{x-1} = \lim_{x \to 1^+} (x+1) = 1 + 1 = 2$$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{|x^2-1|}{x-1} = \lim_{x \to 1^-} -(x+1) = -(1+1) = -2$$

$$\therefore No\ existe\ \lim_{x \to 1} \frac{|x^2-1|}{x-1}$$

2.

Calcular $\lim\limits_{x\to 3^+}\frac{x-3}{|x-3|}$ **y** $\lim\limits_{x\to 3^-}\frac{x-3}{|x-3|}$

$$\frac{x-3}{|x-3|}=\begin{cases}\dfrac{x-3}{x-3} & si\ x-3>0\\ \dfrac{x-3}{-(x-3)} & si\ x-3<0\end{cases}=\begin{cases}1 & si\ x>3\\ -1 & si\ x<3\end{cases}$$

$$\therefore \lim_{x\to 3^+}\frac{x-3}{|x-3|}=\lim_{x\to 3^+}(1)=1$$

$$\therefore \lim_{x\to 3^-}\frac{x-3}{|x-3|}=\lim_{x\to 3^-}(-1)=-1$$

Es decir, no existe el límite en las cercanías de 3

Calcular:

$\boldsymbol{a})\ \lim\limits_{x\to 0}f(x), si\ f(x)=\begin{cases}x^2, para\ x>0\\ x, para\ x\le 0\end{cases}$

$$\lim_{x\to 0^+}x^2=(0)^2=0$$

$$\lim_{x\to 0^-}x=0$$

$$\therefore \lim_{x\to 0}f(x)=0$$

$\boldsymbol{b})\ \lim\limits_{x\to 0}f(x),\ si\ f(x)=\begin{cases}x^3, para\ x\le 0\\ x^2, para\ x>0\end{cases}$

$$\lim_{x\to 0^-}x^3=(0)^3=0$$

$$\lim_{x\to 0^+}x^2=(0)^2=0$$

$$\therefore \lim_{x\to 0}f(x)=0$$

$\boldsymbol{c})\ \lim\limits_{x\to 2}f(x),\ si\ f(x)=\begin{cases}-x+2, si\ x\le 2\\ (x-2)^2, si\ \ x>2\end{cases}$

$$\lim_{x\to 2^-}(-x+2)=-2+2=0$$

$$\lim_{x \to 2^+} (x-2)^2 = (2-2)^2 = 0$$

$$\therefore \lim_{x \to 2} f(x) = 0$$

Ejemplo

$\lim_{x \to 1} \frac{(x^m - 1)}{(x^n - 1)} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x^{m-1} + x^{m-2}(1) + x^{m-3}\,(1)^2 + \cdots 1^{m-1})}{(x-1)(x^{n-1} + x^{n-2}(1) + x^{n-3}\,(1)^2 + \cdots 1^{n-1})}$ (Por ejemplo, factorizando en el numerador y el denominador)

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(x^{m-1} + x^{m-2}(1) + x^{m-3}\,(1)^2 + \cdots 1^{m-1})}{(x^{n-1} + x^{n-2}(1) + x^{n-3}\,(1)^2 + \cdots 1^{n-1})}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(1^{m-1} + 1^{m-2}(1) + 1^{m-3}\,(1)^2 + \cdots 1^{m-1})}{(1^{n-1} + 1^{n-2}(1) + 1^{n-3}\,(1)^2 + \cdots 1^{n-1})}$$

$$= \frac{1^{m-1} + 1^{m-1} + 1^{m-1} + \cdots 1^{m-1}}{1^{n-1} + 1^{n-1} + 1^{n-1} + \cdots 1^{n-1}}$$

$$= \frac{m(1^{m-1})}{n(1^{n-1})} = \frac{m}{n}$$

Ejemplo

$$\lim_{x \to 1} \frac{\left(x^{\frac{1}{2}} - 1\right)}{\left(x^{\frac{1}{3}} - 1\right)} = \lim_{x \to 1} \frac{\left(x^{\frac{1}{2}} - 1\right)\left(x^{\frac{1}{2}} + 1\right)\left(x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{3}} + 1\right)}{\left(x^{\frac{1}{3}} - 1\right)\left(x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{3}} + 1\right)\left(x^{\frac{1}{2}} + 1\right)} = \lim_{x \to 1} \frac{\left[\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^2 - 1\right]\left[x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{3}} + 1\right]}{\left[\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3 - 1\right]\left(x^{\frac{1}{2}} + 1\right)}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)\left(x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{3}} + 1\right)}{(x-1)\left(x^{\frac{1}{2}} + 1\right)} = \lim_{x \to 1} \frac{\left(x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{3}} + 1\right)}{\left(x^{\frac{1}{2}} + 1\right)} = \frac{1+1+1}{1+1} = \frac{3}{2}$$

Ejemplo

$$\lim_{x \to -1} \frac{(x+1)}{\left(x^{\frac{1}{3}} + 1\right)} = \lim_{x \to -1} \frac{(x+1)\left(x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{3}} + 1\right)}{\left(x^{\frac{1}{3}} + 1\right)\left(x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{3}} + 1\right)} = \lim_{x \to -1} \frac{(x+1)\left(x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{3}} + 1\right)}{\left[\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3 + 1\right]}$$

$$= \lim_{x \to -1} \frac{(x+1)\left(x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{3}} + 1\right)}{(x+1)} = \lim_{x \to -1} x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{3}} + 1 = 1 - (-1) + 1 = 3$$

Mediante el cálculo de los límites laterales justifique la existencia o no del siguiente límite:

$$\lim_{x \to -2} \frac{2+x}{\sqrt{(x+2)^2}} = \lim_{x \to -2} \frac{2+x}{|x+2|}$$

$$\frac{x+2}{|x+2|} = \begin{cases} \dfrac{x+2}{x+2}, si\ x+2 > 0 \\ -\dfrac{x+2}{x+2}, si\ \ x+2 < 0 \end{cases} = \begin{cases} 1\ si\ x > -2 \\ -1\ si\ x < -2 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to -2^+} \frac{x+2}{|x+2|} = \lim_{x \to -2^+} (1) = 1$$

$$\lim_{x \to -2^-} \frac{x+2}{|x+2|} = \lim_{x \to -2^-} (-1) = -1$$

$$\therefore \nexists \lim_{x \to -2} f(x)$$

Ejemplo

Si $f(x) = \frac{|x^2+x-2|}{x^2+2x-3}$, calcular los límites de $f(x)$, cuando $x \to 1$ y cuando $x \to -2$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+x-2}{x^2+2x-3}, si\ x^2+x-2 > 0 \\ \dfrac{-(x^2+x-2)}{x^2+2x-3}, si\ \ x^2+x-2 < 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{(x+2)(x-1)}{(x+3)(x-1)}\ si\ (x+2)(x-1) > 0 \\ \dfrac{-(x+2)(x-1)}{(x+3)(x-1)} si\ (x+2)(x-1) < 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{(x+2)}{(x+3)}\ si\ x < -2\ \vee x > 1 \\ \dfrac{-(x+2)}{(x+3)} si - 2 < x < 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to -2^+} f(x) = -\lim_{x \to -2^+} \frac{x+2}{x+3} = -\frac{(-2+2)}{-2+3} = -\frac{0}{1} = 0$$

$$\lim_{x \to -2^-} f(x) = \lim_{x \to -2^+} \frac{x+2}{x+3} = \frac{(-2+2)}{-2+3} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\therefore \exists \lim_{x \to -2} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{x+2}{x+3} = -\frac{1+2}{1+3} = \frac{3}{4}$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = -\lim_{x \to 1^+} \frac{x+2}{x+3} = -\frac{(1+2)}{1+3} = -\frac{3}{4}$$

$$\therefore \exists \lim_{x \to 1} f(x)$$

La definición precisa de límite

De acuerdo con Larson & Edwards (2010)

> Sea f la función definida en un intervalo abierto que contiene a c (salvo posiblemente en c) y L un número real. La afirmación
>
> $$\lim_{x \to c} f(x) = L$$
>
> Significa que para todo $\varepsilon > 0$ existe un número $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - a| < \delta$ entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$. (p. 52)

Ejemplo

Utilizando la definición de límite demostrar:

$$\lim_{x \to 1} (3 - x) = 2$$

Primer proceso para probar que $\lim_{x \to a} f(x) = L$

$\lim_{x\to 1}(3-x) = 2$, si $\forall \varepsilon > 0, \exists\ \delta > 0$ tal que si $|x-1| < \delta \to |(3-x)-2| < \varepsilon$

$\lvert(3-x)-2\rvert < \varepsilon$	$\lvert x-1\rvert < \delta\ (hipótesis)$
$\lvert 3-x-2\rvert < \varepsilon$	$\lvert x-1\rvert < \delta\ (análisis\ previo)(\delta = \varepsilon)$
$\lvert -x+1\rvert < \varepsilon$	$\lvert -x+1\rvert < \varepsilon \quad \lvert x\rvert = \lvert -x\rvert$
$\lvert -1\rvert\lvert -x+1\rvert < \varepsilon$	$\lvert -x+(3-2)\rvert < \varepsilon$
$\lvert(-1)(-x+1)\rvert < \varepsilon$	$\lvert 3-x-2\rvert < \varepsilon$
$\lvert x-1\rvert < \varepsilon$	$\lvert(3-x)-2\rvert < \varepsilon$

$\therefore \delta = \varepsilon$

$$\lim_{x\to 1}(5x-4) = 1$$

$\lim_{x\to 1}(5x-4) = 1$, si $\forall \varepsilon > 0, \exists\ \delta > 0$ tal que si $|x-1| < \delta \to |(5x-4)-1| < \varepsilon$

$\lvert(5x-4)-1\rvert < \varepsilon$	$\lvert x-1\rvert < \delta\ (hipótesis)$
$\lvert 5x-5\rvert < \varepsilon$	$\lvert x-1\rvert < \frac{\varepsilon}{\delta} \left(\delta = \frac{\varepsilon}{5}\right) (análisis\ previo)$
$\lvert 5(x-1)\rvert < \varepsilon$	$5\ \lvert x-1\rvert < 5 \quad \left(\frac{\varepsilon}{5}\right)$
$\lvert 5\rvert\lvert x-1\rvert < \varepsilon$	$\lvert 5\rvert\lvert x-1\rvert < \varepsilon$
$5\lvert x-1\rvert < \varepsilon$	$\lvert 5x-5\rvert < \varepsilon$
$\lvert x-1\rvert < \frac{\varepsilon}{5}$	$\lvert 5x-4-1\rvert < \varepsilon$
$\therefore \delta = \frac{\varepsilon}{5}$	$\lvert(5x-4)-1\rvert < \varepsilon$

Ejemplo

$$\lim_{x\to 0}(x^2-1)=-1$$

$\lim_{x\to 0}(x^2-1)=-1$, si $\forall\varepsilon>0, \exists\ \delta>0$ tal que si $|x-0|<\delta \to |(x^2-1)+1|<\varepsilon$

$\lvert(x^2-1)+1\rvert<\ \varepsilon$	$\lvert x-0\rvert<\delta$
$\lvert x^2\rvert<\ \varepsilon$	$\lvert x\rvert<\delta$
$\lvert x\rvert^2<\ \varepsilon$	$\lvert x\rvert<\ \sqrt{\varepsilon}$
$\sqrt{(x)^2}<\ \sqrt{\varepsilon}$	$\lvert x\rvert^2<\left(\sqrt{\varepsilon}\ \right)^2$
$\big\lvert\lvert x\rvert\big\rvert<\ \sqrt{\varepsilon}$	$\lvert x^2\rvert<\varepsilon$
$\lvert x\rvert<\sqrt{\varepsilon}$	$\lvert x^2-1+1\rvert<\varepsilon$
$\therefore\ \delta=\sqrt{\varepsilon}$	$\lvert(x^2-1)+1\rvert<\varepsilon$

Segundo proceso para probar que $\lim_{x\to a}f(x)=L$

Para probar que $\lim_{x\to a}f(x)=L$, se puede aplicar los siguientes procesos que, en palabras de Rojas et al. (2017) manifiesta que:

1. Tratar de expresar el valor absoluto de la diferencia entre $f(x)$ y el límite $f(x)$ para $x\neq a$:

$$|f(x)-L|=|g(x)||x-a|$$

2. Buscar una cota superior para el factor $|g(x)|$. Suponiendo que esta cota superior sea el número $M>0$. Entonces:

$$|g(x)|<M$$

Posiblemente, para encontrar este valor hay que suponer adicionalmente que:

$$0<|x-a|<\delta_1$$

Con cierto $\delta_1 > 0$. Esta suposición puede ser resultado de trabajar con valores cercanos al número a, para lo cual hay decide trabajar con valores de x en un intervalo con centro en el número a.

3. El anterior resultado sirve de prueba de la afirmación:

$$|f(x) - L| < M|x - a| < \varepsilon$$

Siempre que $0 < |x - a| < \frac{\varepsilon}{M}$ y $|x - a| < \delta$.

4. El resultado anterior nos dice cómo elegir el número δ:

$$\delta = mín\left\{\delta_1, \frac{\varepsilon}{M}\right\}$$

La selección de δ muestra que:

$|f(x) - L| = |g(x)||x - a|$

$< M|x - a|$, pues $|g(x)| < M$ debido a que $|x - a| < \delta \leq \delta_1$,

$< M\delta$, pues $|x - a| < \delta$,

$< M\frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$, pues $\delta \leq \frac{\varepsilon}{M}$

Por lo tanto:

$$|f(x) - L| < \varepsilon$$

Siempre que $|x - a| < \delta = mín\left\{\delta_1, \frac{\varepsilon}{M}\right\}$

Ejemplo

Probar que $\lim_{x \to -3} x^2 = 9$,

Dado $\varepsilon > 0$, debemos encontrar un número $\delta > 0$ tal que:

$$|x^2 - 9| < \varepsilon$$

Siempre que $x \neq -3$ y $|x + 3| < \delta$

$$|x^2 - 9| = |g(x)||x + 3|$$

$$|x^2 - 9| = |(x - 3)(x + 3)|$$

$$|x^2 - 9| = |x - 3||x + 3|$$

Entonces $g(x) = |x - 3|$

$$|x - 3| < M,\ \text{siempre que}$$

$$0 < |x + 3| < \delta_1$$

$$-4 < x < -2$$

$$-4 + 3 < x + 3 < -2 + 3$$

$$-1 < x + 3 < 1$$

$$|x + 3| < 1$$

Vamos a encontrar M reconstruyendo $g(x)$ a partir de $-4 < x < -2$

$$-4 - 3 < x - 3 < -2 - 3$$

$$-7 < x - 3 < -5$$

$$49 > (x - 3)^2 > 25$$

$$\sqrt{49} > \sqrt{(x - 3)^2} > \sqrt{25}$$

$$7 > |x - 3| > 5$$

$$5 < |x - 3| < 7$$

Es decir,

$$|g(x)| = |x - 3| < 7$$

Siempre que $|x + 3| < 1, M = 7$ y $\delta_1 = 1$

$$|x^2 - 9| = |x - 3||x + 3| < 7|x + 3|$$

$$|x^2 - 9| < 7|x + 3| < \varepsilon$$

$$0 < |x + 3 < \frac{\varepsilon}{7} < |x + 3| < 1$$

$$\delta = \min\{1, \varepsilon/7\}$$

La elección de δ muestra que:

$$|x^2 - 9| = |x - 3||x + 3| < 7|x + 3| < 7\,\delta \leq 7\frac{\varepsilon}{7} = \varepsilon$$

Por lo tanto $|x^2 - 9| < \varepsilon$, siempre que $0 < |x + 3| < \delta = \min\{1, \varepsilon/7\}$

Ejemplo

Demostrar que $\lim_{x\to 3} \frac{5x-3}{x+3} = 2$

Dado $\varepsilon > 0$, debemos encontrar un número $\delta > 0$, tal que:

$\left|\frac{5x-3}{x+3} - 2\right| < \varepsilon$, siempre que $x \neq 0$ y $|x - 3| < \delta$

$$\left|\frac{5x-3}{x+3} - 2\right| = |g(x)||x - 3|$$

$$\left|\frac{5x-3}{x+3} - 2\right| = \left|\frac{5x - 3 - 2(x+3)}{x+3}\right|$$

$$\left|\frac{5x-3}{x+3} - 2\right| = 3\left|\frac{x-3}{x+3}\right|$$

$$\left|\frac{5x-3}{x+3} - 2\right| = \frac{3}{|x+3|}|x - 3|$$

Entonces $g(x) = \frac{3}{|x+3|}$

$\frac{3}{|x+3|} \leq \mathrm{M}$ siempre que $0 < |x - 3| < \delta_1$

2 3 4

$$2 < x < 4$$
$$2-3 < x-3 < 4-3$$
$$-1 < x-3 < 1$$
$$|x-3| < 1$$

$$2 < x < 4$$
$$2+3 < x+3 < 4+3$$
$$5 < x+3 < 7$$
$$25 < (x+3)^2 < 49$$
$$5 < |x+3| < 7$$
$$\frac{1}{5} > \frac{1}{|x+3|} > \frac{1}{7}$$
$$\frac{3}{5} > \frac{3}{|x+3|} > \frac{3}{7}$$
$$\frac{3}{7} < \frac{3}{|x+3|} < \frac{3}{5}$$

$$g(x) = \frac{3}{|x+3|} < \frac{3}{5}$$

siempre que $|x-3| < 1$

$$\left|\frac{5x-3}{x+3} - 2\right| = \frac{3}{|x+3|}|x-3| < \frac{3}{5}|x-3|$$
$$\left|\frac{5x-3}{x+3} - 2\right| < \frac{3}{5}|x-3| < \varepsilon,$$

siempre que

$$0 < |x-3| < \tfrac{5}{3}\varepsilon \quad y \quad |x-3| < 1$$
$$\delta = \min\left\{1, \frac{5}{3}\varepsilon\right\}$$

$$\left|\frac{5x-3}{x+3} - 2\right| = \frac{3}{|x+3|}|x-3| < \frac{3}{5}|x-3| < \frac{3}{5}\delta \leq \frac{3}{5}\frac{5}{3}\varepsilon = \varepsilon,$$

Por lo tanto,

$\left|\frac{5x-3}{x+3} - 2\right| < \varepsilon$, siempre que $0 < |x-3| < \delta = \min\left\{1, \frac{5}{3}\varepsilon\right\}$

Ejemplo

Probar que $\lim\limits_{x \to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$

Sea $\varepsilon > 0$, buscamos $\delta > 0$, tal que: $\left|\sqrt{x} - \sqrt{a}\right| < \varepsilon$, siempre que $x \neq a \quad y \quad |x-a| < \delta$

$$\left|\sqrt{x} - \sqrt{a}\right| = |g(x)||x-a|; \quad x > 0$$

$$\left|\sqrt{x} - \sqrt{a}\right| = \frac{\left|\sqrt{x} - \sqrt{a}\right|\left|\sqrt{x} + \sqrt{a}\right|}{\left|\sqrt{x} + \sqrt{a}\right|}$$

$$\left|\sqrt{x} - \sqrt{a}\right| = \frac{\left|\left(\sqrt{x}\right)^2 - \left(\sqrt{a}\right)^2\right|}{\left|\sqrt{x} + \sqrt{a}\right|}$$

$$\left|\sqrt{x} - \sqrt{a}\right| = \frac{|x-a|}{\left|\sqrt{x} + \sqrt{a}\right|}$$

$$\left|\sqrt{x}-\sqrt{a}\right| = \frac{1}{\left|\sqrt{x}+\sqrt{a}\right|}|x-a|$$

$$g(x) = \frac{1}{\left|\sqrt{x}+\sqrt{a}\right|}$$

$\sqrt{x} > 0$ $\quad$ $0 < \sqrt{a} < \sqrt{x} + \sqrt{a}$

$\sqrt{a} > 0$

$\sqrt{x} + \sqrt{a} > 0$ $\quad$ $\dfrac{1}{\sqrt{a}} > \dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} > 0$

$$0 < \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} < \frac{1}{\sqrt{a}}$$

Por tanto:

$|g(x)| < \dfrac{1}{\sqrt{a}}$

$\mathrm{M} = \dfrac{1}{\sqrt{a}}$

se cumple que:

$$|f(x) - L| \leq \mathrm{M}|x-a|$$

No hay que acotar g con un δ_1

Entonces $\left|\sqrt{x}-\sqrt{a}\right| < \frac{1}{\sqrt{a}}|x-a|$,

para todo $x > 0$. Por ello, si para un $\delta > 0$, se tuviera que:

$$|x-a| < \delta,$$

entonces se cumple que: $\left|\sqrt{x}-\sqrt{a}\right| < \frac{1}{\sqrt{a}}|x-a| < \frac{\delta}{\sqrt{a}}$

De esta desigualdad podemos elegir δ de la siguiente manera:

$$\frac{\delta}{\sqrt{a}} = \varepsilon$$

$$\delta = \varepsilon\sqrt{a}$$

$$\left|\sqrt{x}-\sqrt{a}\right| = \frac{1}{\left|\sqrt{x}+\sqrt{a}\right|}|x-a| < \frac{1}{\sqrt{a}}|x-a| < \frac{1}{\sqrt{a}}\delta = \frac{\varepsilon\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \varepsilon$$

Por lo tanto, la desigualdad $\left|\sqrt{x}-\sqrt{a}\right| < \varepsilon$ se verifica si x satisface $0 < |x-a| < \delta = \varepsilon\sqrt{a}$.

Ejemplo

Probar que: $\lim\limits_{x\to 1}(x^3-5x+6)=2$

$$x^2-5x+4=\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{21}{4}$$

$$|(x^3-5x+6)-2|=|g(x)||x-1|$$

$$ax^2+x+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)-\frac{b^2-4ac}{4a}$$

$$|x^3-5x+3+6-2|=|g(x)||x-1|$$

$$|x^3-5x+3+4|=|g(x)||x-1|$$

$$g(x)=|x^2-5x+4|<5$$

$$|x^3-5x+3+4|=|(x^2-5x+4)(x-1)|$$

siempre que $|x-1|<1$

$$|x^3-5x+3+4|=|x^2-5x+4||x-1|$$

$\mathrm{M}=5 \quad y \quad \delta_1=1$

$$g(x)=|x^2-5x+4|$$

$$|x^2-5x+4|<\mathrm{M} \quad |(x^3-5x+6)-2|=|x^2-5x+4||x-1|<5|x-1|$$

$$0<x<2$$

$$0-1<x-1<2-1$$

$$-1<x-1<1$$

$$|x-1|<1$$

$$0<x<2$$

$$-\frac{5}{2}<x-\frac{5}{2}<-\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{4}<\left(x-\frac{5}{2}\right)^2<\frac{25}{4}$$

$$\frac{1}{4}-\frac{21}{4}<\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{21}{4}<\frac{25}{4}-\frac{21}{4}$$

$$-5<\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{21}{4}<1$$

$$1<\left[\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{21}{4}\right]^2<25$$

$$\sqrt{1}<\sqrt{\left[\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{21}{4}\right]^2}<\sqrt{25}$$

$$1<\left|\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{21}{4}\right|<5$$

$$1<|x^2-5x+4|<5$$

es decir

$|(x^2-5x+6)-2|<5|x-1|<\varepsilon$ siempre

$0<|x-1|<\dfrac{\varepsilon}{5}$ si $|x-1|<1$

$$\delta=\min\left\{1,\frac{\varepsilon}{5}\right\}$$

La elección de este δ permite que:

$$|(x^2-5x+6)-2|=|x^2-5x+4||x-1|$$
$$<5|x-1|<5\delta$$
$$\leq 5\left(\frac{\varepsilon}{5}\right)=\varepsilon$$

Por lo tanto:

$$|(x^2-5x+6)-2|<\varepsilon,$$

siempre que $0<|x-1|<\delta=\min\left\{1,{}^{\varepsilon}/_{5}\right\}$

Límites infinitos

Definición 5

En cuanto a límites al infinito, de acuerdo con Ron & Edwards (2018) sea f una función definida en todo número real de un *intervalo abierto* que contiene al número a, excepto posiblemente en a mismo. Entonces:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

significa que para todo número positivo M existe un número positivo δ, tal que si:

$$0 < |x - a| < \delta, \text{ entonces } f(x) > \mathrm{M}$$

Definición 6

De acuerdo con Stewart (2012), sea f una función definida sobre algún intervalo abierto que contiene el número am excepto posiblemente en a mismo. Entonces:

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

significa que para todo número negativo N existe un número positivo δ tal que si:

$$0 < |x - a| < \delta, \text{ entonces } f(x) < \mathrm{N}$$

Formas indeterminadas

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \infty - \infty, \quad 0 \cdot \infty, \quad 0^0, \quad \infty^0, \quad 1^\infty$$

Límites al infinito, asíntotas horizontales

Definición 7

Para Stewart (2012), sea f una función definida sobre algún intervalo $]a, +\infty[$. Entonces $\lim_{x \to \infty} f(x) = \mathrm{L}$

significa que los valores de $f(x)$ pueden aproximarse asintóticamente a L tanto como desee, eligiendo a x significativamente grande.

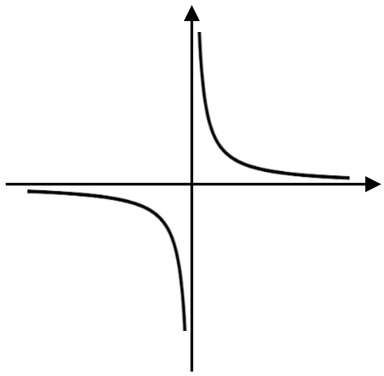
Definición 8

De acuerdo con el autor antes mencionado, sea f una función definida sobre algún intervalo $]-\infty, a[$. Entonces $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \mathrm{L}$, significa que los valores de $f(x)$ pueden hacerse arbitrariamente cercanos a L haciendo que x sea negativo y significativamente grande en magnitud.

Ejemplo

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$$



Definición 9

Basándonos en el autor antes mencionado la recta $y = \mathrm{L}$ se llama asíntota horizontal de la curva $y = f(x)$ si:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \mathrm{L} \text{ o } \lim_{x\to-\infty} f(x) = \mathrm{L}$$

Ejemplo:

En el ejercicio anterior $y = 0$, es asíntota horizontal de la curva $y = f(x) = \frac{1}{x}$, puesto que:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ o } \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Teorema

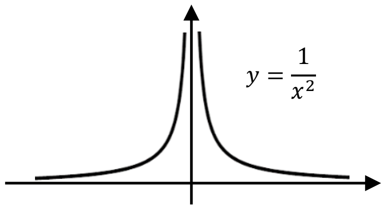
Si $r > 0$ es un número racional, entonces $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^r} = 0$

Si $r < 0$ es un número racional, tal que x^r está definido para todo x, entonces $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^r} = 0$

Ejemplos

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}=0$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}=0$$



1.

Hallar $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+1}{x^2+4}=\dfrac{\frac{x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{4}{x^2}}=\dfrac{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{4}{x^2}}=\dfrac{0+0}{1+0}=\dfrac{0}{1}=0$

2.

Hallar $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^3+5x-2}{3x^2+2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{8x^3}{x^2}+\frac{5x}{x^2}-\frac{2}{x^2}}{\frac{3x^2}{x^2}+\frac{2x}{x^2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x+\frac{5}{x}-\frac{2}{x^2}}{3+\frac{2}{x}}=\dfrac{\infty+0-0}{3+0}$

$$=\frac{1}{3}(\infty)=\infty$$

porque $\left(8x+\frac{5}{x}-\frac{2}{x^2}\right)\to\infty \quad y \quad \left(3+\frac{2}{x}\right)\to 3$

3.

Hallar $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-4x+1}{3x^3+2x+7}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{x^3}{x^3}-\frac{4x}{x^3}+1}{\frac{3x^3}{x^3}+\frac{2x}{x^3}+\frac{7}{x^3}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\frac{4}{x^2}+1/x^3}{3+\frac{2}{x^2}+\frac{7}{x^3}}=\dfrac{1+0+0}{3+0+0}=\dfrac{1}{3}$

Ejemplos

Calcular los siguientes límites

1.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{3x^2+3}-\sqrt{4x^2-5}}{\sqrt[4]{x^3+6}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{3x^2+3}-\sqrt{4x^2-5}\right)\left(\sqrt{3x^2+3}+\sqrt{4x^2-5}\right)}{\left(\sqrt[4]{x^3+6}\right)\left(\sqrt{3x^2+3}+\sqrt{4x^2-5}\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{3x^2+3}\right)^2-\left(\sqrt{4x^2-5}\right)^2}{\left(\sqrt[4]{x^3+6}\right)\left(\sqrt{3x^2+3}+\sqrt{4x^2-5}\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2+3-4x^2+5}{\left(\sqrt[4]{x^3+6}\right)\left(\sqrt{3x^2+3}+\sqrt{4x^2-5}\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-x^2+8}{\left(\sqrt[4]{x^3+6}\right)\left(\sqrt{3x^2+3}+\sqrt{4x^2-5}\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{-x^2+8}{x^2}}{\dfrac{\sqrt[4]{x^3+6}}{x}\left(\dfrac{\sqrt{3x^2+3}+\sqrt{4x^2-5}}{x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-1+\dfrac{8}{x^2}}{\sqrt[4]{\dfrac{x^3}{x^4}+\dfrac{6}{x^4}}\left(\sqrt{\dfrac{3x^2}{x^2}+\dfrac{3}{x^2}}+\sqrt{\dfrac{4x^2}{x^2}-\dfrac{5}{x^2}}\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-1+\dfrac{8}{x^2}}{\sqrt[4]{\dfrac{1}{x}+\dfrac{6}{x^4}}\left(\sqrt{3+\dfrac{3}{x^2}}+\sqrt{4-\dfrac{5}{x^2}}\right)} = \frac{-1+0}{\sqrt[4]{0}\left(\sqrt{3}+\sqrt{4}\right)} = -\frac{1}{0\left(\sqrt{3}+2\right)} = -\frac{1}{0}$$

$$= -\infty$$

2.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\boldsymbol{x^3+2x^2-x}}{\boldsymbol{4x^3+x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x^2}}{4+\dfrac{1}{x^2}} = \frac{1+0-0}{4+0} = \frac{1}{4}$$

3.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\boldsymbol{1000x}}{\boldsymbol{x^2+1}} = 1000 \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x^2+1} = 1000 \lim_{x\to-\infty} \frac{\dfrac{x}{x^2}}{\dfrac{x^2}{x^2}+\dfrac{1}{x^2}} = 1000 \lim_{x\to-\infty} \frac{\dfrac{1}{x}}{1+\dfrac{1}{x^2}}$$

$$= 1000\left(\frac{0}{1+0}\right) = 0$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$, sea $y=\sqrt{x}$ entonces $x=y^2$; si $x\to\infty$ entonces $y\to\infty$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{y}{\sqrt{y^2+\sqrt{y^2+y}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{y}{y}}{\frac{\sqrt{y^2+\sqrt{y^2+y}}}{y}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{y^2}{y^2}+\frac{\sqrt{y^2+y}}{y}}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{y^2}{y^4}+\frac{y}{y^4}}}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{y^2}+\frac{1}{y^3}}}} = \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{0+0}}} = \frac{1}{\sqrt{1+0}} = \frac{1}{\sqrt{1}} = 1$$

4.

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x+a}-\sqrt{x}\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\sqrt{x+a}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+a}+\sqrt{x}\right)}{\left(\sqrt{x+a}+\sqrt{x}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\sqrt{x+a}\right)^2-\left(\sqrt{x}\right)^2}{\left(\sqrt{x+a}+\sqrt{x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x+a-x}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{a}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x}} = \frac{a}{\infty} = 0$$

5.

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)} = \lim_{x\to+\infty} x\left[\frac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2-(x)^2}{\sqrt{x^2+1}+x}\right]$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x(x^2+1-x^2)}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x(1)}{\sqrt{x^2+1}+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x}{x}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}}+\frac{x}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1} = \frac{1}{\sqrt{1+0}+1}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1}+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

Ejemplos

1.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}+3}{x-4}=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x}+3)}{(x-4)}\frac{(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}-3)}=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x})^3-(3)^2}{(x-4)(\sqrt{x}-3)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x-9}{(x-4)(\sqrt{x}-3)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x-9}{\sqrt{x^3}-3x-4\sqrt{x}+12}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x}-\frac{9}{x}}{\sqrt{\frac{x^3}{x^2}}-\frac{3x}{x}-4\sqrt{\frac{x}{x^2}}+\frac{12}{x}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{9}{x}}{\sqrt{x}-3-4\sqrt{\frac{1}{x}}+\frac{12}{x}}$$

$$=\frac{1-0}{\infty-3-0+0}=\frac{1}{\infty}=\infty$$

2.

$$\lim_{x\to\infty}x^2\left[\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}-\sqrt{2}\right]$$

$$=\lim_{x\to\infty}x^2\frac{\left(\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{2}\right)}=\lim_{x\to\infty}x^2\frac{\left(\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}\right)^2-(\sqrt{2})^2}{\left(\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{2}\right)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(2+\frac{1}{x^2}-2\right)}{\left(\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{2}\right)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2+0}+\sqrt{2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

3.

$$\lim_{s\to\infty}\frac{s^3-8s+5}{\sqrt{s^7-2s}}=\lim_{s\to\infty}\frac{\left(\frac{s^3}{s^3}-\frac{8s}{s^3}+\frac{5}{s^3}\right)}{\sqrt{\frac{s^7}{s^6}-\frac{2s}{s^6}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{8}{s^2}+\frac{5}{s^3}}{\sqrt{s-\frac{2}{s^5}}}=\frac{1-0+0}{+\infty}=\frac{1}{\infty}=0$$

4.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{\pi x^2}-1}{x+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{\pi x^2}-1\right)\left(\sqrt{\pi x^2}+1\right)}{(x+3)\left(\sqrt{\pi x^2}+1\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{\pi x^2}\right)^2-(1)^2}{(x+3)\left(\sqrt{\pi x^2}+1\right)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\pi x^2-1}{(x+3)\left(\sqrt{\pi x^2}+1\right)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\pi x^2-1}{(x+3)\left(\sqrt{\pi}x+1\right)}==\lim_{x\to\infty}\frac{\pi x^2-1}{\sqrt{\pi}x^2+x+3\sqrt{\pi}x+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{\pi-\frac{1}{x^2}}{\sqrt{\pi}+\frac{1}{x}+\frac{3\sqrt{\pi}}{x}+\frac{3}{x^2}}$$

$$=\frac{\pi-0}{\sqrt{\pi}+0+0+0}$$

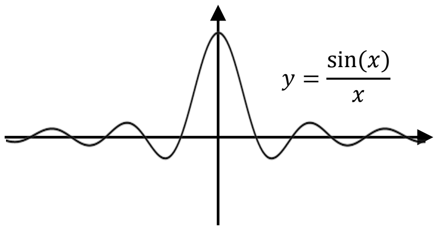
$$=\frac{\pi}{\sqrt{\pi}}=\frac{\pi\sqrt{\pi}}{\pi}=\sqrt{\pi}$$

Límite trigonométrico

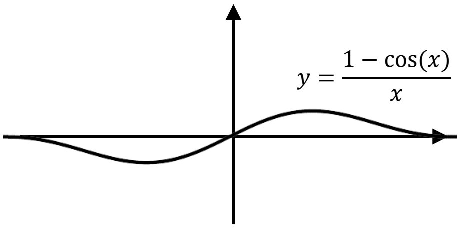
Los límites trigonométricos son aquellos que contienen funciones trigonométricas y que se los puede resolver mediante la aplicación de límites notables o de una identidad trigonométrica, pero además, de acuerdo con Barreno et al. (2018) se puede “realizar algunas operaciones algebraicas como multiplicar y dividir por un número, factorizar, multiplicar por la conjugada o aplicar las propiedades de los límites con la finalidad de evitar las indeterminaciones que generalmente se presenta de la forma $\frac{0}{0}$ ” (p. 70).

Para analizar este tipo de límites partimos del siguiente hecho sobre el cual Lara & Arroba (2017) manifiestan que: cuanto x más se aproxime a cero (en una vecindad de cero), el cociente $\frac{\sin(x)}{x}$ se aproxima a 1, como lo apreciamos en la gráfica. De similar manera, podemos decir que cuanto x más se aproxime a cero, el cociente $\frac{(1-\cos(x))}{x}$ se aproxima a cero.

1. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin(x)}=1$



2. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x}=0$



3. $\lim_{x\to 0}\frac{\tan(x)}{x}=1$

Ejemplos

1.

Hallar $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{x}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{3\sin(3x)}{3x}\right]=3\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{3x}=3(1)=3$

2.

Hallar $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(2x)}{\sin(3x)}$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{(3x)(1-\cos(2x))(2x)}{(3x)(\sin(3x))(2x)}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{1}{3x}\left[\frac{3x}{\sin(3x)}\right]2x\left[\frac{1-\cos(2x)}{2x}\right]$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{(3x)(1-\cos(2x))(2x)}{(3x)(\sin(3x))(2x)}\right]=\frac{2x}{3x}\lim_{x\to 0}\left[\frac{3x}{\sin(3x)}\right]\left[\frac{1-\cos(2x)}{2x}\right]$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{(3x)(1-\cos(2x))(2x)}{(3x)(\sin(3x))(2x)}\right]=\frac{2}{3}\left[\left(\lim_{x\to 0}\frac{3x}{\sin(3x)}\right)\left(\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(2x)}{2x}\right)\right]$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[\frac{(3x)(1-\cos(2x))(2x)}{(3x)(\sin(3x))(2x)}\right] = \frac{2}{3}(1)(0)$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[\frac{(3x)(1-\cos(2x))(2x)}{(3x)(\sin(3x))(2x)}\right] = 0$$

Nota. El límite trigonométrico fundamental lo aplicaremos siempre que, tanto el argumento de la función trigonométrica como la expresión que aparece en el denominador tiendan a cero para x tendiendo hacia un valor finito o infinito (Lara & Arroba, 2017).

3.

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sin(x-3)}{x^2-9} = \lim_{x\to 3}\frac{\sin(x-3)}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x\to 3}\left[\frac{1}{x+3}\frac{\sin(x-3)}{(x-3)}\right]$$

$$= \lim_{x\to 3}\left[\frac{1}{x+3}\right]\lim_{x\to 3}\frac{\sin(x-3}{(x-3)} = \frac{1}{3+3}(1) = \frac{1}{6}(1) = \frac{1}{6}$$

4.

Primera vía

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(2x)}{\sin(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin(2x)}{\cos(2x)}}{\sin(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{\sin(x)\cos(2x)} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\sin(x)}\frac{\sin(2x)}{\cos(2x)}$$

$$= \left(\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sin(x)}\right)\left(\lim_{x\to 0}\sin(2x)\right)\left(\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos(2x)}\right)$$

$$= \left(\lim_{x\to 0}\frac{x}{x\sin(x)}\right)\left(\lim_{x\to 0}\frac{2x\sin(2x)}{2x}\right)\left(\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos(2x)}\right)$$

$$= \frac{1}{x}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin(x)}\right)2x\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{2x}\right)\left(\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos(2x)}\right)$$

$$= 2(1)(1)\left(\frac{1}{\cos(0)}\right) = 2\left(\frac{1}{1}\right) = 2$$

Segunda vía

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(2x)}{\sin(x)}=\left(\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sin(x)}\right)\left(\lim_{x\to 0}\tan(2x)\right)=\left(\lim_{x\to 0}\frac{x}{x\sin(x)}\right)\left(\lim_{x\to 0}\frac{2x\tan(2x)}{2x}\right)$$

$$=\frac{1}{x}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin(x)}\right)2x\left(\lim_{x\to 0}\frac{\tan(2x)}{2x}\right)=2(1)(1)=2$$

5.

$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin(x)}{\pi-x}$ Sea $y=\pi-x$ cuando $x\to\pi, y\to 0$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{\sin\ (\pi-y)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{\sin(\pi)\cos(y)-\cos(\pi)\sin(y)}{y}=-\lim_{y\to 0}\frac{\cos(\pi)\sin(y)}{y}$$

$$=-\lim_{y\to 0}(-1)\frac{\sin(y)}{y}$$

$$=-\left[-\lim_{y\to 0}(-1)\left(\lim_{y\to 0}\frac{\sin(y)}{y}\right)\right]=-1(-1)(1)=1$$

6.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin(x^2-1)}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)\sin(x^2-1)}{(x+1)(x-1)}=\lim_{x\to 1}(x+1)\lim_{x\to 1}\frac{\sin(x^2-1)}{x^2-1}=(1+1)(1)$$

$$=(2)(1)=2$$

7.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x\csc(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x\dfrac{1}{\sin(x)}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(ax)-\cos(bx)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{-2\sin\left(\frac{ax+bx}{2}\right)\sin\left(\frac{ax-bx}{2}\right)}{x^2}\right]$$

$$=-2\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin\left[x\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]\sin\left[x\left(\frac{a-b}{2}\right)\right]}{x\cdot x}\right]$$

$$=-2\left\{\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left[x\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]}{x}\right\}\left\{\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left[x\left(\frac{a-b}{2}\right)\right]}{x}\right\}$$

$$= -2\left\{\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left[x\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]\left[\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]}{x\left(\frac{a+b}{2}\right)}\right\}\left\{\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left[x\left(\frac{a-b}{2}\right)\right]\left[\left(\frac{a-b}{2}\right)\right]}{x\left(\frac{a-b}{2}\right)}\right\}$$

$$= -2\left(\frac{a+b}{2}\right)(1)\left(\frac{a-b}{2}\right)(1)$$

$$= -\frac{1}{2}(a+)(a-b) = -\frac{1}{2}(a^2-b^2)$$

8.

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin(\sin(x))}{\sin(x)} = 1$$

9.

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos(\theta)}{\theta^2} = \lim_{\theta\to 0}\frac{(1-\cos(\theta))(1+\cos(\theta))}{\theta^2(1+\cos(\theta))} = \lim_{\theta\to 0}\frac{(1-\cos^2(\theta)}{\theta^2(1+\cos(\theta))}$$

$$= \lim_{\theta\to 0}\frac{\sin^2(\theta)}{\theta^2(1+\cos(\theta))} = \lim_{\theta\to 0}\frac{1}{1+\cos(\theta)}\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin^2(\theta)}{\theta^2}$$

$$= \frac{1}{1+\cos(0)}(1) = \frac{1}{1+1}(1) = \frac{1}{2}$$

10.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^3(x)}{x^3} = 1$$

11.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(3x)}{\sin(5x)} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\sin(5x)}\cdot\lim_{x\to 0}\tan(3x) = \lim_{x\to 0}\frac{5x}{5x\sin(5x)}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{3x\tan(3x)}{3x}$$

$$= \frac{1}{5x}\lim_{x\to 0}\frac{5x}{\sin(5x)}\cdot 3x\lim_{x\to 0}\frac{\tan(3x)}{3x}$$

$$= \frac{3x}{5x}\lim_{x\to 0}\frac{5x}{\sin(5x)}\lim_{x\to 0}\frac{\tan(3x)}{3x} = \frac{3}{5}(1)(1) = 3/5$$

12.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{\sqrt{1-\cos(x)}} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)\left(\sqrt{1+\cos(x)}\right)}{\left(\sqrt{1-\cos(x)}\right)\left(\sqrt{1+\cos(x)}\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)\left(\sqrt{1+\cos(x)}\right)}{\sqrt{1-\cos^2(x)}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)\left(\sqrt{1+\cos(x)}\right)}{\sqrt{\sin^2(x)}} \to |\sin(x)| \begin{cases} \sin(x) & si\ x > 0 \\ -\sin(x) & si\ x < 0 \end{cases}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(2x)\left(\sqrt{1+\cos(x)}\right)}{\sin(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x\sin(x)} \lim_{x\to 0^+} \frac{2x\sin(2x)}{2x} \lim_{x\to 0^+} \left(\sqrt{1+\cos(x)}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{x}\right)(1)(2x)(1)(\sqrt{1+\cos(0)} = 2\sqrt{1+1} = 2\sqrt{2}$$

13.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\left(\frac{1}{x}\right)} = 1$$

14.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{3x}-e^{-3x}}{e^{3x}+e^{-3x}} = \lim_{x\to\infty} \tanh(3x) = 1$$

15.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^2+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2+1} \cdot \lim_{x\to\infty} \sin^2(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^2+1} = 0$$

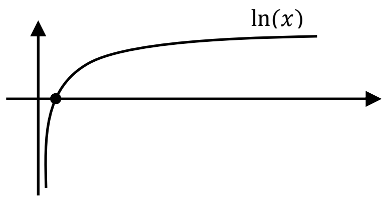
16.

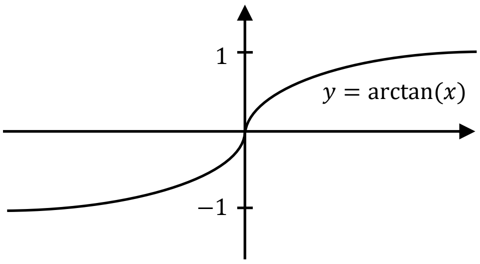
$$\lim_{x\to 0^+} \tan^{-1}(\ln(x))$$

17.

$$\lim_{x\to 0^+} (\ln(x)) = -\infty$$

$$\tan^{-1}(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$$





Definición 10

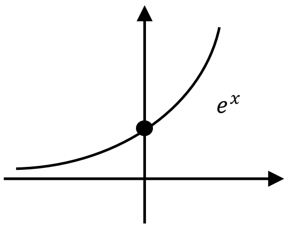
En este mismo sentido, de acuerdo con el autor antes mencionado, sea f una función definida sobre algún intervalo $]-\infty, a[$. Entonces $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \mathrm{L}$, significa que para todo $\varepsilon > 0$ existe un correspondiente número N tal que si $x < \mathrm{N}$, entonces $|f(x) - \mathrm{L}| < \varepsilon$.

Definición 11

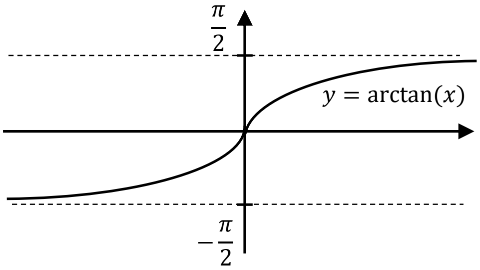
Así mismo, refiriéndonos al mismo autor, sea f una función definida sobre algún intervalo $]a, \infty[$. Entonces $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, significa que para todo número positivo M existe un correspondiente número positivo N tal que si $si\ x > \mathrm{N}$, entonces $f(x) > \mathrm{M}$.

33. $\lim_{X\to\infty} \arctan(e^x)$

$$\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$$



$$\arctan(\infty) = \frac{\pi}{2}$$



Ejemplos

1.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\mathbf{1-e^x}}{\mathbf{1+2e^x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{d}{dx}(1-e^x)}{\frac{d}{dx}(1+2e^x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left[\frac{d}{dx}(1)-\frac{d}{dx}(e^x)\right]}{\frac{d}{dx}(1)+2\frac{d}{dx}(e^x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{-e^x}{2e^x}=-\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{2e^x}$$

$$=-\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$$

2.

$$\lim_{x\to\infty}(\boldsymbol{e^{-2x}}\,\mathbf{cos}(\boldsymbol{x}))=\lim_{x\to\infty}e^{-2x}\lim_{x\to\infty}\cos(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^{2x}}\lim_{x\to\infty}\cos(x)=0$$

Sánchez & Valdés (1982, p. 93) manifiesta que, el producto de una sucesión infinitesimal por una sucesión acotada es una sucesión infinitesimal, esto como camino para solucionar el límite precedente.

Definición 12

Para Sánchez & Valdés (1982, p. 97) declaran que toda sucesión infinitesimal es convergente (el límite es cero).

$$h(x)=x^2+1$$

$$f(x)=x^2$$

$$g(x)=\frac{\sin^2(x)}{x^2+1}$$

$$f(x)\le g(x)\le h(x) \qquad f(x)=x^2$$

$$h(x)=x^2+1$$

$$0<x^2<x^2+1$$

$$0<\frac{1}{x^2+1}<\frac{1}{x^2}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2+1}=0$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}=0$$

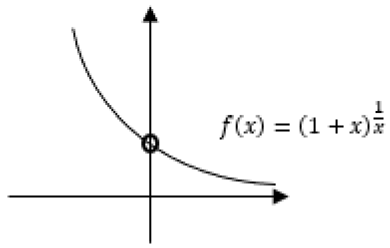
Límite fundamental algebraico

Se conoce con este nombre a límites del tipo: $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$

Evaluando $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = (1+0)^{\frac{1}{0}} = (1)^{\infty}$, lo cual es una forma indeterminada

La siguiente tabla muestra como varía $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ cuando x se aproxima a 0 por izquierda y por derecha:

x	$f(x)$
$0{,}5$	$2{,}25$
$0{,}1$	$2{,}59$
$0{,}01$	$2{,}7$
$0{,}001$	$2{,}718$
$0{,}00001$	$2{,}718285$
$0{,}000001$	$2{,}71828$
$-0{,}5$	4
$-0{,}1$	$2{,}86$
$-0{,}01$	$2{,}73199$
$-0{,}001$	$2{,}716992$
$-0{,}0001$	$0{,}718417$
$-0{,}0001$	$2{,}7182$



De la tabla de valores vemos que las imágenes de f se acercan cada vez más a $2{,}7182$, cuando x se aproxima a cero.

Por lo tanto $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t} = e$$

Observación. Lara & Arroba (2017) expresan que e es el límite de cualquier expresión de la forma: $(1+\square)^{1/\square}$, donde $\square$ representa una expresión que tiende a cero y $1/\square$ representa una expresión que tiende al infinito.

Ejemplos

1.

Hallar $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{3}{x}} = \lim\limits_{x\to 0}\left[(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]^3 = [e]^3 = e^3$

2.

Hallar $\lim\limits_{x\to 0}\left[1+\left(\frac{x}{3}\right)\right]^{\frac{2}{x}} = \lim\limits_{x\to 0}\left[\left(1+\frac{x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}\right]^2 = \lim\limits_{x\to 0}\left[\left(1+\frac{x}{3}\right)^{\frac{3}{x}\cdot\frac{1}{3}}\right]^2 = \lim\limits_{x\to 0}\left[\left(1+\frac{x}{3}\right)^{\frac{3}{x}}\right]^{\frac{1}{3}\cdot 2}$

$= [e]^{\frac{1}{3}\cdot 2} = e^{\frac{2}{3}}$

3.

Hallar $\lim\limits_{h\to\infty}\left(1+\frac{2}{h}\right)^{5h} = \lim\limits_{h\to\infty}\left(1+\frac{2}{h}\right)^{\frac{5h}{2}\cdot 2} = \lim\limits_{h\to 0}\left[\left(1+\frac{2}{h}\right)^{\frac{h}{2}}\right]^{5\cdot 2} = \lim\limits_{h\to 0}\left[\left(1+\frac{2}{h}\right)^{\frac{h}{2}}\right]^{10}$

$= [e]^{10} = e^{10}$

4.

Hallar $\lim\limits_{h\to\infty}\left(1-\frac{3}{4h}\right)^{8h} = \lim\limits_{h\to\infty}\left(1-\frac{3}{4h}\right)^{4h\cdot 2} = \lim\limits_{h\to\infty}\left(1-\frac{3}{4h}\right)^{-\frac{4h}{3}\cdot 2(-3)}$

$= \lim\limits_{h\to\infty}\left[\left(1-\frac{3}{4h}\right)^{-\frac{4h}{3}}\right]^{2(-3)} = e^{-6}$

5.

$\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin(x))^{\frac{1}{\sin(x)}} = e$

6.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^{\frac{x}{\alpha}\cdot\alpha} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^{\frac{x}{\alpha}}\right]^{\alpha} = e^{\alpha}$

7.

$$\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x}}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{(-x)(-1)}}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}} = \frac{e^{-1}}{e} = e^{-1-1} = e^{-2}$$

8.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^{5x}}{e^{x^2+5x}}=\lim_{x\to\infty}e^{5x-x^2-5x}=\lim_{x\to\infty}e^{-x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^{x^2}}=\frac{1}{e^{\infty}}=\frac{1}{\infty}=0$$

Hallar los límites de la forma

$$\lim_{x\to a}[\varphi(x)]^{\psi(x)}=C$$

Según Demidovich (1967) debe tomarse en cuenta que:

1) sí existen los límites finitos $\lim_{x\to a}\varphi(x)=\mathrm{A}$ y $\lim_{x\to a}\psi(x)=\mathrm{B}$, se tiene que $\mathrm{C}=\mathrm{A}^{\mathrm{B}}$
2) sí $\lim_{x\to a}\varphi(x)=\mathrm{A}\neq 1$ y $\lim_{x\to a}\psi(x)=\pm\infty$, el problema de hallar el límite se resuelve fácilmente.
3) sí $\lim_{x\to a}\varphi(x)=1$ y $\lim_{x\to a}\psi(x)=\infty$, se supone que $\varphi(x)=1+\alpha(x)$, donde $\alpha(x)\to 0$, cuando $x\to a$ y, por consiguiente:

$$\mathrm{C}=\lim_{x\to a}\left\{[1+\alpha(x)]^{\frac{1}{\alpha(x)}}\right\}^{\alpha(x)\psi(x)}=e^{\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)\psi(x)}=e^{\lim\limits_{x\to a}[\varphi(x)-1]\psi(x)}$$

Cero elevado a un número

$$0^k=\begin{cases}0 & si\ k>0\\ \infty & si\ k<0\end{cases}$$

Un número elevado a infinito

$$k^{\infty}=\begin{cases}\infty & si\ k>1\\ 0 & si\ 0<k<1\end{cases}$$

Ejemplos

1.

$$\boldsymbol{\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(2x)}{x}\right)^{1+x}}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(2x)}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin(2x)}{2x}=2\lim_{x\to a}\frac{\sin(2x)}{2x}=2(1)=2$$

$$\lim_{x\to 0}(1+x)=1+0=1\to\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(2x)}{x}\right)^{1+x}=2^1=2$$

2.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\boldsymbol{x+1}}{\boldsymbol{2x+1}}\right)^{x^2}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{2x+1}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x}+\frac{1}{x}}{\frac{2x}{x}+\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{2+\frac{1}{x}}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to\infty}x^2=\infty\to\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{2x+1}\right)^{x^2}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\infty}=0$$

3.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\boldsymbol{x-1}}{\boldsymbol{x+1}}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\left(-\frac{2}{x+1}\right)\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left\{\left[1+\left(-\frac{2}{x+1}\right)\right]^{\frac{x+1}{-2}}\right\}^{-\frac{2x}{x+1}}$$

$$=\left\{\lim_{x\to\infty}\left[1+\left(-\frac{2}{x+1}\right)\right]^{\frac{x+1}{-2}}\right\}^{\lim\limits_{x\to\infty}-\frac{2x}{x+1}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}-\frac{2x}{x+1}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}-\frac{\frac{2x}{x}}{\frac{x}{x}+\frac{1}{x}}}=e^{-2}$$

$$\varphi(x)=1+\alpha(x)$$

$$\begin{array}{r|l} x-1 & x+1 \\ \cline{2-2} -x-1 & 1 \\ \hline 0-2 & \end{array}$$

$$\frac{x-1}{x+1}=1-\frac{2}{x+1}\to 1+\left(-\frac{2}{x+1}\right)$$

Al calcular límites de la forma que se da a continuación, es conveniente saber que, si existe y es positivo el $\lim\limits_{x\to a}f(x)$, se tiene que:

$$\lim_{x\to a}[\ln(f(x))]=\ln\left[\lim_{x\to a}f(x)\right]$$

Ejemplo

Hallar $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\cdot\ln(1+x)=\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln\left[\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]=\ln[e]$

$=1$

Ejercicios propuestos

1. Calcular, utilizando las propiedades, los siguientes límites:
   a. $\lim_{x\to 1} \frac{3x+4}{x^2+1}$
   b. $\lim_{x\to 1} \frac{x^2+5x-6}{x^2+2x-3}$
   c. $\lim_{x\to -2} \frac{x^3+8}{x^2-4}$
   d. $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$
   e. $\lim_{x\to y} \frac{x^n-y^n}{x-y}$
2. En los siguientes ejercicios calcular $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ para:
   a. $f(x) = 2x^2$
3. Calcular:
   a. $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+1}{(x-1)^2}$
   b. $\lim_{x\to 64} \frac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4}$
   c. $\lim_{x\to -1} (2x^2+x+1) = 2$
   d. $\lim_{x\to 4} \sqrt{4x-12} = 2$
   e. $\lim_{x\to 2} \left(\frac{2x}{x+2}\right) = 1$
   f. $\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}}{4x+3} = \frac{1}{4}$
   g. $\lim_{x\to -\infty} \frac{8x^3+5x-2}{3x^7+x+1} = 0$
   h. $\lim_{x\to \infty} \frac{\sqrt{x}-\frac{6}{x}}{\frac{3}{x}+\sqrt{x}} = 1$
   i. $\lim_{x\to \infty} x^2\left[\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}-\sqrt{2}\right] = \frac{\sqrt{2}}{4}$
   j. $\lim_{x\to \infty} \frac{4x^3+8x^2-1}{\sqrt{x^6+1}} = 4$
   k. $\lim_{x\to -\infty} \frac{x^2+6x+8}{x^2-5x-14} = 1$

l. $\lim\limits_{s\to\infty} \frac{s^3-8s+5}{\sqrt{s^7-2s}} = 0$

m. $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{3x+2} - \sqrt{3x} = 0$

n. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{\pi x^2}-1}{x+3} = \sqrt{\pi}$

o. $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{8t^2+4}{3t^2-t+2} = \frac{8}{3}$

p. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(x - \sqrt{x^2-x}\right) = \frac{1}{2}$

q. $\lim\limits_{x\to\infty} 4x\left(\sqrt{x} - \sqrt{x-1}\right) = +\infty$

r. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{x-2/x} = 1$

s. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x+3}}{x-4} = 0$

Capítulo 2

Continuidad

Capítulo

2

Continuidad

Definición 13

Cuando nos referimos a continuidad, podemos manifestar que “una función f es continua en $x = a$, significa que no hay interrupción de la gráfica de f en a. Es decir, la gráfica no tiene saltos o huecos en a” (Larson y Edwards, 2010, p. 88). En otras palabras:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Si f es continua en a, entonces:

1. $f(a)$ está definida (esto es, a está en el dominio de f)
2. $\lim_{x \to a} f(x)$ existe
3. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Ejemplos

Determinar si $f(x) = x^2 + 1$ es continua en $x = 1$

- 1 está en el dominio de f, por lo tanto, $f(1) = (1)^2 + 1 = 1 + 1 = 2$
- $\lim_{x \to 1}(x^2 + 1) = (1)^2 + 1 = 2$
- $\lim_{x \to 1}(x^2 + 1) = f(1)$

$\therefore f(x) = x^2 + 1,$ es continua en $x = 1$

Determinar si $f(x) = \frac{|x|}{x}$ es continua en $x = 0$

- $f(0)$ no está definida, $f(x)$ no es continua en $x = 0$

Continuidad en un punto

Definición 14

Para Lara & Arroba (2017) una función es continua por la derecha de un número $x = a$ si:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

y f es continua por la izquierda de $x = a$ si

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$$

Ejemplos

1.

Determinar si $f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} & \text{para } x \neq 0 \\ 0 & \text{para } x = 0 \end{cases}$ es continua en $x = 0$

$f(0) = 0$ está definida

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x} & si\ x > 0 \\ -\frac{x}{x} & si\ x < 0 \\ 0 & para\ x = 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 & si\ x > 0 \\ -1 & si\ x < 0 \\ 0 & para\ x = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (1) = 1$$
$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (-1) = -1$$

$$\to \nexists \lim_{x \to 0} f(x)$$

$\therefore f(x)$ no es continua en $x = 0$

2.

¿Es $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2} & para\ x \neq 2 \\ 4 & para\ x = 2 \end{cases}$ continua en $x = 2$?

$f(2) = 4$ (está definida)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{(x+2)(x-2)}{(x-2)} & para\ x \neq 2 \\ 4 & para\ x = 2 \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} x+2 & para\ x \neq 2 \\ 4 & para\ x = 2 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2}(x+2) = (2+2) = 4$$

$\lim_{x\to 2} f(x) = f(2) = 4, f$ es continua en $x = 4$

3.

Determinar si $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & para\ x \leq -1 \\ \frac{x-1}{2} & para -1 < x < 1 \\ \sqrt{x} & para\ x \geq 1 \end{cases}$ es continua a la derecha e izquierda de $-1\ y\ 1$

Nota: f está definida en forma diferente a la derecha e izquierda de $-1\ y\ 1$

$$f(-1) = \frac{1}{-1} = -1$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{-1} = -1 \\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{x-1}{2} = -\dfrac{1-1}{2} = -\dfrac{2}{2} = -1 \end{array}\right. \rightarrow \exists \lim_{x\to -1} f(x) = -1$$

$\therefore f$ es continua en $x = -1$

$$f(1) = \sqrt{1} = 1$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{1-1}{2} = 0 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \sqrt{x} = \sqrt{1} = 1 \end{array}\right. \rightarrow \nexists \lim_{x\to 1} f(x) \therefore f \text{ no es continua en } x = 1$$

4.

Halla la discontinuidad de $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x^2+x} & para\ x > -3 \\ 1 & para\ x \leq -3 \end{cases}$

Las posibles discontinuidades se presentan en $x = 1\ y\ x = 0$ (las raíces de $x^2 + x$ y en $x = -3$)

f no está definida en $x = -1\ y\ en\ x = 0, f$ es discontinua en $x = -1\ y\ x = 0$

$$\frac{(x+1)(x-1)}{x(x+1)} = x - 1 \qquad f(-3) = 1$$

$$\lim_{x\to -3^-}\left(\frac{x-1}{x}\right) = \frac{-3-1}{-3} = \frac{4}{3} \rightarrow \nexists \lim_{x\to -3} f(x)\,, f \text{ es discontinua en } x = -3$$
$$\lim_{x\to -3^+}(1) = 1$$

Hallar las discontinuidades de:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x^2+1} & para\ x > -1 \\ \dfrac{x+1}{x^2-1} & para\ x < -1 \\ \dfrac{1}{2} & para\ x = -1 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{x}{x^2+1} & x > -1 \\ \dfrac{1}{x-1} & x < -1 \\ \dfrac{1}{2} & x = -1 \end{cases}$$

$$\frac{\cancel{(x+1)}}{\cancel{(x+1)}(x-1)} = \frac{1}{x-1}$$

$$\lim_{x\to -1^+}\frac{x}{x^2+1} = -\frac{1}{1+1} = -\frac{1}{2}$$
$$\lim_{x\to -1^-}\frac{1}{x-1} = -\frac{1}{2} \qquad \rightarrow \nexists \lim_{x\to -1} f(x)$$
$$f(-1) = \frac{1}{2}$$

Continuidad en un intervalo

Definición 15

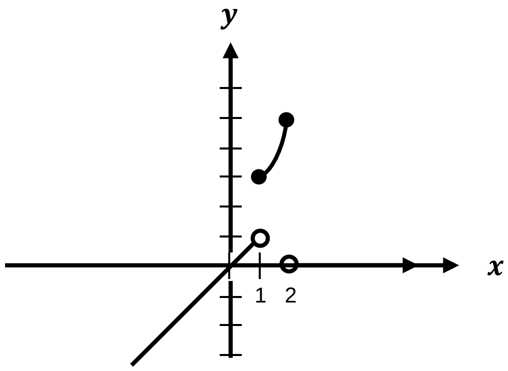
De acuerdo con Lara & Arroba (2017) una función f es continua sobre un intervalo si es continua en cada número del intervalo. (Si f está definido solo en un lado de un punto extremo del intervalo, entendemos por continua en el punto extremo, como continua por la derecha o continua por la izquierda).

Ejemplo

Dada la función f definida por:

$$\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} x, & si\ x < 1 \\ x^2+1, & si\ 1 \le x \le 2 \\ 2, & si\ x > 2 \end{cases}}$$

a. Realizar un gráfico de la función



b. Para que la función f sea continua en el punto x_0 ¿qué debe cumplirse?

$f(x_0)$ debe estar definida

$\lim_{x\to x_0} f(x)$ debe existir

$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

c. ¿Es f continua en $]-\infty, 1[$? ¿y en $]1,2[$? ¿y en $]2, +\infty[$?

f es continua en $]-\infty, 1[$

f es continua en $]1,2[$

f es continua en $]2, +\infty[$

d. Calcular $\lim_{x\to 1^+} f(x)$ y $\lim_{x\to 1^-} f(x)$, ¿son iguales?

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (x^2+1) = (1)^2 + 1 = 2$
$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (x) = 1$ $\rightarrow \nexists \lim_{x\to 1} f(x), \therefore f$ no es continua

en $x = 1$

e. ¿Es continua la función en los puntos $x = 1$ y $x = 2$?

$f(2) = (2)^2 + 1 = 5$ Nótese que $f(2) \in D_f$

$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} (2) = 2$
$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} (x^2+1) = (2)^2 + 1 = 5$ $\rightarrow \nexists \lim_{x\to 2} f(x), \therefore f$ no es continua

en $x = 2$

Teorema. Si f y g son continuas en $x = a$ y C es una constante, entonces las siguientes funciones son también continuas en $x = a$:

1. $f+g$ 2. $f-g$ 3. cf 4. fg 5. $\frac{f}{g}$, si $g \neq 0$

Teorema

a) Cualquier función polinomial es continua en todo su dominio; es decir, es continua sobre
$\mathbb{R} =]-\infty, \infty[$

b) Cualquier función racional es continua siempre que esté definida; esto es, es continua en su dominio.

Teorema. Los siguientes tipos de funciones son continuas en todo número de sus dominios:

funciones polinomiales	funciones racionales
funciones raíz	
funciones trigonométricas	funciones trigonométricas inversas
funciones exponenciales	funciones logarítmicas

Teorema. Si f es continua en b, y $\lim_{x\to a} g(x) = b$, entonces $\lim_{x\to a} f(g(x)) = f(b)$

Ejemplo

Calcular $\lim_{x\to 1} \sin(x^2-1)$

Sean $f(x) = \sin x$ y $g(x) = x^2 - 1$

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to 1}(x^2-1) = (1)^2 - 1 \\ &\lim_{x\to 1}(x^2-1) = 0 \end{aligned} \quad \rightarrow \lim_{x\to 1} \sin(x^2-1) = f(0) = \sin(0) = 0$$

$\{f$ es continua en $x = 0\}$, $0 \in D_f$

$f\big(g(x)\big) = \sin(x^2+1)$

Teorema. Si g es continua en $x = a$ y f es continua en $g(a)$, entonces la función compuesta $f \circ g$ dada por $(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big)$ es continua en $x = a$

Ejemplo

Sea $\boldsymbol{f(x) = \cos(x^2 + 1)}$. Explique por qué f es continua para todo real x.

f es una función continua puesto que se puede expresar como la composición de dos funciones continuas:

$h(x) = \cos(x) \quad \wedge \quad g(x) = x^2 + 1, \quad f = h\ o\ g$

Nota: Si $\lim_{x\to x_0} f(x)$ existe y es finito, pero $f(x_0)$ no existe o si existe $f(x_0) \neq \lim_{x\to x_0} f(x)$ se puede definir o redefinir la función f en x_0 de tal manera que ella sea continua tomando $f(x_0) = \lim_{x\to x_0} f(x)$. Cuando esto es posible se dice que la función f tiene discontinuidad evitable o removible. Si $\lim_{x\to x_0} f(x)$ no existe, la discontinuidad será inevitable.

Ejemplos

1.

Si $\boldsymbol{f(x) = \frac{x^3-1}{x+1}}$, defina $f(-1)$ de tal manera que f sea continua en -1.

$f(-1)$ no está definida

$$\lim_{x\to -1} f(x) = \lim_{x\to -1} \frac{x^3-1}{x+1}$$

$\lim_{x\to -1} f(x) = \lim_{x\to -1} \frac{x^3-1}{x+1}$ no existe, entonces no es posible definir f para que sea continua en $x = 1$. La discontinuidad de f es inevitable.

2.

Si $\boldsymbol{f(x) = \frac{x^3+3x^2-2x-4}{x+1}}$ ¿es posible definir $f(-1)$ de tal manera que f sea continua en -1?

$f(-1)$ no está definida

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^3+3x^2-2x-4}{x+1} = \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)(x^2+2x-4)}{x+1} = \lim_{x\to -1} (x^2-2x-4)$$
$$= (-1)^2 - 2(-1) - 4 = -1$$

$$f(-1) = \lim_{x\to -1} f(x) = -1$$

Entonces

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 + 3x^2 - 2x - 4}{x+1}, & si\ x \neq -1 \\ -1, & si\ x = -1 \end{cases}$$

3.

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4}}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3 - 8}{x^2 - 4} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(x+2)}$$

$f(2)$ no está definida

$$= \lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x+4}{x+2}$$

$$= \frac{4+4+4}{4} = 3$$

$$\to f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 8}{x^2 - 4} & si\ x \neq 2 \\ 3 & si\ x = 2 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3 - 8}{x^2 - 4} = 3 = f(2)$$

4.

$$\boldsymbol{G(x) = \frac{x^2+1}{2x^2-x-1}}$$

$$G(x) = \frac{x^2+1}{(x-1)(2x+1)}$$

La función $x^2 + 1$ es continua, es una función polinomial. La función $2x^2 - x - 1$ es continua, es una función polinomial. Por tanto G es continua en $\mathbb{R}$, por ser una función racional excepto donde: $2x^2 - x - 1 = 0$ es decir en: $\{{}^{-1}/_{2}, 1\}$

5. $e^{\sin(t)}$ es continua por ser la composición de dos continuas e^t y $\sin(t)$. $\cos(\pi t) + 2$ es continua por ser la suma de dos continuas $\cos(\pi t)$ y 2, además, $\cos(\pi t) + 2$ está definida para todo $\mathbb{R}$.

$$\boldsymbol{R(t) = \frac{e^{\sin(t)}}{2 + \cos(\pi t)}}$$

$\therefore \frac{e^{\sin(t)}}{2+\cos(\pi t)}$ es continua, por ser cociente entre continuas

Utilice la continuidad para evaluar cada uno de los siguientes límites

$\lim_{x\to\pi} \sin(x + \sin(x)) \to$ función interna

$$f\big(g(x)\big) = \sin(x + \sin(x))$$

Sea $f(x) = \sin(x)$ y $g(x) = x + \sin(x)$

$$\lim_{x\to\pi}(x + \sin(x)) = \pi + \sin(\pi) = \pi + 0 = \pi \to \lim_{x\to\pi} \sin(x + \sin(x)) = f(\pi) = \sin(\pi) = 0$$

f es continua en $x = \pi$

Encuentre los valores de a y b que hacen a f continua para todo x

$$\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & si\ x < 2 \\ ax^2 - bx + 3 & si\ 2 \le x < 3 \\ 2x - a + b & si\ x \ge 3 \end{cases}} \qquad f(x)$$

$$= \begin{cases} \dfrac{(x-2)(x+2)}{x-2} & si\ x < 2 \\ ax^2 - bx + 3 & si\ 2 \le x < 3 \\ 2x - a + b & si\ x \ge 3 \end{cases}$$

$f(x)$

$$= \begin{cases} x+2 & si\ x < 2 \\ ax^2 - bx + 3 & si\ 2 \le x < 3 \\ 2x - a + b & si\ x \ge 3 \end{cases} \qquad \begin{aligned} &\lim_{x\to 2^-}(x+2) = (2+2) = 4 \\ &\lim_{x\to 2^+}(ax^2 - bx + 3) = a(2)^2 - b(2) + 3 = 4a - 2b + 3 \end{aligned}$$

$$\lim_{x\to 3^-}(ax^2 - bx + 3) = a(3)^2 - b(3) + 3 \qquad \lim_{x\to 3^+}(2x - a + b) = 2(3) - a + b$$

$$\lim_{x\to 3^-}(ax^2 - bx + 3) = 9a - 3b + 3 \qquad \lim_{x\to 3^+}(2x - a + b) = 6 - a + b$$

$4 = 4a - 2b + 3$

$4a - 2b = 1$

$2a - b = \frac{1}{2}$

$9a - 3b + 3 = -a + b + 6$

$9a - 3b + a - b = 6 - 3$

$10a - 4b = 3$

$5a - 2b = \frac{3}{2}$

$2a - b = \frac{1}{2}\ \ (-2)$

$5a - 2b = \frac{3}{2}$

$-4a + 2b = -1$

$5a - 2b = \frac{3}{2}$

$a = \frac{1}{2}$

$$2\left(\frac{1}{2}\right) - b = {}^{1}/_{2}$$

$$1 - b = {}^{1}/_{2}$$
$$-b = {}^{1}/_{2} - 1$$
$$b = 1 - {}^{1}/_{2}$$
$$b = {}^{1}/_{2}$$

Ejercicios propuestos

a. Hallar las discontinuidades de $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-3} & para\ x > 3 \\ \frac{1}{x+3} & para\ x \leq 3 \end{cases}$ $x = 3\ \ y\ x = -3$

b. Hallar las discontinuidades de $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+x}{\sqrt{x}} & para\ x > 0 \\ 0 & para\ x = 0 \\ \frac{x^2}{x^2+x} & para\ x < 0 \end{cases}$ $x = -1$

c. Hallar las discontinuidades de $f(t) = \begin{cases} \sqrt{t} - \sqrt{t-1} & para\ t \geq 1 \\ \frac{1-t}{t-2} & para\ t < 1 \end{cases}$ $t = 1$

Capítulo 3

La derivada

La Derivada

Capítulo 3

Cuando hablamos de derivada de una función, podemos interpretarla como la razón de cambio instantáneo de la función en un punto determinado, en este mismo sentido, Tomeo et al. (2012) refieren que “se interpreta como la pendiente de la recta tangente a la gráfica en el punto considerado. Una función definida en el intervalo $[0, +\infty[$, por ejemplo, no será derivable en el punto 0, donde solo podrán existir límites por la derecha” (p. 64).

Así mismo, la derivada de una función $y = f(x)$ es una función que se denota por $f'(x)$ definida así:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

El dominio de f' es el conjunto de todos los números para los cuales el límite existe; en todos aquellos valores de x, se dice que f es diferenciable. El proceso para obtener una derivada es conocido como diferenciación.

A derivada de $y = f(x)$ se denota de diversas formas:

$$f'(x), \qquad Df, \qquad D_x f, \qquad \frac{dy}{dx}, \qquad \frac{d}{dx}f, \qquad \frac{d}{dx}\big(f(x)\big), \qquad y', \qquad \dot{y}$$

Uso de la definición para calcular derivadas.

Ejemplo

1.

Diferenciar $\boldsymbol{f(x) = x^2}$

- **Hallar el cociente diferencial**

$$\frac{\boldsymbol{f(x+h)-f(x)}}{\boldsymbol{h}} = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \frac{2xh + h^2}{h}$$

- **Hallamos el límite al cociente diferencial**

$$\boldsymbol{f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}} = \lim_{h\to 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(2x+h)}{h} = \lim_{h\to 0}(2x+h)$$

$$= 2x + 0 = 2x$$

2.

Diferenciar $\boldsymbol{f(x) = 7x^3}$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{7(x+h)^3 - 7x^3}{h} = \frac{7(x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3) - 7x^3}{h}$$

$$= \frac{7x^3 + 21x^2h + 21xh^2 + 7h^3 - 7x^3}{h} = \frac{21x^2h + 21xh^2 + 7h^3}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{21x^2h + 21xh^2 + 7h^3}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h(21x^2 + 21xh + 7h^2)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}(21x^2 + 21xh + 7h^2) = 21x^2 + 21x(0) + 7(0)^2 = 21x^2$$

3.

Diferenciar $\boldsymbol{f(x) = 1/x}$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \frac{\frac{x-(x+h)}{(x+h)(x)}}{h} = \frac{\frac{x-x-h}{(x+h)(x)}}{h} = \frac{\frac{-h}{(x+h)(x)}}{h}$$

$$= -\frac{h}{h(x+h)(x)}$$

$$f'(x) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} -\frac{h}{h(x+h)(x)} = \lim_{h\to 0} -\frac{1}{(x+h)(x)} = -\frac{1}{(x+0)(x)}$$

$$= -\frac{1}{x^2}$$

4.

Diferenciar $f(x) = x^n$, donde $n > 0$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \qquad (x+y)^n$$

$$= x^n + nx^{n-1}y + \frac{n(n-1)x^{n-2}}{2}y^2 + \cdots + y^n$$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{x^n + nx^{n-1}h + \frac{1}{2}n(n-1)x^{n-2}h^2 + \cdots + h^n - x^n}{h}$$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{nx^{n-1}h + \frac{1}{2}n(n-1)x^{n-2}h^2 + \cdots + h^n}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{nx^{n-1}h + \frac{1}{2}n(n-1)x^{n-2}h^2 + \cdots + h^n}{h}$$

$$f'(x) = \frac{h\left[x^{n-1} + \frac{1}{2}n(n-1)x^{n-2}h + \cdots + h^{n-1}\right]}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\left(x^{n-1} + \frac{1}{2}n(n-1)x^{n-2}h + \cdots + h^{n-1}\right)$$

$$f'(x) = x^{n-1} + \frac{1}{2}n(n-1)x^{n-2}(0) + \cdots + (0)^{n-1}$$

$$f'(x) = x^{n-1} + 0 + 0$$

$$f'(x) = x^{n-1}$$

Derivadas de funciones básicas

De acuerdo con Leithold (1987) el procedimiento que se sigue para encontrar la derivada de una función se llama diferenciación, sin embargo, como este proceso es demasiado largo existen teoremas que permiten hallar más fácilmente la derivada de ciertas funciones. A continuación, se encuentran algunas derivadas de funciones básicas:

1. $\frac{d}{dx}(c) = 0$ para todo constante c
2. $\frac{d}{dx}[cf(x)] = cf'(x)$ para toda constante c
3. $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$ para todo número real n
4. $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$

5. $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$
6. $\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$
7. $\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$
8. $\frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$
9. $\frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$
10. $\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a$ para todo número $a > 0$
11. $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$
12. $\frac{d}{dx}[\log_a(x)] = \frac{1}{x}\frac{1}{\ln a}$ para $> 0, a \neq 1$
13. $\frac{d}{dx}\ (\ln x) = \frac{1}{x}$
14. $\frac{d}{dx}(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
15. $\frac{d}{dx}(\arccos x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
16. $\frac{d}{dx}(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2}$
17. $\frac{d}{dx}(\operatorname{arcsec} x) = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$
18. $\frac{d}{dx}(\operatorname{arccsc} x) = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$
19. $\frac{d}{dx}(\operatorname{arccot} x) = -\frac{1}{1+x^2}$
20. $\frac{d}{dx}(\sinh x) = \cosh x$
21. $\frac{d}{dx}(\cosh x) = \sinh x$
22. $\frac{d}{dx}(\tanh x) = \operatorname{sech}^2 x$
23. $\frac{d}{dx}(\operatorname{sech} x) = -\operatorname{sech} x \tanh x$
24. $\frac{d}{dx}(\operatorname{csch} x) = -\operatorname{csch} x \coth x$
25. $\frac{d}{dx}(\coth x) = -\operatorname{csch}^2 x$

Derivadas laterales

Definición 16

Refiriéndonos a las derivadas laterales, Lara & Arroba (2017) indican que una función f es derivable en $x = a$ si $f'(a)$ existe. Es derivable sobre un intervalo abierto $]a, b[\ o \{0\} a, \infty[\ o\ ] -\infty, a[\ o\ ] -\infty, \infty[\}$ si es derivable en todo número del intervalo.

Derivadas a derecha e izquierda

De acuerdo con Lara & Arroba (2017) el $\lim_{x\to a} f(x)$ existe si $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x)$. Como la derivada de la función f en a está dado por $f'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$; dicha derivada existirá si $\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0^-}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

Estos límites son los que nos llevan a dar la siguiente definición:

Definición 17

Citando a los mismos autores, los límites $\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ y $\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, si existen se les conoce como derivada a derecha y derivada a izquierda de f en el punto a y se notan $f'_+(a)$, $f'_-(a)$ respectivamente.

Observación. En este mismo orden, los autores antes citados manifiestan si $f'_+(a)$ y $f'_-(a)$ existen y, además, $f'_+(a) = f'_-(a)$, entonces se dice que existe la derivada de la función f en el punto a.Es decir, $f'_+(a) \neq f'_-(a)$ entonces f no es derivable en a.

Indicar si las siguientes funciones son o no derivables en $x = 0$

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & six \leq 0 \\ x, & si\ x > 0 \end{cases}$$

$$f'_-(a) = \lim_{h\to 0^-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0^-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-}\frac{(h)^2-0}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^-}\frac{h^2}{h} \quad si\ h \neq 0$$

$$f'_+(a) = \lim_{h\to 0^+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{h-0}{h} = \lim_{h\to 0^+} 1 = 1$$

$\therefore$ como $f'_+(a) \neq f'_-(a)$, se dice que f no es derivable en $x = 0$.

Relación entre continuidad y derivabilidad

En términos de Lara & Arroba (2017) si f es derivable en a, entonces f es continua en a.

Observación. El recíproco del teorema anterior no siempre es verdadero. Es decir que si f es continua en a, en general no es cierto que f es derivable en a.

Aquí es recomendable colocar un ejemplo, pudiera ser la función “valor absoluto” y determinar que es continua en *x*= 0 pero no derivable en el mismo punto.

Propiedades de la derivada

A través de las propiedades, se puede simplificar el cálculo de la derivada de una función, en este sentido Lara & Arroba (2017, p. 417) si f y g son derivables en x, entonces $f+g$, $f-g$, $f \times g$ y $\left(\frac{f}{g}\right)$ son derivables en x (…). Además":

$$\frac{d}{dx}[f(x) \pm g(x)] = \frac{d}{dx}f(x) \pm \frac{d}{dx}g(x)$$

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)\frac{d}{dx}g(x) + g(x)\frac{d}{dx}f(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)\frac{d}{dx}f(x) - f(x)\frac{d}{dx}g(x)}{[g(x)]^2}$$

Calcular la derivada de las funciones reales definidas por:

1.

$$\boldsymbol{f(x) = x + \sqrt{x} + \sin x}$$

$$f'(x) = \left(x + \sqrt{x} + \sin x\right)'$$

$$f'(x) = (x)' + \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' + (\sin x)'$$

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + \cos x$$

2.

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{x - \sin x}{\csc x}}$$

$$f'(x) = \left[\frac{x - \sin x}{\csc x}\right]'$$

$$f'(x) = \frac{(\csc x)(x - \sin x)' - (x - \sin x)(\csc x)'}{(\csc x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{(\csc x)(1 - \cos x) - (x - \sin x)(-\csc x \cot x)}{\csc^2 x}$$

$$f'(x) = \frac{\csc x - \csc x \cos x + x \csc x \cot x - \sin x \csc x \cot x}{\csc^2 x}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{\sin x} - \frac{\cos x}{\sin x} + x\frac{1}{\sin x}\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\sin x}{\sin x}\frac{\cos x}{\sin x}}{\csc^2 x}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{\sin x} - \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{x\cos x}{\sin^2 x} - \frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{1}{\sin^2 x}}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{\sin x - \sin x \cos x + x\cos x - \sin x \cos x}{\sin^2 x}}{\frac{1}{\sin^2 x}}$$

$$f'(x) = \sin x - 2\sin x \cos x + x\cos x$$

3.

$$\boldsymbol{f(x) = \sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt[3]{x}} = x^{\frac{1}{2}} + 2x^{-\frac{1}{3}}}$$

$$f'(x) = \left[x^{\frac{1}{2}} + 2x^{-\frac{1}{3}}\right]'$$

$$f'(x) = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' + \left(2x^{-\frac{1}{3}}\right)'$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + 2\left(-\frac{1}{3}\right)x^{-\frac{4}{3}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + \frac{2}{3}x^{-\frac{4}{3}}$$

4.

$$\boldsymbol{f(x) = \sin x \cos x}$$

$$f'(x) = (\sin x \cos x)'$$

$$f'(x) = \sin x\,(\cos x)' + (\cos x)(\sin x)'$$

$$f'(x) = (\sin x)(-\sin x) + (\cos x)(\cos x)$$

$$f'(x) = -\sin^2 x + \cos^2 x$$

$$f'(x) = +\cos^2 x - \sin^2 x$$

$$f'(x) = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x)$$

$$f'(x) = \cos^2 x - 1 + \cos^2 x$$

$$f'(x) = 2\cos^2 x - 1$$

$$f'(x) = \cos 2x$$

5.

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{ax^2+bx+c}{\sin x+\cos x}}$$

$$f'(x) = \left(\frac{ax^2 + bx + c}{\sin x + \cos x}\right)'$$

$$f'(x) = \frac{(\sin x + \cos x)(ax^2 + bx + c)' - (ax^2 + bx + c)(\sin x + \cos x)'}{(\sin x + \cos x)^{\mathbf{2}}}$$

$$f'(x) = \frac{(\sin x + \cos x)(2ax + b) - (ax^2 + bx + c)(\cos x - \sin x)}{(\sin x + \cos x)^{\mathbf{2}}}$$

$$f'(x) = \frac{2ax\sin x + b\sin x + 2ax\cos x + b\cos x - ax^2\cos x - ax^2\sin x - bx\cos x + bx\sin x - \cos x + c\sin x}{(\sin^2 x + 2\sin x\cos x + \cos^2 x)}$$

$$f'(x) = \frac{\sin x\,(ax^2 + 2ax + bx + b + c) + \cos x\,(-ax^2 + 2ax - bx + b - c)}{(1 + 2\sin x\cos x)}$$

$$f'(x) = \frac{\sin x\,(ax^2 + (2a + b)x + (b + c)) + \cos x\,(-ax^2 + (2a - b)x + (b - c))}{(1 + 2\sin x\cos x)}$$

6.

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - 2\sin x\cos x - \frac{\sqrt[3]{x}+2}{\sqrt[3]{x}-3}}$$

$$f'(x) = \left[\frac{1}{\sqrt{x}} - 2\sin x\cos x - \frac{\sqrt[3]{x} + 2}{\sqrt[3]{x} - 3}\right]'$$

$$f'(x) = \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)' - 2(\sin x\cos x)' - \left(\frac{x^{\frac{1}{3}} + 2}{x^{\frac{1}{3}} - 3}\right)'$$

$$f'(x) = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} - 2[\sin x\,(\cos x)' + (\cos x)(\sin x)']$$

$$- \frac{\left(x^{\frac{1}{3}} - 3\right)\left(x^{\frac{1}{3}} + 2\right)' - \left(x^{\frac{1}{3}} + 2\right)\left(x^{\frac{1}{3}} - 3\right)'}{\left(x^{\frac{1}{3}} - 3\right)^2}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} - 2[\sin x(-\sin x) + (\cos x)(\cos x)]$$
$$-\frac{\left(x^{\frac{1}{3}}-3\right)\left(\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\right)-\left(x^{\frac{1}{3}}+2\right)\left(\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\right)}{\left(x^{\frac{1}{3}}-3\right)^{2}}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} + 2\sin^2 x - 2\cos^2 x - \frac{\frac{1}{3}x^{-\frac{1}{3}} - x^{-\frac{2}{3}} - \frac{1}{3}x^{-\frac{1}{3}} - \frac{2}{3}x^{-\frac{2}{3}}}{\left(x^{\frac{1}{3}}-3\right)^{2}}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} + 2(\sin^2 x - \cos^2 x) - \frac{-\frac{5}{3}x^{-\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}} - 6x^{\frac{1}{3}} + 9}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} + 2(\sin^2 x - 1 + \sin^2 x) - \frac{1}{\frac{x^{\frac{2}{3}} - 6x^{\frac{1}{3}} + 9}{-\frac{5}{3}x^{-\frac{2}{3}}}}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} + 2(2\sin^2 x - 1) - \frac{1}{\left(-\frac{3}{5}x^{0} + \frac{18}{5}x^{1} - \frac{27}{5}x^{\frac{2}{3}}\right)}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} - 2(1 - 2\sin^2 x) - \frac{5}{\left(-3 + 18x - 27x^{\frac{2}{3}}\right)}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} - 2\cos 2x - \frac{5}{\left(-3 + 18x - 27x^{\frac{2}{3}}\right)}$$

7.

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{\sec x + \tan x - \cot x}{\sin x + \cos x + \csc x}}$$

$$f'(x) = \left(\frac{\sec x + \tan x - \cot x}{\sin x + \cos x + \csc x}\right)'$$

$$f'(x) = \frac{(\sin x + \cos x + \csc x)(\sec x + \tan x - \cot x)' - (\sin x + \cos x + \csc x)(\sec x + \tan x - \cot x)'}{(\sin x + \cos x + \csc x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{(\sin x + \cos x + \csc x)(\sec x \tan x + \sec^2 x + \csc^2 x) - (\sin x + \cos x + \csc x)(\cos x - \sin x - \csc x \cot x)}{(\sin^2 x + \cos^2 x + \csc^2 x + 2\sin x\cos x + 2\sin x\csc x + 2\cos x\csc x)}$$

$$(\sin^2 x + \cos^2 x) + \csc^2 x + 2\sin x\,(\cos x + \csc x) + 2\cos x\csc x$$

$$1 + \csc^2 x + 2\sin x\cos x + 2 + 2\cot x$$

$$3 + \csc^2 x + \sin 2x + 2\cot x$$

$f'(x)$

$$= \frac{(sin\,x + \cos x + \csc x)(\sec x\tan x + \sec^2 x + \csc^2 x) - (sin\,x + \cos x + \csc x)(\cos x - \sin x - \csc x\cot x)}{3 + \csc^2 x + \sin 2x + 2\cot x}$$

Calcular $\frac{dy}{dx}$ si:

8.

$\boldsymbol{y = \sin x + \cos x}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}[x\sin x + \cos x]$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x\,sin\,x) + \frac{d}{dx}cos\,x$$

$$\frac{dy}{dx} = x\frac{d}{dx}(sin\,x) + sin\,x\frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}cos\,x$$

$$\frac{dy}{dx} = x\,cos\,x + sin\,x - sin\,x$$

$$\frac{dy}{dx} = x\,cos\,x$$

9.

$\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x}$**, encontrar todos los valores de x para los que** $\boldsymbol{f'(x) = 0}$

$$f'(x) = \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x\right]'$$

$$f'(x) = \frac{1}{3}(3x^2) + \frac{1}{2}(-2x) - 2$$

$$f'(x) = x^2 + x - 2$$

$$f'(x) = (x+2)(x-1)$$

$$f'(x) = 0$$

$$(x+2)(x-1) = 0$$

$$x + 2 = 0 \ \vee x - 1 = 0$$

$$x = -2 \ \vee x = 1$$

Encuentre una regla o fórmula para la derivada de los siguientes productos de funciones utilizando el hecho que: $(\boldsymbol{f}.\boldsymbol{g})'(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{g}'(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})$

$$(\boldsymbol{f}.\boldsymbol{g}.\boldsymbol{h}.\boldsymbol{k})'(\boldsymbol{x}) = [(fg)(hk)]'(x) = (fg)(x)(hk)'(x) + (hk)(x)(fg)'(x)$$

$$= f(x)g(x)[h(x)k'(x) + k(x)h'(x)] + h(x)k(x)[f(x)g'(x) + g(x)f'(x)]$$
$$= f(x)g(x)h(x)k'(x) + f(x)g(x)h'(x)k(x) + f(x)g'(x)h(x)k(x)$$
$$+ f'(x)g(x)h(x)k(x)$$

Calcular $D_x f(x)$ **si:**

10.

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{tan}\,\boldsymbol{x} + \mathbf{cot}\,\boldsymbol{x} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{sin}\,\boldsymbol{x}} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{cos}\,\boldsymbol{x}}$$

$$D_x f(x) = D_x\left[tan\,x + cot\,x + \frac{1}{sin\,x} + \frac{1}{cos\,x}\right]'$$
$$D_x f(x) = D_x(tan\,x) + D_x(cot\,x) + D_x\left(\frac{1}{sin\,x}\right) + D_x\left(\frac{1}{cos\,x}\right)$$
$$D_x f(x) = sec^2\,x - csc^2\,x - \csc x \cot x + \sec x \tan x$$

11.

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{2}\boldsymbol{x}\left(\frac{\boldsymbol{x}-\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}+\mathbf{2}}\right)^{\mathbf{2}}$$

$$Dxf(x) = 2Dx\left[x\left(\frac{x-1}{x+2}\right)\left(\frac{x-1}{x+2}\right)\right]$$
$$Dxf(x) = 2\left\{\left[x\left(\frac{x-1}{x+2}\right)Dx\left(\frac{x-1}{x+2}\right)\right] + \left[xDx\left(\frac{x-1}{x+2}\right)\left(\frac{x-1}{x+2}\right)\right]\right.$$
$$\left. + \left[Dx(x)\left(\frac{x-1}{x+2}\right)\left(\frac{x-1}{x+2}\right)\right]\right\}$$
$$Dx\left(\frac{x-1}{x+2}\right) = \frac{(x+2)Dx(x-1) - (x-1)Dx(x+2)}{(x+2)^2}$$
$$Dx\left(\frac{x-1}{x+2}\right) = \frac{(x+2)(1) - (x-1)(1)}{(x+2)^2}$$
$$Dx\left(\frac{x-1}{x+2}\right) = \frac{x+2-x+1}{(x+2)^2}$$
$$Dx\left(\frac{x-1}{x+2}\right) = \frac{3}{(x+2)^2}$$

$$Dxf(x) = 2\left\{x\left(\frac{x-1}{x+2}\right)\frac{3}{(x+2)^2} + x\left(\frac{3}{(x+2)^2}\right)\left(\frac{x-1}{x+2}\right) + 1\left(\frac{x-1}{x+2}\right)\left(\frac{x-1}{x+2}\right)\right\}$$

$$Dxf(x) = 2\left\{\frac{3x(x-1)}{(x+2)^3} + \frac{3x(x-1)}{(x+2)^3} + \left(\frac{x-1}{x+2}\right)^2\right\}$$

$$Dxf(x) = 2\left\{\frac{6x(x-1)}{(x+2)^3} + \left(\frac{x-1}{x+2}\right)^2\right\}$$

$$Dxf(x) = \frac{12x(x-1)}{(x+2)^3} + 2\left(\frac{x-1}{x+2}\right)^2$$

Calcular y' si:

12.

$\boldsymbol{y = ln\, x + ln\left(\frac{1}{x}\right) + ln\left(\frac{1}{x^2}\right)}$

$$y = \ln x + \ln 1 - ln\, x + ln\, 1 - ln\, x^2$$

$$y = ln\, x - ln\, x - ln\, x^2$$

$$y = -\, ln\, x^2$$

$$y = -2\, ln\, x$$

$$y' = -2\, (ln\, x)'$$

$$y' = -2\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$y' = -\frac{2}{x}$$

13.

$\boldsymbol{y = x^2 \ln x}$

$$y' = (x^2\, ln\, x)'$$

$$y' = x^2(ln\, x)' + (ln\, x)(x^2)'$$

$$y' = x^2\left(\frac{1}{x}\right) + (ln\, x)(2x)$$

$$y' = x + 2x\, ln\, x$$

Derivada de la función compuesta

Para hallar la derivada de la composición de dos funciones $f(g(x))$ usamos la regla de la derivación en cadena, en este mismo sentido Leithold (1987) “para determinar la derivada de una función compuesta se usa uno de los teoremas importantes del Cálculo llamado regla de la cadena” (p. 245), y se pueden aplicar los siguientes pasos:

1. En estos casos, hay que aprender a reconocer una función compuesta cuando esta aparezca.

Considerar la función $\boldsymbol{h(x) = (3x-2)^4}$**.** Esta función es la composición de dos funciones $f(x) = x^4$ y $g(x) = (3x-2)$; así que $h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$

2. La representación simbólica de la regla de derivación en cadena para $f(g(x))$ es:

$$\frac{d}{dx}f(g(x)) = \frac{d}{dx}f(g(x))\frac{d}{dx}g(x)$$

Ejemplos

1.

Diferenciar $h(x) = (3x-2)^4$

$h'(x) = [(3x-2)^4]'$

$h'(x) = 4(3x-2)^3(3x-2)'$

$h'(x) = 4(3x-2)^3(3)$

$h'(x) = 12(3x-2)^3$

2.

Diferenciar $h(x) = \sin(x^2 + 1)$

$h'(x) = [\sin(x^2 + 1)]'$

$h'(x) = \cos(x^2 + 1)(x^2 + 1)'$

$h'(x) = \cos(x^2 + 1)(2x)$

$h'(x) = 2x\cos(x^2 + 1)$

3.

Diferenciar $f(x) = e^{5x-1}$

$f'(x) = [e^{5x-1}]'$

$f'(x) = e^{5x-1}(5x - 1)'$

$f'(x) = 5e^{5x-1}$

4.

Diferenciar $f(x) = \ln(2 + \sin x)$

$f'(x) = [\ln(2 + \sin x)]$

$$f'(x) = \frac{1}{2 + \sin x}(2 + \sin x)'$$

$$f'(x) = \frac{1}{2 + \sin x}(0 + \cos x)$$

$$f'(x) = \frac{1}{2 + \sin x}\ (\cos x)$$

5.

Diferenciar $f(x) = \sin e^{x^2+2x+5}$

$f'^{(x)} = \left[\sin e^{x^2+2x+5}\right]'$

$$f'^{(x)}=\cos e^{x^2+2x+5}\left(e^{x^2+2x+5}\right)'$$

$$f'^{(x)}=\cos e^{x^2+2x+5}\left(e^{x^2+2x+5}\right)(x^2+2x+5)'$$

$$f'^{(x)}=\cos e^{x^2+2x+5}\left(e^{x^2+2x+5}\right)(2x+2)$$

$$f'^{(x)}=(2x+2)\cos e^{x^2+2x+5}\left(e^{x^2+2x+5}\right)$$

6.

Diferenciar $y=\cos^5(x^3+1)$

$$y'=[\cos^5(x^3+1)]'$$

$$y'=5\cos^4(x^3+1)\,[\cos(x^3+1)]'$$

$$y'=5\cos^4(x^3+1)\,[-\sin(x^3+1)](x^3+1)'$$

$$y'=5\cos^4(x^3+1)\,[-\sin(x^3+1)](3x^2)$$

$$y'=-15\cos^4(x^3+1)\sin(x^3+1)$$

7.

Diferenciar $f(x)=x^2e^x+\left[\frac{(x+2)}{(x-x^2)}\right]+\sin(x^2+1)$

$$f'(x)=\left\{x^2e^x+\left[\frac{(x+2)}{(x-x^2)}\right]+\sin(x^2+1)\right\}'$$

$$f'(x)=(x^2e^x)'+\left[\frac{(x+2)}{(x-x^2)}\right]'+[\sin(x^2+1)]'$$

$$f'(x)=(x^2)(e^x)'+(e^x)(x^2)'+\frac{(x-x^2)(x+2)'-(x+2)(x-x^2)'}{(x-x^2)^2}$$
$$+\cos(x^2+1)\,(x^2+1)'$$

$$f'(x)=x^2e^x+2xe^x+\frac{(x-x^2)(1)-(x+2)(1-2x)}{(x-x^2)^2}+2x\cos(x^2+1)$$

8.

Diferenciar $f(x) = \sin\left(\frac{x^2+2x}{x-1}\ln x\right)$

$$f'(x) = \left[\sin\left(\frac{x^2+2x}{x-1}\ln x\right)\right]'$$

$$f'(x) = \cos\left(\frac{x^2+2x}{x-1}\ln x\right)\left(\frac{x^2+2x}{x-1}\ln x\right)'$$

$$f'(x) = \cos\left(\frac{x^2+2x}{x-1}\ln x\right)\left[\left(\frac{x^2+2x}{x-1}\right)(\ln x)' + (\ln x)\left(\frac{x^2+2x}{x-1}\right)'\right]$$

$$f'(x) = \cos\left(\frac{x^2+2x}{x-1}\ln x\right)\left[\left(\frac{x^2+2x}{x-1}\right)\left(\frac{1}{x}\right) + (\ln x)\frac{(x-1)(x^2+2x)' - (x^2+2x)(x-1)'}{(x-1)^2}\right]$$

$$f'(x) = \cos\left(\frac{x^2+2x}{x-1}\ln x\right)\left[\left(\frac{x^2+2x}{x-1}\right)\left(\frac{1}{x}\right) + (\ln x)\frac{(x-1)(2x+2) - (x^2+2x)}{(x-1)^2}\right]$$

9.

Diferenciar $\boldsymbol{f(x)} = \frac{\boldsymbol{x^3}}{\mathbf{ln}(\boldsymbol{e^x}+\mathbf{1})}$

$$f'(x) = \left[\frac{x^3}{\ln(e^x+1)}\right]'$$

$$f'(x) = \frac{(\ln(e^x+1))(x^3)' - (x^3)(\ln(e^x+1))'}{(\ln(e^x+1))^{\mathbf{2}}}$$

$$f'(x) = \frac{(\ln(e^x+1))(3x^2) - (x^3)\left(\frac{1}{e^x+1}\right)(e^x+1)'}{\ln^2(e^x+1)}$$

$$f'(x) = \frac{(\ln(e^x+1))(3x^2) - \left(\frac{x^3}{e^x+1}\right)(e^x)}{\ln^2(e^x+1)}$$

$$f'(x) = \frac{3x^2 \ln(e^x + 1) - \frac{x^3 e^x}{e^x + 1}}{\ln^2(e^x + 1)}$$

10.

Diferenciar $f(x) = \sqrt{\sin x \cos x + 2}$

$$f'(x) = \left[(\sin x \cos x + 2)^{\frac{1}{2}}\right]'$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(\sin x \cos x + 2)^{-\frac{1}{2}}(\sin x \cos x + 2)'$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(\sin x \cos x + 2)^{-\frac{1}{2}}[(\sin x \cos x)' + (2)']$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(\sin x \cos x + 2)^{-\frac{1}{2}}[(\sin x)(\cos x)' + (\cos x)(\sin x)']$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(\sin x \cos x + 2)^{-\frac{1}{2}}[(\sin x)(-\sin x) + (\cos x)(\cos x)]$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(\sin x \cos x + 2)^{-\frac{1}{2}}(-\sin^2 x + \cos^2 x)$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(\sin x \cos x + 2)^{-\frac{1}{2}}(\cos^2 x - \sin^2 x)$$

11.

Diferenciar $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x + 1}\sqrt[3]{x^3 - 1}$

$$f'(x) = \left[(x^2 + 3x + 1)^{\frac{1}{2}}(x^3 - 1)^{\frac{1}{3}}\right]'$$

$$f'(x) = (x^2 + 3x + 1)^{\frac{1}{2}}\left[(x^3 - 1)^{\frac{1}{3}}\right]' + (x^3 - 1)^{\frac{1}{3}}\left[(x^2 + 3x + 1)^{\frac{1}{2}}\right]'$$

$$f'(x) = (x^2 + 3x + 1)^{\frac{1}{2}}\,\frac{1}{3}(x^3 - 1)^{-\frac{2}{3}}(x^3 - 1)'$$
$$+ (x^3 - 1)^{\frac{1}{3}}\,\frac{1}{2}(x^2 + 3x + 1)^{-\frac{1}{2}}(x^2 + 3x + 1)'$$

$$f'(x) = (x^2+3x+1)^{\frac{1}{2}}\ \frac{1}{3}(x^3-1)^{-\frac{2}{3}}(3x^2) + (x^3-1)^{\frac{1}{3}}\ \frac{1}{2}(x^2+3x+1)^{-\frac{1}{2}}(2x+3)$$

$$f'(x) = x^2(x^2+3x+1)^{\frac{1}{2}}\ (x^3-1)^{-\frac{2}{3}} + \frac{1}{2}(2x+3)(x^3-1)^{\frac{1}{3}}\ (x^2+3x+1)^{-\frac{1}{2}}$$

Derivación implícita

La derivación implícita permite la simplificación en el cálculo de las derivadas, al respecto Swokowski (1988) “f está definida implícitamente por una ecuación si y sólo si al sustituir y por $f(x)$ se llega a una identidad” (p. 136), o también se puede aplicar lo siguiente, en ese caso Farrand & Jim Poxon (1988) plantean y dan respuesta a las siguientes preguntas:

¿Cómo decidir cuándo usar derivación implícita?

Se puede usar derivación implícita para hallar dy cuando y no ha sido dada como una función de x, una ecuación que dx relaciona dos variables, xey, describe una relación entre las dos variables que puede representarse gráficamente. Esto no necesariamente define una variable en función de la otra.

Ejemplo

$x^2 + y^2 = 1$

$(x^2+y^2)^2 + 3x^2y - y^3 = 0$

$x^2e^x + y^2 - e^y = 2$

¿Cómo diferenciar implícitamente?

Para realizar una derivación implícita se trata y como una función de x y se diferencian ambos lados de la ecuación.

Proceder con cautela al usar las reglas para derivación

Cuando se deriva implícitamente, deberían aplicarse cuidadosamente las reglas de la cadena, producto y cociente. Al final, se despeja $f'(x)$.

Ejemplos

1.

Sobre la curva $xy + y^{\frac{1}{2}} = x + y$, **hallar** $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{d}{dx}(xy) + \frac{d}{dx}\left(y^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}(y)$$

$$x\frac{d}{dx}(y) + y\frac{d}{dx}(x) + \frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx}$$

$$x\frac{dy}{dx} + y + \frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}\left(x + \frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}} - 1\right) = 1 - y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - y}{x + \frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}} - 1}$$

2.

Sobre la curva $y^2 + e^{xy} = \sin(x^2y^2) + 2$, **hallar** $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{d}{dx}(y^2) + \frac{d}{dx}(e^{xy}) = \frac{d}{dx}[\sin(x^2y^2)] + \frac{d}{dx}(2)$$

$$2y\frac{dy}{dx} + e^{xy}\frac{d}{dx}(xy) = \cos(x^2y^2)\frac{d}{dx}(x^2y^2) + 0$$

$$2y\frac{dy}{dx} + e^{xy}\left[x\frac{d}{dx}(y) + y\frac{d}{dx}(x)\right] = \cos(x^2y^2)\left[x^2\frac{d}{dx}(y^2) + y^2\frac{d}{dx}(x^2)\right]$$

$$2y\frac{dy}{dx} + e^{xy}\left[x\frac{dy}{dx} + y\right] = \cos(x^2y^2)\left[2x^2y\frac{dy}{dx} + 2xy^2\right]$$

$$2y\frac{dy}{dx} + xe^{xy}\frac{dy}{dx} + ye^{xy} = 2x^2y\cos(x^2y^2)\frac{dy}{dx} + 2xy^2\cos(x^2y^2)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy^2\cos(x^2y^2) - ye^{xy}}{2y + xe^{xy} - 2x^2y\cos(x^2y^2)}$$

Derivada de funciones inversas

Teorema.

Sea f continua y estrictamente monótona en $[a,b]$. Sea g la función inversa de f. Si $f'(x)$ existe para todo $x \in]a,b[$; de esta misma forma, Rojas et al.(2017) “si $f: D \subseteq \mathrm{R} \rightarrow \mathrm{R}$ es inyectiva, existe la función inversa $f^{-1}: Im(f) \rightarrow D$ tal que:

$$x = f^{-1}(y) \leftrightarrow y = f(x)$$

Se verifican, entonces” (p. 140).

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)}; f'(x) \neq 0; y = f(x) \wedge x = f^{-1}(y)$$

Ejemplo

1.

Sea $f(x) = \ln x$, **calcular la derivada de su función inversa**.

Sea g su función inversa, entonces con el teorema descrito se tiene que:

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x$$

Calculamos la inversa de f

$y = \ln x$

$e^y = e^{\ln x}$

$y = x = g(y)$

$g(y) = e^y$

$g'(y) = (e^y)'$

$g'(y) = e^y$

$g'(y) = e^{\ln x}$

$g'(y) = x$

2.

Para $f(x) = \arcsin x$ **hallar** $\frac{dy}{dx}$

$f'(x) = (\arcsin x)'$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}} = \sqrt{1 - x^2}$$

$y = \arcsin x$

$\sin y = \sin(\arcsin x)$

$\sin y = x$

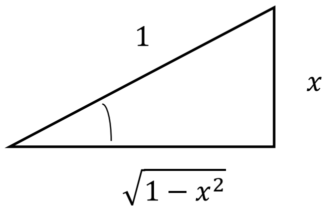
$g(y) = \sin y$

$g'(y) = (\sin y)'$

$g'(y) = \cos y$

$g'(y) = \cos(\arcsin x)$

$g'(y) = \sqrt{1 - x^2}$



$\cos(y) = \sqrt{1 - x^2}$

$\sin y = x$

$$\frac{d}{dx}(\sin y) = \frac{d}{dx}(x)$$

$$\cos y \frac{dy}{dx} = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y}$$

3.

Para $\boldsymbol{y} = \arctan x$, hallar $\boldsymbol{\frac{dy}{dx}}$

$$f'(x) = (\arctan x)'$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

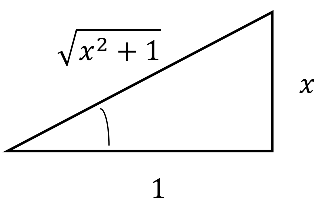
$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

$$g'(y) = \frac{1}{\frac{1}{1+x^2}}$$

$$g'(y) = 1 + x^2$$

$$\tan y = \tan \arctan x$$

$$\tan y = x$$



$$\cos(y) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\sec y = \frac{1}{\cos y}$$

$$\sec y = \sqrt{1+x^2}$$

$\sec^2 y = 1 + x^2$

$g(y) = \tan y$

$g'(x) = (\tan y)'$

$g'(x) = \sec^2 y$

$g'(x) = \sec^2(\arctan x)$

$g'(x) = 1 + x^2$

Derivación logarítmica

Para Farrand & Jim Poxon (1988) "la diferenciación logarítmica es principalmente una técnica para ahorrar trabajo al diferenciar funciones que de otra manera podrían generar el uso repetido de las reglas del producto y del cociente" (p. 124).

Fórmula para la derivación logarítmica

Debido a que $\frac{d}{dx}(\ln f(x)) = \frac{1}{f(x)} \quad f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$, se tiene que:

$$f'(x) = f(x)\frac{d}{dx}(\ln f(x))$$

Ejemplo

1.

Calcular la derivada de $f(x) = x^3(\sin x)e^x$

Proceso:

1. Hallar $\ln f(x)$.
2. Se simplifica $\ln f(x)$ usando las propiedades de los logaritmos.
3. Se diferencia.
4. Se multiplica el resultado por $f(x)$

$$\ln f(x) = \ln[x^3(\sin x)e^x]$$

$$\ln f(x) = \ln x^3 + \ln(\sin x) + \ln e^x$$

$$\ln f(x) = 3\ln x + \ln(\sin x) + x\ln e$$

$$\ln f(x) = 3\ln x + \ln(\sin x) + x$$

$$\frac{d}{dx}\ln f(x) = 3\frac{d}{dx}\ln x + \frac{d}{dx}\ln(\sin x) + \frac{d}{dx}x$$

$$\frac{d}{dx}\ln f(x) = 3\frac{d}{dx}\ln x + \frac{d}{dx}\ln(\sin x) + \frac{d}{dx}x$$

$$f'(x) = 3\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{\sin x}\frac{d}{dx}(\sin x) + 1$$

$$f'(x) = \frac{3}{x} + \frac{\cos x}{\sin x} + 1$$

$$f'(x) = f(x)\left[\frac{3}{x} + \cot x + 1\right]$$

$$f'(x) = x^3(\sin x)e^x\left[\frac{3}{x} + \cot x + 1\right]$$

2.

Calcular la derivada de $\boldsymbol{f(x) = \frac{\sqrt{x}(x^3-1)^2}{x-5}}$

$$f(x) = y$$

$$\ln y = \ln\left[\frac{\sqrt{x}(x^3-1)^2}{x-5}\right]$$

$$\ln y = \ln\sqrt{x} + \ln(x^3-1)^2 - \ln(x-5)$$

$$\ln y = \ln x^{\frac{1}{2}} + 2\ln(x^3-1) - \ln(x-5)$$

$$\ln y = \frac{1}{2}\ln x + 2\ln(x^3-1) - \ln(x-5)$$

$$\frac{d}{dx}\ln y = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\ln x + 2\frac{d}{dx}\ln(x^3-1) - \frac{d}{dx}\ln(x-5)$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}\right) + 2\left(\frac{1}{x^3-1}\right)\frac{d}{dx}(x^3-1) - \frac{1}{x-5}\frac{d}{dx}(x-5)$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}\right) + 2\left(\frac{1}{x^3-1}\right)(3x^2) - \frac{1}{x-5}(1)$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2x} + \frac{6x^2}{x^3-1} - \frac{1}{x-5}$$

$$\frac{dy}{dx} = y\left[\frac{1}{2x} + \frac{6x^2}{x^3-1} - \frac{1}{x-5}\right]$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{x}(x^3-1)^2}{x-5}\left[\frac{1}{2x} + \frac{6x^2}{x^3-1} - \frac{1}{x-5}\right]$$

Utilización de la derivación logarítmica para evitar el uso repetido de las reglas del producto y del cociente.

1.

Diferenciar $f(x) = \frac{\left(x^3\sqrt{1+x}(3-x^2)^4\right)}{(x+1)^7\sqrt{x+2}}$

$$\ln y = \ln\left[\frac{\left(x^3\sqrt{1+x}(3-x^2)^4\right)}{(x+1)^7\sqrt{x+2}}\right]$$

$$\ln y = \ln x^3 + \ln\sqrt{1+x} + \ln(3-x^2)^4 - \ln(x+1)^7 - \ln\sqrt{x+2}$$

$$\ln y = 3\ln x + \frac{1}{2}\ln(1+x) + 4\ln(3-x^2) - 7\ln(x+1) - \frac{1}{2}\ln(x+2)$$

$$\frac{d}{dx}\ln y = 3\frac{d}{dx}\ln x + \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\ln(1+x) + 4\frac{d}{dx}\ln(3-x^2) - 7\frac{d}{dx}\ln(x+1) - \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\ln(x+2)$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 3\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x}\right)\frac{d}{dx}(1+x) + 4\left(\frac{1}{3-x^2}\right)\frac{d}{dx}(3-x^2) - 7\left(\frac{1}{x+1}\right)\frac{d}{dx}(x+1) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+2}\right)\frac{d}{dx}(x+2)$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{3}{x} + \frac{1}{2(1+x)} - \frac{8x}{3-x^2} - \frac{7}{x+1} - \frac{1}{2(x+2)}$$

$$\frac{dy}{dx} = y\left[\frac{3}{x} + \frac{1}{2(1+x)} - \frac{8x}{3-x^2} - \frac{7}{x+1} - \frac{1}{2(x+2)}\right]$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left(x^3\sqrt{1+x}(3-x^2)^4\right)}{(x+1)^7\sqrt{x+2}}\left[\frac{3}{x} + \frac{1}{2(1+x)} - \frac{8x}{3-x^2} - \frac{7}{x+1} - \frac{1}{2(x+2)}\right]$$

2.

Para $\boldsymbol{f(x) = \frac{\sin x \cos x \sin(x+1)}{\sin(x+3)}}$, hallar $\boldsymbol{f'(x)}$

$$\ln y = \ln\left[\frac{\sin x \cos x \sin(x+1)}{\sin(x+3)}\right]$$

$$\ln y = \ln(\sin x) + \ln(\cos x) + \ln(\sin(x+1)) - \ln(\sin(x+3))$$

$$\frac{d}{dx}\ln y = \frac{d}{dx}\ln(\sin x) + \frac{d}{dx}\ln(\cos x) + \frac{d}{dx}\ln(\sin(x+1)) - \frac{d}{dx}\ln(\sin(x+3))$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sin x}\frac{d}{dx}(\sin x) + \frac{1}{\cos x}\frac{d}{dx}(\cos x) + \frac{1}{\sin(x+1)}\frac{d}{dx}\sin(x+1) - \frac{1}{\sin(x+3)}\frac{d}{dx}\sin(x+3)$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos(x+1)}{\sin(x+1)}\frac{d}{dx}(x+1) - \frac{\cos(x+3)}{\sin(x+3)}\frac{d}{dx}(x+3)$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \cot x - \tan x + \cot(x+1) - \cot(x+3)$$

$$\frac{dy}{dx} = y[\cot x - \tan x + \cot(x+1) - \cot(x+3)]$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin x \cos x \sin(x+1)}{\sin(x+3)}[\cot x - \tan x + \cot(x+1) - \cot(x+3)]$$

Uso de la derivación logarítmica para funciones con la variable en el exponente.

1.

Diferenciar $f(x) = x^x$

$$\ln y = \ln x^x$$

$$\ln y = x \ln x$$

$$\frac{d}{dx} \ln y = \frac{d}{dx}(x \ln x)$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = (x)\frac{d}{dx}(\ln x) + (\ln x)\frac{d}{dx}(x)$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = (x)\left(\frac{1}{x}\right) + (\ln x)$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 1 + \ln x$$

$$\frac{dy}{dx} = y(1 + \ln x)$$

2.

Diferenciar $y = (x^2 + 1)^{\sin x}$

$$\ln y = \ln\left[(x^2 + 1)^{\sin x}\right]$$

$$\ln y = \sin x \ln(x^2 + 1)$$

$$\frac{d}{dx} \ln y = \frac{d}{dx}[\sin x \ln(x^2 + 1)]$$

$$\frac{d}{dx} \ln y = (\sin x)\frac{d}{dx}(\ln(x^2 + 1)) + (\ln(x^2 + 1))\frac{d}{dx}(\sin x)$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = (\sin x)\left(\frac{1}{x^2 + 1}\right)\frac{d}{dx}(x^2 + 1) + (\ln(x^2 + 1))(\cos x)$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{2x\sin x}{x^2+1} + \cos x \ln(x^2+1)$$

$$\frac{dy}{dx} = y\left[\frac{2x\sin x}{x^2+1} + \cos x \ln(x^2+1)\right]$$

$$\frac{dy}{dx} = (x^2+1)^{\sin x}\left[\frac{2x\sin x}{x^2+1} + \cos x \ln(x^2+1)\right]$$

Para todos los problemas que piden hallar $\left.\frac{dy}{dx}\right|(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ para una curva $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ está sobre la curva.

- Sobre la curva $x^2+y^2=4$, hallar $\left.\frac{dy}{dx}\right|\left(1,\sqrt{3}\right) \wedge \left.\frac{dy}{dx}\right|\left(1,-\sqrt{3}\right)$
- Si $\frac{x+y}{x-y} = \sqrt{x+y+6}$, hallar $\left.\frac{dy}{dx}\right|(2,1)$
- Hallar $\frac{dy}{dx}$ si y está definida implícitamente por $e^{x+y} = (x^2-y^2)^{\frac{1}{3}}$
- Hallar $\left.\frac{dy}{dx}\right|\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$ si $(x^2+y^2)^2+3x^2y-y^3=0$
- Hallar los puntos sobre la representación gráfica de $x^2+xy+y^2=4$ donde la recta tangente es horizontal → buscar puntos $\frac{dy}{dx}=0$

$y=-2x$ reemplazar en la original

$$x = \frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ ó } -\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Luego reemplazar en $y=-2x$

- Si $y^3 - \left(\frac{x}{y}\right) + x^2 = xy + y$, hallar $\left.\frac{dy}{dx}\right|(2,1)$
- Sea y definido por $\sin(x+y) = x\cos y^2$, hallar $\frac{dy}{dx}$ en el punto $(0,0)$
- Obtener la ecuación de la recta que es tangente a la curva $(x^2-y^2)^{\frac{1}{2}} = x+y-6$ en $(5,4)$

$$pendiente = \frac{2}{7}\,y\ pasa\ por\ (5,4)$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

- Hallar la ecuación de la recta tangente o la representación gráfica de $\cos xy = x \sin xy$ en $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$.
- Demostrar que las gráficas $y^{\frac{4}{3}} + x \ \wedge x = y + y^5$ tiene una recta tangente común en el origen. Hallar $\frac{dy}{dx}\Big|(0{,}0)$ para ambas curvas (las rectas tienen igual pendiente).
- Demostrar que las gráficas de $xy = \sqrt{2} \wedge x^2 - y^2 = 1$ tienen rectas tangentes perpendiculares en sus puntos de intersección.

  $y = \frac{\sqrt{2}}{x}$ y se reemplaza en $x^2 - y^2 = 1 \rightarrow x = \pm\sqrt{2}$

  Las curvas cortan en $\left(\sqrt{2}, 1\right) y \left(-\sqrt{2}, -1\right)$. Para la curva $xy = \sqrt{2}$

  $$x\frac{dy}{dx} + y = 0 \rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \quad \frac{dy}{dx}\Big|\left(\sqrt{2}, 1\right) = \frac{dy}{dx}\Big|\left(-\sqrt{2}, -1\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

  Para la curva $x^2 - y^2 = 1$

  $$2x - 2y\frac{dy}{dx} = 0 \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \quad \frac{dy}{dx}\Big|\left(\sqrt{2}, 1\right) = \frac{dy}{dx}\Big|\left(-\sqrt{2}, -1\right) = \sqrt{2}$$

- Dada la curva $xy + x^2y^2 = 1$, hallar algunos puntos donde la recta tangente tenga pendiente -1.

Para $y = \arccos(x)$ usar la diferenciación implícita para hallar $\frac{dy}{dx}$

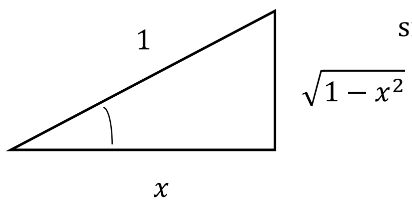
$$\cos(y) = x$$

$$\frac{d}{dx}(\cos y) = \frac{d}{dx}(x)$$

$$-\sin(y)\frac{dy}{dx} = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sin(y)} = -\frac{1}{\sin(\arccos x)}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$



$\sin(y) = \sqrt{1 - x^2}$

Para $y = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4$, hallar $\frac{dy}{dx}$

$$\ln(y) = \ln[(x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4]$$

$$\ln(y) = \ln(x-1) + \ln(x-2)^2 + \ln(x-3)^3 + \ln(x-4)^4$$

$$\ln(y) = \ln(x-1) + 2\ln(x-2) + 3\ln(x-3) + 4\ln(x-4)$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(x-1)}\frac{d}{dx}(x-1) + \frac{2}{(x-2)}\frac{d}{dx}(x-2) + \frac{3}{(x-3)}\frac{d}{dx}(x-3) + \frac{4}{(x-4)}\frac{d}{dx}(x-4)$$

$$\frac{dy}{dx} = y\left[\frac{1}{(x-1)} + \frac{2}{(x-2)} + \frac{3}{(x-3)} + \frac{4}{(x-4)}\right]$$

$$\frac{dy}{dx} = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4\left[\frac{1}{(x-1)} + \frac{2}{(x-2)} + \frac{3}{(x-3)} + \frac{4}{(x-4)}\right]$$

Para $y = \left[{}^{(x+9)}\!/_{(x-9)}\right]^{1/6}$, hallar $\frac{dy}{dx}$

$$\ln(y) = \ln\left[\frac{(x+9)}{(x-9)}\right]^{\frac{1}{6}}$$

$$\ln(y) = \frac{1}{6}[\ln(x+9) - \ln(x-9)]$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{6}y\left[\frac{1}{(x+9)} - \frac{1}{(x-9)}\right]$$

Para $y = \sqrt[5]{\frac{(x+4)(x^2-1)^3}{x^2+x+1}}$, hallar $\frac{dy}{dx}$

$$\ln(y) = \frac{1}{5}[\ln(x+4) + \ln(x^2-1)^3 - \ln(x^2+x+1)]$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{5}\left[\frac{1}{(x+4)} + \frac{6x}{(x^2-1)} - \frac{2x+1}{(x^2+x+1)}\right]$$

Para $y = x^{\ln(x)}$, hallar $\frac{dy}{dx}$

$$\ln(y) = \ln\left(x^{\ln x}\right)$$

$$\ln(y) = \ln(x)\ln(x)$$

$$\ln(y) = \ln(x)^2$$

$$\ln(y) = 2\ln(x)$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 2\frac{d}{dx}\ln(x)$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 2\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = 2y\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = 2x^{\ln x}\left(\frac{1}{x}\right)$$

Para $x^{(x^x)}$, hallar $\frac{dy}{dx}$

$$\ln(y) = \ln\left[x^{(x^x)}\right]$$

$$\ln(y) = x^x \ln(x)$$

$$\ln(y) = \ln[x^x \ln(x)]$$

$$\ln(\ln y) = \ln(x^x) + \ln(x)$$

$$\ln(\ln y) = x \ln(x) + \ln(\ln x)$$

$$1 \frac{d}{dx} \ln(\ln y) = \frac{d}{dx}(x \ln x) + \frac{d}{dx} \ln(\ln x)$$

$$\frac{1}{\ln(y)} \frac{d}{dx} \ln(y) = x \frac{d}{dx} \ln(x) + \ln(x) \frac{d}{dx}(x) + \frac{1}{\ln(x)} \frac{d}{dx} \ln(x)$$

$$\frac{1}{\ln(y)} \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = x\left(\frac{1}{x}\right) + \ln(x) + \frac{1}{\ln(x)}\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\frac{1}{y \ln(y)} \frac{dy}{dx} = 1 + \ln(x) + \frac{1}{x \ln(x)}$$

$$\frac{dy}{dx} = y \ln(y)\left[1 + \ln(x) + \frac{1}{x \ln(x)}\right]$$

$$\frac{dy}{dx} = x^{(x^x)} \ln(y)\left[1 + \ln(x) + \frac{1}{x \ln(x)}\right]$$

Derivadas de orden superior

Son aquellas derivadas que se obtiene al derivar una función $y = f(x)$, al respecto Leithold (1987) “si f' es la derivada de la función f, entonces f' también es una función, y es la primera derivada de f. Algunas veces se le asigna el nombre de primera función derivada” (pp. 277-278) así mismo, la segunda derivada de una función $y = f(x)$ es la derivada de la primera derivada de f. La segunda derivada de $y = f(x)$ se denota de muchas maneras:

$$f''(x), \qquad D^2 f, \qquad Dx^2 f, \qquad \frac{d^2 y}{dx^2}, \qquad \frac{d^2 f}{dx^2}, \quad \frac{d^2}{dx^2}\big(f(x)\big), \qquad y'' \quad o \quad \ddot{y}$$

Ejemplos

1.

Hallar la segunda derivada de $f(x) = 2x^5 - 4x^2 + 7x + 6$

$f'(x) = (2x^5 - 4x^2 + 7x + 6)'$

$f'(x) = 10x^4 - 8x + 7$

$f''(x) = \frac{d}{dx}(10x^4 - 8x + 7) = 40x^3 - 8$

La enésima derivada de una función $y = f(x)$ (donde n es un entero positivo) es la derivada $(n-1)$ –ésima derivada de f. La enésima derivada de f se denota más frecuentemente como $f^{(n)}(x)$.

2.

Hallar la sexta derivada de $\boldsymbol{f(x) = 2x^5 - 4x^2 + 7x + 6}$

$f'(x) = 10x^4 - 8x + 7$

$f''(x) = 40x^3 - 8$

$f^{(3)}(x) = 120x^2$

$f^{(4)}(x) = 240x$

$f^{(5)}(x) = 240$

$f^{(6)}(x) = 0$

3.

Hallar las derivadas de mayor orden de $\boldsymbol{f(x) = \sin(x)}$

$f'(x) = \cos(x)$

$f''(x) = -\sin(x)$

$f^{(3)}(x) = -\cos(x)$

$f^{(4)}(x) = -(-\sin(x))$

$f^{(4)}(x) = \sin(x)$

4.

Hallar la segunda derivada de $\boldsymbol{y = \sec^2(x)}$

$y' = (\sec^2 x)'$

$y' = 2\sec x\,(\sec x)'$

$y' = 2\sec x\,(\sec x \tan x)$

$y' = 2\sec^2(x)\tan(x)$

$y'' = 2(\sec^2 x \tan x)'$

$y'' = 2[\sec^2 x\,(\tan x)' + \tan x\,(\sec^2 x)']$

$y'' = 2[\sec^2 x \sec^2 x + 2\sec^2 x \tan x]$

$y'' = 2\sec^4 x + 4\sec^2 x \tan x$

5.

Hallar la sexta derivada de $f(x) = \ln(1+x)$

$$f'(x) = [\ln(1+x)]'$$
$$f'(x) = \frac{1}{(1+x)}(1+x)'$$
$$f'(x) = \frac{1}{1+x}$$
$$f''(x) = [(1+x)^{-1}]'$$
$$f''(x) = -(1+x)^{-2}(1+x)'$$
$$f''(x) = -(1+x)^{-2}(1)$$
$$f''(x) = -(1+x)^{-2}$$
$$f^{(3)}(x) = -[(1+x)^{-2}]'$$
$$f^{(3)}(x) = -[-2(1+x)^{-3}](1+x)'$$
$$f^{(3)}(x) = 2(1+x)^{-3}(1)$$
$$f^{(3)}(x) = 2(1+x)^{-3}$$
$$f^{(4)}(x) = 2[(1+x)^{-3}]'$$
$$f^{(4)}(x) = 2[-3(1+x)^{-4}](1+x)'$$
$$f^{(4)}(x) = -6(1+x)^{-4}(1)$$
$$f^{(4)}(x) = -6(1+x)^{-4}$$
$$f^{(5)}(x) = -6[(1+x)^{-4}]'$$
$$f^{(5)}(x) = -6[-4(1+x)^{-5}](1+x)'$$
$$f^{(5)}(x) = 24(1+x)^{-5}$$
$$f^{(6)}(x) = 24[(1+x)^{-5}]'$$
$$f^{(6)}(x) = -120(1+x)^{-6}$$

6.

Para $x^{1/2} + y^{1/2} = a^{1/2}$, hallar d^2y/dx^2

$$\frac{d}{dx}\left(x^{\frac{1}{2}}\right) + \frac{d}{dx}\left(y^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{d}{dx}\left(a^{\frac{1}{2}}\right)$$
$$\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}\frac{dy}{dx} = 0$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}}$$
$$\frac{dy}{dx} = -\left(\frac{x}{y}\right)^{-\frac{1}{2}} = -\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\left(x^{\frac{1}{2}}\right)\frac{d}{dx}\left(y^{\frac{1}{2}}\right) - \left(y^{\frac{1}{2}}\right)\frac{d}{dx}\left(x^{\frac{1}{2}}\right)}{\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^2}$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\left(x^{\frac{1}{2}}\right)\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}\frac{dy}{dx} - \left(y^{\frac{1}{2}}\right)\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}}{2x}$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\left(\frac{y}{y}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{2}}\left[-\left(\frac{y}{x}\right)\right]^{\frac{1}{2}}}{x2}$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{2}} + 1}{2x}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{y^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}}}{\frac{2x}{1}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{a^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{3}{2}}}$$

7.

Sobre la curva $x^3 + y^3 = 16$, hallar d^2y/dx^2

$$\frac{d}{dx}(x^3) + \frac{d}{dx}(y^3) = \frac{d}{dx}(16)$$

$$3x^2 + 3y^2\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3x^2}{3y^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x^2}{y^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{y^2\frac{d}{dx}(x^2) - x^2\frac{d}{dx}(y^2)}{(y^2)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2xy^2 - 2x^2y\frac{dy}{dx}}{y^4}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2xy - 2x^2\frac{dy}{dx}}{y^3}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2xy + \frac{2x^4}{y^2}}{y^3}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2xy^3 + 2x^4}{y^5}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -2x(y^3 + x^3)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -2(16)^{y^5}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{32^{y^5}}{y^5}$$

8.

Para $y = \left[\frac{(x-1)}{(2x+1)}\right]^3 (4x+3)$, hallar d^2y/dx^2

$$\ln(y) = \ln\left\{\left[\frac{(x-1)}{(2x+1)}\right]^3 (4x+3)\right\}$$

$$\ln(y) = \ln\left[\frac{(x-1)}{(2x+1)}\right]^3 + \ln(4x+3)$$

$$\ln(y) = 3\ln\left[\frac{(x-1)}{(2x+1)}\right] + \ln(4x+3)$$

$$\ln(y) = 3\ln(x-1) - 3\ln(2x+1) + \ln(4x+3)$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{3}{x-1} - \frac{6}{2x+1} + \frac{4}{4x+3}$$

$$\frac{dy}{dx} = y\left[\frac{3}{x-1} - \frac{6}{2x+1} + \frac{4}{4x+3}\right]$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y\frac{d}{dx}\left[\frac{3}{x-1} - \frac{6}{2x+1} + \frac{4}{4x+3}\right] + \left[\frac{3}{x-1} - \frac{6}{2x+1} + \frac{4}{4x+3}\right]\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y\left[-\frac{3}{(x-1)^2} + \frac{12}{(2x+1)^2} - \frac{16}{(4x+3)^2}\right] + y\left[\frac{3}{x-1} - \frac{6}{2x+1} + \frac{4}{4x+3}\right]^2$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y\left[-\frac{3}{(x-1)^2} + \frac{12}{(2x+1)^2} - \frac{16}{(4x+3)^2} + \left(\frac{3}{x-1} - \frac{6}{2x+1} + \frac{4}{4x+3}\right)^2\right]$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left[\frac{(x-1)}{(2x+1)}\right]^3(4x+3)\left[-\frac{3}{(x-1)^2} + \frac{12}{(2x+1)^2} - \frac{16}{(4x+3)^2}\right.$$
$$\left. + \left(\frac{3}{x-1} - \frac{6}{2x+1} + \frac{4}{4x+3}\right)^2\right]$$

Ejercicios propuestos

a. Sea la función $f: x \to |x-1| + |x|$ definido en $\mathbb{R}$. Estudiar las derivadas de f a derecha y a izquierda en el punto $x = 0$ y $x = 1$

b. Sea f la función real definida por $f(x) = \sqrt{2-x} + \sqrt{x+1}$. Estudiar si f esno derivable en $x = -1$ y en $x = 2$

c. Diferenciar $y = \log_3(x^2 + 2x + 3)$

d. Diferenciar $f(x) = \ln(\log_{10} x)$

e. Diferenciar $f(x) = \sqrt{\frac{(x^2+1)}{(x-5)}}$

f. Diferenciar $f(x) = \sec\left(\pi\sqrt{x^2-1}\right)$

g. Diferenciar $f(x) = \cos(\ln 2x)\sin(\ln x)$

h. Diferenciar $(f\ o\ g\ o\ h\ o\ k)(x)$

i. Diferenciar$f(x) = \cot(ax^2 + bx + c)$

j. Diferenciar $f(x) = \ln|(x-1)(x-2)|$

k. Diferenciar $g(x) = f\{f[f(x)]\}$

l. Diferenciar $y = \left(\frac{a+bx^n}{a-bx^n}\right)^m$

Capítulo 4

Otros métodos para calcular límites

Capítulo
4

Otros métodos para calcular límites

Comparación de funciones y cálculo de límites por equivalentes

Definición 18

Sánchez & Valdés (1982) indica que si $f(x) = \varepsilon(x)g(x)$, donde $\lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$, se dice que f es infinitesimal respecto a la función g en a o cuando $x \to a$ y se escribe $f = \mathrm{o}(g)$ (se lee f es o pequeña de g).

Nota: la condición $\lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$ es quivalente si $g(x) \neq 0$ para $x \neq a$ a $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Ejemplos

1. $x^2 = \sigma(x)$ para $x \to 0$, pues $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x} = 0$
2. $x = \sigma(x^2)$ para $x \to \infty$, pues $\lim_{x\to \infty} \frac{x}{x^2} = 0$
3. $x^n = \sigma(x^m)$ cuando $x \to 0$ para todo n, m naturales tales que $n > m$
4. $x^n = \sigma(x^m)$ cuando $x \to \infty$ para todo n, m naturales tales que $n < m$

Definición 19

Sánchez & Valdés (1982) Si $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \mathrm{L} \neq 0$, se dice que f y g son funciones del mismo orden cuando $x \to a$.

Ejemplos

$f(x) = \frac{3x^2}{1+x^3}$ **es del mismo orden que la función** $g(x) = x^2$ **cuando** $x \to 0$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\frac{3x^2}{1+x^3}}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{3x^2}{x^2(1+x^3)} = \lim_{x \to 0} \frac{3}{1+x^3} = \frac{3}{1+0} = 3$$

$f(x) = 2x^2 + x + \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ **es del mismo orden que la función** $g(x) = x^2$ **cuando** $x \to \infty$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x^2 + x + \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2} = \lim_{x \to \infty} \frac{2 + \frac{1}{x} + \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x}}{1} = 2$$

Más interesante y de gran utilidad y aplicación resuelta la equivalencia de funciones.

Definición 20

Sánchez & Valdés (1982) señala que las funciones $f(x)$ y $g(x)$ son equivalentes cuando $x \to a$ y se escribe $f(x) \sim g(x)$ $(x \to a)$ si ambas están definidas y no se anulan en una vecindad de a y se cumple:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

Ejemplos

$\frac{x^2}{1+x^3} \sim x^2$ cuando $x \to 0$, pues $\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{(1+x^3)x^2} = 1$

$x^2 + x\sin(x) \sim \frac{x^4+2x}{x^2+3}$ cuando $x \to \infty$, pues $\lim_{x \to \infty} \frac{(x^2 + x\sin(x))(x^2+3)}{x^4+2x} = 1$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x(x + \sin x)(x^2+3)}{x(x^3+2)} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3 + 3x + x^2 \sin x + 3\sin x}{x^3+2}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{1 + \frac{3}{x^2} + \frac{\sin x}{x} + \frac{3\sin x}{x^3}}{1 + \frac{2}{x^3}} = 1$$

Observaciones

1. Si $f \sim f$, cuando $x \to a$ (propiedad reflexiva).
2. Si $f \sim g$, cuando $x \to a$, entonces $g \sim f$ cuando $x \to a$ (propiedad simétrica).
3. Si $f \sim g$, cuando $x \to a$ y $g \sim h$ cuando $x \to a$, entonces $f \sim h$ cuando $x \to a$ (propiedad transitiva).

Teorema

Para que las funciones $f(x)$ y $g(x)$ definidas en cierta vecindad del punto a sean equivalentes es necesario y suficiente que se cumpla que $f(x) = g(x) + og(x)$ cuando $x \to a$ siendo $g(x) \neq 0$ para $x \neq a$.

En este caso se dice que la función $g(x)$ es la parte principal de la función $f(x)$ cuando $x \to a$.

Teorema

Si en una vecindad de a están definidas las funciones $f(x), g(x), \alpha(x)$ y se cumple que $f \sim g$ para $x \to a$, entonces se cumple:

$$\lim_{x \to a}[f(x)g(x)] = \lim_{x \to a}[g(x)\alpha(x)]$$

La igualdad se da a partir de la existencia de uno de los límites.

Para aplicar equivalencias en el cálculo de límites, es necesario conocer la mayor cantidad posible de pares de funciones equivalentes, veamos que:

1. $\sin(x) \sim x$ para $x \to 0$
2. $\tan(x) \sim x$ para $x \to 0$
3. $(1 - \cos(x)) \sim \frac{x^2}{2}$ para $x \to 0$
4. $\ln(1 + x) \sim x$ para $x \to 0$
5. $(e^x - 1) \sim x$ para $x \to 0$
6. $\arcsin(x) \sim x$ para $x \to 0$
7. $\arctan(x) \sim x$ para $x \to 0$
8. $[(1 + x)^\alpha - 1] \sim \alpha x$
9. $(b^x - 1) \sim x \ln(b)$
10. $\log_b(1 + x) \sim x \log_b e$

Teniendo en cuenta los ejemplos anteriores se obtiene la cadena de infinitésimos equivalentes cuando $x \to 0$;

$$x \sim \sin(x) \sim \tan(x) \sim \arcsin(x) \sim \arctan(x) \sim \ln(1 + x) \sim e^x - 1 \text{ para } x \to 0$$

Ejemplos

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{\sin^2(3x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{9x^2}=\frac{1}{9}$$

$$\ln(1+x^2)\sim x^2$$
$$\sin^2(3x)=(\sin 3x)^2\sim(3x)^2=9x^2$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\tan^2 x)}{e^{\sin^2 x}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2}=1$$

$$\ln(1+\tan^2 x)\sim\tan^2 x\sim(x)^2$$
$$\left(e^{\sin^2 x}-1\right)\sim\sin^2 x\sim(x)^2$$

Nota. La sustitución de funciones por sus equivalentes sólo puede ser aplicado a productos de funciones, por lo que se hace necesario transformar primeramente en productos las expresiones que contienen sumas.

Ejemplos

1.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(x)-\sin(x)}{x^3}\neq\lim_{x\to 0}\frac{x-x}{x^3}=0 \qquad \begin{array}{l}\tan(x)\sim x\\ \sin(x)\sim x\end{array}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin(x)}{\cos(x)}-\sin(x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin(x)-\sin(x)\cos(x)}{\cos(x)}}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)-\sin(x)\cos(x)}{x^3\cos(x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)\,[1-\cos(x)]}{x^3\cos(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos(x)}\cdot\frac{\sin(x)}{x}\cdot\frac{(1-\cos(x))}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos(x)}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos(x))}{x^2}$$

$$=(1)(1)\frac{\frac{x^2}{2}}{x^2}=\frac{x^2}{2x^2}=\frac{1}{2}$$

2.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(3\cos x-2)}{e^{\sin^2 3x}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{3x^2}{2}}{9x^2}$$

$$=-\frac{1}{6}$$

$$\ln(3\cos x-2)=\ln[1+(3\cos x-3)]\sim-\frac{3x^2}{2}$$
$$e^{\sin^2 3x}-1\sim\sin^2 3x\sim(3x)^2=9x^2$$

$$\lim_{x\to 1}(1+\ln x)^{\frac{1}{x-1}}=\lim_{x\to 1}\left[(1+\ln x)^{\frac{1}{\ln x}}\right]^{\frac{\ln x}{x-1}} \qquad \ln x=\ln[1+(x-1)]\sim x-1$$

$$= \left\{\lim_{x\to 1}(1+\ln x)^{\ln x}\right\}^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}} = e^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}} = e^1 = e$$

Regla de L'Hôpital

Forma indeterminada $\frac{0}{0}$

Con la regla de L'Hôpital podemos encontrar muchos límites donde la sustitución directa termina en forma determinada, es entonces que se puede trabajar con esta regla; al respecto Stewart (2012, p. 302) “suponga que f y g son derivables y $g'(x) \neq 0$ sobre un intervalo abierto I que contine a (excepto posiblemente en a). Suponga que”

Un límite de la forma $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}, donde\ \lim\limits_{x\to a} f(x) = 0\ y\ \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, tiene la forma indeterminada de $\frac{0}{0}$ en $x = a$, Entonces:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Esta regla es verdadera siempre que el límite de la derecha exista o sea ∞ ó $-\infty$. Esto es válido para uno de los límites laterales o para ambos, si a es un número real o si $a = \infty$ o $a = -\infty$.

Ejemplo

1.

Hallar el $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2-3x}{2x^2+x}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-3x}{2x^2+x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{d}{dx}(x^2-3x)}{\frac{d}{dx}(2x^2+x)} = \lim_{x\to 0}\frac{2x+3}{4x+1} = -\frac{3}{1} = -3$$

Nota. La primera igualdad es válida únicamente debido a que el segundo límite existe. Si el segundo límite no existiera, habría que probar otra técnica.

2.

Obtener el $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3+x-2}{x^2-1}$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3+x-2}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{d}{dx}(x^3+x-2)}{\frac{d}{dx}(x^2-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{3x^2+1}{2x}=\frac{3(1)^2+1}{2(1)}=2$$

3.

Hallar el $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\left[\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^3\right]}$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\left[\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^3\right]}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\sin x}{3\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2(1)}=-\frac{1}{0}=-\infty$$

4.

Hallar el $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x^2+x}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x^2+x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{2x+1}=\frac{1}{1}=1$$

5.

Hallar el $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^x}{e^{2x}}$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{e^{2x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{2e^{2x}}\to no\ se\ levanta\ la\ indeterminación$$

6.

Hallar el $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x}$

$$\lim_{x\to-\infty}e^{-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{e^x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{e^{-\infty}}=\frac{1}{0}=\infty$$

Nota. La regla de L'Hôpital se puede aplicar más de una vez para encontrar el límite de una forma indeterminada.

Hallar el $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^2}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{2} = 0$$

Forma indeterminada $\frac{\infty}{\infty}$

Un límite de la forma $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$, donde $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty \wedge \lim\limits_{x\to a} g(x) = \pm\infty$, tiene la forma indeterminada $\frac{\infty}{\infty}$ en $x = a$. En esos casos también se aplica la regla de L'Hôpital.

Ejemplos

1.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\boldsymbol{x+1}}{\boldsymbol{3x-4}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{d}{dx}(x+1)}{\frac{d}{dx}(3x-4)} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

2.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\boldsymbol{\ln x}}{\frac{\boldsymbol{1}}{\sqrt{\boldsymbol{x}}}} = \frac{-\infty}{+\infty} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{d}{dx}(\ln x)}{\frac{d}{dx}\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}} = \lim_{x\to 0^+} -2x^{\frac{1}{2}} = 0$$

3.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\boldsymbol{x^2}}{\boldsymbol{e^x}} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{d}{dx}(x^2)}{\frac{d}{dx}(e^x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{2x}{e^x} = \frac{\infty}{\infty}$$

4.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\boldsymbol{2x}}{\boldsymbol{e^x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{d}{dx}(2x)}{\frac{d}{dx}(e^x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{e^x}=\frac{2}{\infty}=\emptyset$$

Formas indeterminadas $\infty-\infty\ \wedge\ \mathbf{0}(\infty)$

Un límite de la forma $\lim\limits_{x\to a}[f(x)-g(x)]$ donde $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty\ \wedge\ \lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$ tiene la forma $\infty-\infty$. Para hallar dicho límite se debe tratar de combinar $f(x)\ \wedge\ g(x)$. Se deberá escribir $f(x)-g(x)$ en tal forma que pueda aplicarse la regla de L'Hôpital.

$$\lim_{x\to-1}\left[\frac{2}{1-x^2}-\frac{1}{1+x}\right]=(\infty-\infty)$$

$$\lim_{x\to-1}\left[\frac{2}{1-x^2}-\frac{1}{1+x}\right]=\lim_{x\to-1}\left[\frac{2-(1-x)}{(1-x)(1+x)}\right]=\lim_{x\to-1}\left[\frac{(1+x)}{(1-x^2)}\right]=\lim_{x\to-1}\frac{1}{-2x}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)=(\infty-\infty)$$

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x-x}{x\sin x}\right)=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{\cos x-1}{x\cos x+\sin x}\right)=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{-\sin x}{x(-\sin x)+\cos x+\cos x}\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{-\sin x}{2\cos x-x\sin x}\right)=\frac{0}{2-0}=0$$

Un límite de la forma $\lim\limits_{x-a}[f(x)g(x)]$ donde $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0\ \wedge\ \lim\limits_{x\to a}g(x)=\pm\infty$ tiene la forma indeterminada $0(\infty)$. Generalmente se puede encontrar este límite escribiéndolo nuevamente en una de las dos formas:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}\quad \text{ó}\quad \lim_{x\to a}\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

Estas son las formas indeterminadas $\frac{\infty}{\infty}$ $y\frac{\theta}{\theta}$ respectivamente, de modo que se puede usar la regla de L'Hôpital.

Ejemplo

Hallar el límite de $\lim_{x-0^+} x\ln x = 0(\infty)$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \frac{-\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-x^{-2}} = \lim_{x-0^+} -x = 0$$

Hallar el límite de $\boldsymbol{\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\pi - 2x)(\sec c) = 0(\infty)}$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sec x}{\frac{1}{\pi - 2x}} = \frac{\infty}{\frac{1}{0}} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{\cos x}}{\frac{1}{\pi - 2x}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\pi - 2x}{\cos x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{2}{\sin x} = \frac{2}{1} = 2$$

Formas indeterminadas $\boldsymbol{0^0, \infty^0\ y\ 1^\infty}$

Un límite de la forma $\lim_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}$ donde $\lim_{x\to a} f(x) = 0 \wedge \lim_{x\to a} g(x) = 0$ tiene la forma indeterminada 0^0. El mecanismo para hallar dicho límite es hacer $y = f(x)^{g(x)}$ y calcular $\lim_{x\to a} \ln y$. Esto dará la forma indeterminada $0 \cdot \infty$.

Ejemplo

Hallar $\boldsymbol{\lim_{x\to 0^+} x^x}$ sea $y = x^x$

$$\ln y = x\ln x$$

$$\lim_{x\to 0^+} \ln y = \lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} \ln y = 0$$

$$y = e^{\ln y}, si \ln y \to 0\, , entonces\; y \to e^0, y \to 1$$

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = 1$$

Forma indeterminada ∞^0

$\lim_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}$ donde $\lim_{x\to a} f(x) = \infty \wedge \lim_{x\to a} g(x) = 0$, tiene una forma indeterminada ∞^0

Ejemplo

Hallar $\lim_{x\to\infty}(e^{2x}+3)^{\frac{1}{x}}$

$$y = (e^{2x}+3)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \ln(e^{2x}+3)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\ln(e^{2x}+3) = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(e^{2x}+3)}{x}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2e^{2x}}{e^{2x}+3}}{1}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2e^{2x}}{e^{2x}+3} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{4e^{2x}}{2e^{2x}} = 2 = e^2$$

Nota. Este tipo de límites pueden hallarse usando la misma técnica descrita en el caso anterior (0^0); es decir, encontrar $\lim_{x\to a} \ln f(x)^{g(x)}$ y elevar e a dicha potencia.

Forma Indeterminada 1^∞

Un límite de la forma $\lim_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}$ donde $\lim_{x\to a} f(x) = 1 \wedge \lim_{x\to a} g(x) = \infty$, tiene la forma indeterminada 1^∞

Ejemplo

1. **Hallar** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}$

$$y=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}$$

$$\lim_{x\to\infty}\ln y=\lim_{x\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}=\lim_{x\to\infty}x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\infty\cdot 0=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x^2}}=\frac{0}{0}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{-x^{-2}}{1+\frac{1}{x}}}{-2x^{-3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{x+1}{x}}}{-\frac{2}{x^3}}=\frac{x^2}{2(x+1)}=\frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{2}=\lim_{x\to\infty}x=e^{\infty}$$

2. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{(x-3)}{e^x-e^3}=\frac{0}{0}\to\lim\limits_{x\to 3}\frac{1}{e^x}=\frac{1}{e^3}=e^{-3}$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\tan x-x)}{\sin x}=\frac{0}{0}\to\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sec^2 x-1}{\cos x}=\frac{0}{1}=0$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)}{\sin\left(\frac{2}{x}\right)}=\frac{0}{0}\to\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(e^{-x}-1)}{\sin(2x^{-1})}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^{x-1}(-x^{-2})}{\cos(2x^{-1})(-2x^{-2})}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{2\cos\left(\frac{2}{x}\right)}=\frac{e^0}{2\cos 0}=\frac{1}{2}$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{[\ln(1+x^2)]}{(\cos x-1)}=\frac{0}{0}\to\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{2x}{1+x^2}}{-\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{-\sin x(1+x^2)}=\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2}{-\sin x\,(2x)+(1+x^2)(-\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{-2x\sin x-\cos x\,(1+x^2)}=\frac{2}{0-1}$$
$$=-2$$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-e^x-x}{\sin^2 x}\to\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{d}{dx}(x-e^x-x)}{\frac{d}{dx}(\sin^2 x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{d}{dx}x(e^x-1)}{\frac{d}{dx}(\sin^2 x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x(e^x)+(e^x-1)(1)}{2\sin x\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{xe^x+e^x-1}{2\sin x\cos x}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x(1+x+1)}{2(\cos^2 x-\sin^2 x)}=\frac{1(2)}{2(1-0)}=1$$

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^2}=\frac{\infty}{\infty}\quad\to\quad\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{2x^2}=\frac{1}{\infty}=0$

8. $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{\ln x}=\frac{e^{\infty}}{\ln 0}=\frac{\infty}{-\infty}\quad\to\quad\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{e^{x^{-1}}(-x^{-2})}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}-\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}-\frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}=$

$-\infty(\infty)=-\infty$

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x}{x-2^x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\left(\frac{3}{2}\right)^x=0\cdot\infty$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^x}{x}=\frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)^x(1)}{1}=\ln\left(\frac{3}{2}\right)\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^x=\ln\left(\frac{3}{2}\right)\cdot\infty=\infty$$

10. $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{1-\cos x}\right)=\infty-\infty$

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1-\cos x-x}{x(1-\cos x)}\right)=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{d}{dx}(1-\cos x-x)}{\frac{d}{dx}[x(1-\cos x)]}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-(-\sin x)-1}{x(\sin x)+(1-\cos x)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x-1}{x\sin x+1-\cos x}$$

$$=-\frac{1}{0+1-1}=-\frac{1}{0}=-\infty$$

11. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\tan x-\sec x)\to\infty-\infty$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin x}{\cos x}-\frac{1}{\cos x}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin x-1}{\cos x}\right)=\frac{1-1}{0}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{d}{dx}(\sin x-1)}{\frac{d}{dx}(\cos x)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{-\sin x}=\frac{0}{-1}=0$$

12. $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x^2-1}\right)\to\infty-\infty$

$$\lim_{x\to 1^+}\left[\frac{x^2-1-\ln x}{\ln x\,(x^2-1)}\right]=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{d}{dx}(x^2-1-\ln x)}{\frac{d}{dx}[\ln x\,(x^2-1)]}=\lim_{x\to 1^+}\frac{2x-\frac{1}{x}}{\ln x\,(2x)+(x^2-1)\left(\frac{1}{x}\right)}=\frac{2-1}{0+0}=\frac{1}{0}=\infty$$

13. $\lim\limits_{x\to 0^+} xe^{\frac{1}{x}}\to 0\cdot e^{\frac{1}{0}}\to 0\cdot\infty$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}}=\frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{d}{dx}\left(e^{\frac{1}{x}}\right)}{\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\frac{1}{x}}(-x^{-2})}{-x^{-2}}=\lim_{x\to 0^+}e^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{1}{0}}=\infty$$

14. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[1+\frac{1}{x}\right]^{3x}=\left(1+\frac{1}{\infty}\right)^{3\infty}=(1+0)^{\infty}=1^{\infty}$

$$y=\left[1+\frac{1}{x}\right]^{3x}$$

$$\lim_{x\to\infty}\ln y=\lim_{x\to\infty}\ln\left[1+\frac{1}{x}\right]^{3x}=\lim_{x\to\infty}3x\ln\left[1+\frac{1}{x}\right]=\infty\cdot\ln(1)=\infty\cdot 0$$

$$3\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}=\frac{\ln(1)}{0}=\frac{0}{0}$$

$$3\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{d}{dx}\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]}{\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right)}=3\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\frac{1}{x^2}}{\left(1+\frac{1}{x}\right)}}{\frac{1}{x^2}}=3\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x}}=3\left(\frac{1}{1+0}\right)=3=e^3$$

15. $\lim_{x\to0^+}(x+1)^{\csc x}\to(0+1)^{\frac{1}{\sin 0}}=1^\infty$

$$y=(x+1)^{\csc x}$$

$$\lim_{x\to0^+}\ln y=\lim_{x\to0^+}\ln(x+1)^{\csc x}=\lim_{x\to0^+}\csc x\ln(x+1)=\infty\cdot 0$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(x+1)}{\sin x}=\frac{\ln(1)}{\sin 0}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{d}{dx}[\ln(x+1)]}{\frac{d}{dx}(\sin x)}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{(x+1)}(1)}{\cos x}=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{(x+1)\cos x}=\frac{1}{(1)(1)}=1=e^1=e$$

16. $\lim_{x\to\infty}(e^x+e^{2x})^{\frac{1}{x}}\to(e^\infty+e^\infty)^{\frac{1}{\infty}}=\infty^0$

$$y=(e^x+e^{2x})^{\frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x\to\infty}\ln y=\lim_{x\to\infty}\ln(e^x+e^{2x})^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\ln(e^x+e^{2x})=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(e^x+e^{2x})}{x}=\frac{\ln\infty}{\infty}=\frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{d}{dx}[\ln(e^x+e^{2x})]}{\frac{d}{dx}(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^x+e^{2x}}\frac{d}{dx}(e^x+e^{2x})=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x+2e^{2x}}{e^x+e^{2x}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x(1+2e^x)}{e^x(1+e^x)}=\frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{d}{dx}(1+2e^x)}{\frac{d}{dx}(1+e^x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{2e^x}{e^x}=2=e^2$$

17. $\lim_{x\to0^+}x^{\sin x}=0^{\sin 0}=0^0$

$$y=x^{\sin x}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \ln y = \lim_{x\to 0^+} \ln x^{\sin x} = \lim_{x\to 0^+} \sin x \ln x = 0 \cdot \infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}} = \frac{-\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{d}{dx}(\ln x)}{\frac{d}{dx}(\csc x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\csc x \cot x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{-x \csc x \cot x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{-x\left(\frac{1}{\sin x}\cdot\frac{\cos x}{\sin x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} -\frac{1}{\frac{x\cos x}{\sin^2 x}} = \lim_{x\to 0^+} -\frac{\sin^2 x}{x\cos x} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{d}{dx}(-\sin^2 x)}{\frac{d}{dx}(x\cos x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-2\sin x\cos x}{x(-\sin x)+\cos x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-2\sin x\cos x}{-x\sin x+\cos x} = \frac{0}{0+1} = 0 = e^0$$

$$= 1$$

Polinomios de Taylor y series de potencia

El polinomio de Taylor de grado n en un entorno de $x = a$ para la función f es:

$$Pn(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f^n(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Se puede demostrar que $Pn(x)$ es el polinomio de grado n que se aproxima mejor a $f(x)$ en la cercanía de $x = a$. Si $a = 0$, el polinomio es el polinomio de Mc Laurin de grado n para f.

$$Pn(x) = f(0) + f'(0)(x) + \frac{f^n(0)}{2!}(x)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x)^n$$

Ejemplos

1) Hallar el polinomio de Taylor de grado 3 para $f(x)=\sqrt{x}$ en un entorno de $a=4$

   Datos:

   $a=4$

   $f(x)=\sqrt{x}$

   $n=3$

$$f(4)=\sqrt{4}=2$$

$$f'(4)=\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{4}}=\frac{1}{4}$$

$$f''(4)=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{3}{2}}=-\frac{1}{4\sqrt{4^3}}=-\frac{1}{32}$$

$$f'''(4)=-\frac{1}{4}\left(-\frac{3}{2}\right)x^{-\frac{5}{2}}=\frac{3}{8\sqrt{4^5}}=\frac{3}{256}$$

$$Pn(x)=2+\frac{1}{4}(x-4)-\frac{1}{32}\frac{(x-4)^2}{2}+\frac{3}{256}\frac{(x-4)^3}{6}$$

$$Pn(x)=2+\frac{(x-4)}{4}-\frac{(x-4)^2}{64}+\frac{(x-4)^3}{512}$$

Desarrollos de funciones en series de potencia

Desarrollo de Taylor y Mc Laurin

Se la puede definir como una aproximación de funciones mediante una serie de potencias o suma de potencias enteras, al respecto Farrand & Jim Poxon (1988) "un desarrollo en serie de potencias de una función $f(x)$ en un entorno de $x=a$ es una serie de potencias en $x-a$ que coincide con $f(x)$ dentro del radio de convergencia de la serie de potencias" (p. 499). Entonces:

$$Pn(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\cdots$$

Ejemplos

1) Hallar la serie de Mc Laurin para $f(x) = e^x$

$f(0) = e^0 = 1$

$f'(0) = e^x = e^0 = 1$

$f''(0) = e^x = e^0 = 1$

$f'''(0) = e^x = e^0 = 1$

$$f(x) = 1 + 1(x) + \frac{1}{2!}(x)^2 + \frac{1}{3!}(x)^3 + \cdots$$

$$f(x) = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3$$

2) Hallar la serie de Mc Laurin para $f(x) = \sin(x)$ grado 7

$f(0) = 0$

$f'(0) = \cos(x) = 1$

$f''(0) = -\sin(x) = 0$

$f'''(0) = -\cos(x) = -1$

$f^{(4)}(0) = \sin(x) = 0$

$f^{(5)}(0) = \cos(x) = 1$

$f^{(6)}(0) = -\sin(x) = 0$

$f^{(7)}(0) = -\cos(x) = -1$

$$f(x) = 0 + 1(x) + \frac{0}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{0}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \frac{0}{6!}x^6 - \frac{1}{7!}x^7$$

$$f(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7$$

3) Hallar la serie de Mc Laurin $f(x) = \cos(x)$ grado 6

$f(0) = \cos(0) = 1$

$f'(0) = -\sin(x) = 0$

$f''(0) = -\cos(x) = -1$

$f'''(0) = \sin(x) = 0$

$f^{(4)}(0) = \cos(x) = 1$

$f^{(5)}(0) = -\sin(x) = 0$

$$f^{(6)}(0) = -\cos(x) = -1$$

$$f(x) = \cos(x) = 1 + 0(x) - \frac{0}{2!}x^2 + \frac{0}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{0}{5!}x^5 - \frac{1}{6!}x^6$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6$$

4) Hallar una serie de Mc Laurin para $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}$$

$$\frac{\sin(x)}{x} = \frac{x}{x} - \frac{1}{3!}\frac{x^3}{x} + \frac{1}{5!}\frac{x^5}{x} - \frac{1}{7!}\frac{x^7}{x}$$

$$\frac{\sin(x)}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!}$$

5) Hallar el polinomio de Taylor de grado 3 en un entorno de $a = \frac{\pi}{3}$ para $f(x) = \cos(x)$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$f''\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$f'''\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{2}\frac{\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2}{2!} + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3}{3!}$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{4}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{12}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3$$

6) Hallar el polinomio de Mc Laurin de grado 3 para $f(x) = \arcsin(x)$

$$f(0) = 0$$

$$f'(0) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{1}{1} = 1$$

$$f''(0) = \frac{-\frac{1}{2}(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x)}{\left(\sqrt{1 - x^2}\right)^2} = -\frac{x}{(1 - x^2)^{\frac{3}{2}}} = 0$$

$$f'''(0) = \frac{3 \cdot x^2\sqrt{1-x^2} - \sqrt{(1-x^2)^3}}{(1-x^2)^3} = -\frac{1}{1^3} = -1$$

$$f(x) = \arcsin(x) = 0 + \frac{1}{x} + \frac{0}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}x^3$$

$$\arcsin(x) = x - \frac{1}{3!}x^3$$

7) Hallar el polinomio de Taylor de grado 4 en un entorno de $a = \frac{\pi}{4}$ para $f(x) = -\ln(\cos x)$

$$f(0) = -\ln(\cos x) = -\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{-\sin(x)}{-\cos(x)} = \tan(x) = 1$$

$$f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\sec^2(x) = \left(\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\right)^2 = \left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^2 = 2$$

$$f'''\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\sec(x)\,(\sec x \tan x) = 2\sec^2(x)\tan(x) = 2(2)(1) = 4$$

$$f^{(4)}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2[\sec^2 x\,(\sec^2 x) + \tan(x)\,(2\sec x\,(\sec x \tan x)]$$

$$= 2[\sec^4 x + 2\sec^2 x + \tan^2 x] = 16$$

$$P_4(x) = -\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 1\left(x-\frac{\pi}{4}\right) + \frac{2}{2!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{4}{3!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3 + \frac{16}{4!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^4$$

$$P_4(x) = -\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 1\left(x-\frac{\pi}{4}\right) + \left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{2}{3}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3 + \frac{2}{3}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^4$$

8) Hallar una serie de Mc Laurin para $f(x) = \cosh(x)$

$$\cosh(x) = \frac{(e^x + e^{-x})}{2}$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

$$e^{-x} = 1 + (-x) + \frac{(-x)^2}{2!} + \frac{(-x)^3}{3!} + \frac{(-x)^4}{4!} + \cdots$$

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}$$

$$e^x + e^{-x} = 2 + \frac{2x^2}{2!} + \frac{2x^4}{4!}$$

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{2}{2} + \frac{2}{2}\frac{x^2}{2!} + \frac{2}{2}\frac{x^4}{4!}$$

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$$

Fórmula de Taylor

Si la función $y = f(x) \vee (x_0)$, siendo f, n veces derivable en x_0, entonces para toda x en una variedad de x_0, se cumple que:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \quad (x - x_0)^l + \theta[(x - x_0)^n]$$

Esta expresión se conoce como fórmula de Taylor con resta en la forma de Peano. El polinomio de Taylor de grado n de f en potencia de $(x - x_0)$

Observaciones

Al respecto, Sánchez & Valdés (1982) subrayan:

1. El Teorema permite sustituir cualquier función que satisfaga sus condiciones por un polinomio, la magnitud del error está dada por el término residual o resto.
2. El resto es un infinitésimo cuando x tiende a x_0 de orden más alto que todos los términos del polinomio de Taylor.
3. El en caso $x_0 = 0$, se obtiene un caso particular de la fórmula de Taylor conocido como fórmula de Mc Laurin:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)x^k}{k!} + \theta(x)^n$$

4. Al desarrollo de f por la fórmula de Taylor también se llama “desarrollar f en potencias de $(x - x_0)$”.
5. El polinomio de Taylor es el polinomio de grado n de mejor aproximación de f en la vecindad de x_0, es decir, cualquier otro polinomio del mismo grado aproxima peor a la función.

Esto quiere decir, que el único polinomio que logra que: $f(x) - Pn(x) = \theta[(x - x_0)^n]$

Ejemplos

1. $\boldsymbol{f(x) = \tan(x)\,,x_0 = 0, n = 5}$

$$f(0) = \tan(0) = 0$$

$$f'(0) = \sec^2(x) = \sec^2(0) = 1$$

$$f''(0) = 2\sec x\,(\sec x \tan x) = 2\sec^2(x)\tan(x) = 0$$

$$f'''(0) = 2\sec^2 x\,(\sec^2 x) + \tan(x)\,(4\sec x)(\sec x \tan x)$$
$$= 2\sec^4(x) + 4\sec^2(x)\tan^2(x) = 2$$

$$f^{(4)}(0) = 8\sec^3 x\,(\sec x \tan x) + 4\sec^2 x\,(2\tan x)(\sec^2 x)$$
$$+ \tan^2 x\,(8\sec x)(\sec x \tan x)$$

$$f^{(4)}(0) = 8\sec^4(x)\tan(x) + 8\sec^4(x)\tan(x) + 8\sec^2(x)\tan^3(x)$$

$$f^{(4)}(0) = 16\sec^4(x)\tan(x) + 8\sec^2(x)\tan^3(x)$$

$$f^{(4)}(0) = 16(1)(0) + 8(1)(0) = 0$$

$$f^{(5)}(0) = 16\sec^4 x\,(\sec^2 x) + \tan x\,(64\sec^3 x)(\sec x \tan x)$$
$$+ 8\sec^2 x\,(3\tan^2 x)(\sec^2 x)$$

$$f^{(5)}(0) = 16\sec^6(x) + 64\sec^4(x)\tan^2(x) + 24\sec^4(x)\tan^2(x)$$

$$f^{(5)}(0) = 16\sec^6(x) + 88\sec^4(x)\tan^2(x)$$

$$f^{(5)}(0) = 16(1) + 88(1)(0) = 16$$

$$f(x) = 0 + 1(x) + \frac{0x^2}{2!} + \frac{2x^3}{3!} + \frac{0x^4}{4!} + \frac{16x^5}{5!}$$

$$f(x) = x + \frac{2x^3}{3!} + \frac{16x^5}{5!}$$

$$f(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \theta(x^5)$$

2. **Desarrollar la serie de Taylor para $f(x) = e^{\tan(x)}$, hasta los términos de tercer orden con $x_0 = 0$**

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \theta(x^3)$$

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \theta(x^3)$$

$$f(x) = 1 + \left[x + \frac{x^3}{3} + \theta(x^3)\right] + \frac{\left[x + \frac{x^3}{3} + \theta(x^3)\right]^2}{2!} + \frac{\left[x + \frac{x^3}{3} + \theta(x^3)\right]^3}{3!}$$
$$+ \theta\left[x + \frac{x^3}{3} + \theta(x^3)\right]$$

Propiedades de o pequeña

Sánchez & Valdés (1982) refieren

1. $x^n \cdot o(x^m) = o(x^{n+m})$
2. $o(x^n)o(x^m) = o[x^{n+m}]$
3. $[o(x)]^n = o(x^n)$
4. $co(x^n) = o(x^n)$
5. $o(x^3) + o(x^5) = o(x^3)$
6. $cx^n = o(x^{n-x})$

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + ac$$

$$(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3ab^2 + 3ac^2 + 3b^2c + 3bc^2 + 6abc$$

$$\left(x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)^2 = x^2 + \frac{x^6}{9} + o(x^6) + \frac{2}{3}x^4 + 2xo(x^3) + \frac{2}{3}x^3o(x^3)$$

$$\left(x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)^2 = x^2 + \frac{x^6}{9} + o(x^6) + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4) + o(x^6)$$

$$\left(x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)^2 = x^2 + \frac{x^6}{9} + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4)$$

$$\left(x+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)^2=\frac{x^2+o(x^4)}{2!}$$

$$\left(x+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)^2=x^2+o(x^4)$$

$$\left(x+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)^3$$
$$=x^3+\frac{x^9}{27}+o(x^9)+x^5+3x^2\big(o(x^3)\big)+x^7+3xo(x^3)+\frac{x^6o(x^3)}{3}$$
$$+x^3o(x^6)+2x^4o(x^3)$$

$$\left(x+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)^3$$
$$=x^3+\frac{x^9}{27}+x^3o(x^6)+o(x^5)+x^7+o(x^7)+o(x^9)+o(x^9)+o(x^7)$$

$$\left(x+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)^3=\frac{x^3+o(x^5)}{3!}=\frac{x^3}{6}=o(x^5)$$

$$f(x)=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)+\frac{x^2}{2}+o(x^4)+\frac{x^3}{6}+o(x^5)+o(x^3)$$

$$f(x)=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2}+o(x^3)$$

Cálculo de límites usando fórmula de Taylor

Método de selección de la parte principal de la función

Sánchez & Valdés (1982) manifiestan:

Supongamos que se quiere calcular:

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}$ donde $\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0} g(x)=0$

Desarrollamos las funciones f y g por la fórmula de Taylor en $x = x_0$ y limitémonos en este desarrollo a los primeros términos desiguales a cero:

$$f(x) = a(x - x_0)^n + o[(x - x_0)^n], a \neq 0$$

$$g(x) = b(x - x_0)^m + o[(x - x_0)^m], b \neq 0$$

Entonces

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{a(x - x_0)^n + o[(x - x_0)^n]}{b(x - x_0)^m + o[(x - x_0)^m]}$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b} \lim_{x \to x_0} (x - x_0)$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} \frac{a}{b}, si\ m = n \\ 0, si\ m < n \\ \infty, si\ m > n \end{cases}$$

Ejemplos

Calcular

$$\boldsymbol{\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{x^3}}$$

Usando el método de selección de la parte principal de la función

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$$

$$\sin x - x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3) - x$$

$$\sin x - x = -\frac{x^3}{3!} + o(x^3)$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{x^3}{3!} + o(x^3)}{x^3}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x^3}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0} -\frac{1}{6} + o(x^0)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0} -\frac{1}{6} + \lim_{x\to 0} o(x^0)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^3} = -\frac{1}{6}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{d}{dx}(\sin x - x)}{\frac{d}{dx}(x^3)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{d}{dx}(\cos x - 1)}{\frac{d}{dx}(3x^2)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{d}{dx}(-\sin x)}{6x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{-\cos x}{6}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^3} = -\frac{1}{6}$$

1. $\boldsymbol{\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}-\cos(x)}{x^3\sin(x)}}$

   Nota: verificar el orden del denominador, en este caso, usamos infinitésimos equivalentes $\sin(x) \sim x$ (en $x = 0$)

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{x} + o(x^2)$$

$$e^{-\frac{x^2}{2}} = 1 + \left(-\frac{x^2}{2}\right) + \frac{\left(-\frac{x^2}{2}\right)^2}{2!} + \left(-\frac{x^2}{2}\right)^2$$

$$e^{-\frac{x^2}{2}} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + o(x^4)$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

$$e^{-\frac{x^2}{2}} - \cos(x) = \frac{x^4}{12} + o(x^4)$$

$$\sin(x) = x + o(x)$$

$$x^3\sin(x) = x^4 + o(x^4)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}-\cos(x)}{x^3\sin(x)}=\frac{\frac{1}{12}x^4+o(x^4)}{x^4+o(x^4)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}-\cos(x)}{x^3\sin(x)}=\frac{1}{12}\lim_{x\to 0}(x-o)^{4-4}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}-\cos(x)}{x^3\sin(x)}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}x^0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}-\cos(x)}{x^3\sin(x)}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}-\cos(x)}{x^3\sin(x)}=\frac{1}{12}$$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-x+\frac{x^3}{3}}{x-\tan(x)}$

$f(0)=0$

$$f'(0)=\frac{1+\frac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}(2x)}{x+(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}=\frac{1+x(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}}{x+(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}=\frac{1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}=\frac{\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$f'(0)=\frac{1}{1}=1$$

$$f''(0)=-\frac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}(2x)$$

$$f''(0)=-x(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$f''(0)=0$$

$$f'''(0)=-x\left[-\frac{3}{2}(1+x^2)^{-\frac{5}{2}}\right](2x)$$

$$f'''(0)=+(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}(-1)$$

$$f'''(0)=-3x^2(1+x^2)^{-\frac{5}{2}}+(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$f'''(0)=-1$$

$$\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)=0+1x+\frac{0x^2}{2!}-\frac{1x^3}{3!}+o(x^3)$$

$$\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) - x + \frac{x^3}{3} = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) - x + \frac{x^3}{3}$$

$$\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) = +\frac{1}{6} + o(x^3)$$

$$\tan(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$$

$$x - \tan(x) = x - x - \frac{1}{3}x^3 - o(x^3)$$

$$x - \tan(x) = -\frac{1}{3}x^3 - o(x^3)$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) - x + \frac{x^3}{3}}{x - \tan(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{6}x^3 + o(x^3)}{-\frac{1}{3}x^3 - o(x^3)} = -\frac{1}{2}$$

Si se tienen indeterminaciones de los tipos $\frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 0 \cdot \infty, 0^0, \infty^0, 1^\infty$.

El caso cuando $x \to x_0, \neq 0$, se trandorma con el cambio de variable $t = x \to x_0$ con $t \to 0$

En el caso $x \to \infty$ se transforma con el cambio de variable $t = \frac{1}{x}$ en $t \to 0$

Ejemplos

Calcular el límite

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[3]{x^3 + x^2} - \sqrt[3]{x^3 - x^2}$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3\left(1+\frac{1}{x}\right)} - \sqrt[3]{x^3\left(1-\frac{1}{x}\right)}\right)$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(x\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}} - x\sqrt[3]{1-\frac{1}{x}}\right)$$

$$\lim_{x\to\infty} x\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}} - \sqrt[3]{1-\frac{1}{x}}\right)$$

Sea $t = \frac{1}{x}$, $si \begin{matrix} x \to \infty \\ t \to 0 \end{matrix}$

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+t}-\sqrt[3]{1-t}}{t}$$

$\sqrt[3]{1+t}$

$f(0) = 1$

$f'(0) = \frac{1}{3}(1+t)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}$

$\sqrt[3]{1-t}$

$f(0) = 1$

$f'(0) = \frac{1}{3}(1-t)^{-\frac{2}{3}}(-1) = -\frac{1}{3}$

$\sqrt[3]{1+t} = 1 + \frac{1}{3}t + o(t)$

$\sqrt[3]{1-t} = 1 - \frac{1}{3}t + o(t)$

$f(0) = 0$

$f'(0) = 1$

$t = t + o(t)$

$$\lim_{t\to 0}\left(\frac{\sqrt[3]{1+t}-\sqrt[3]{1-t}}{t}\right) = \lim_{t\to 0}\frac{1+\frac{1}{3}t+o(t)-1+\frac{1}{3}t-o(t)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\frac{2}{3}t+o(t)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{2}{3}$$

2. $\boldsymbol{\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin(x)}{e^x-1-x-\frac{x^2}{2}} \to 0/0}$

$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x)$

$x - \sin(x) = x - x + \frac{x^3}{6} + o(x)$

$x - \sin(x) = \frac{x^3}{6} + o(x)$

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$

$$e^x - 1 - 1 - \frac{x^2}{2} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - 1 - x - \frac{x^2}{2} + o(x)$$

$$e^x - 1 - 1 - \frac{x^2}{2} = \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin(x)}{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}} = \frac{\frac{x^3}{6} + o(x^3)}{\frac{x^3}{6} + o(x^3)} = 1$$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2(x)}\right)$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(x) - x^2}{x^2 \sin^2(x)} \to \frac{0}{0}$$

$\sin^2(x)$

$f(0) = 0$

$f'(0) = 2\sin(x)\cos(x) = 0$

$f''(0) = 2\sin x\,(-\sin x) + \cos x\,(2\cos x)$

$f''(0) = -2\sin^2(x) + 2\cos^2(x)$

$f''(0) = 2$

$f'''(0) = -2(2\sin x\cos x) + 2[2\cos x\,(-\sin(x)]$

$f'''(0) = -4\sin(x)\cos(x) - 4\sin(x)\cos(x)$

$f'''(0) = 0$

$$f^{(4)}(0) = -4\sin x\,(-\sin x) + \cos x\,(-4\cos x) - 4\sin x\,(-\sin x) + \cos x\,(-4\cos x)$$

$f^{(4)}(0) = 4\sin^2(x) - 4\cos^2(x) + 4\sin^2(x) - 4\cos^2(x)$

$f^{(4)}(0) = -8$

$$\sin^2(x) = \frac{2x^2}{2!} - \frac{8x^4}{4!} + o(x^4)$$

$$\sin^2(x) = x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)$$

$$\sin^2(x) - x^2 = x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4) - x^2$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(x) - x^2}{x^2 \sin^2(x)} = \frac{-\frac{x^4}{3} + o(x^4)}{x^4 + o(x^4)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(x)-x^2}{x^2\sin^2(x)}=-\frac{1}{3}$$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos x+\frac{x^2}{2}\right)^{\frac{1}{x(\sin x-x)}}\to 1^{\infty}$

$$y=\left(\cos x+\frac{x^2}{2}\right)^{\frac{1}{x(\sin x-x)}}=e^{\ln\frac{\cos x+\frac{x^2}{2}}{x(\sin x-x)}}$$

$$\lim_{x\to 0}\ln(y)=\lim_{x\to 0}\ln\left(\cos x+\frac{x^2}{2}\right)^{\frac{1}{x(\sin x-x)}}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x+\frac{x^2}{2})}{x(\sin x-x)}\to\frac{0}{0}$$

$$\cos(x)=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)$$

$$\cos(x)+\frac{x^2}{2}=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)+\frac{x^2}{2}$$

$$\cos(x)+\frac{x^2}{2}=\frac{x^4}{24}+o(x^4)$$

$$\ln\left(\cos x+\frac{x^2}{2}\right)=\ln\left[1+\left(\frac{x^4}{24}+o(x^4)\right)\right]=\frac{x^4}{24}+o(x^4)$$

$$\sin(x)=x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)$$

$$\sin(x)-x=x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)-x$$

$$\sin(x)-x=-\frac{x^3}{6}+o(x^3)$$

$$x(\sin(x)-x)=x\left[-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right]$$

$$x(\sin(x)-x)=-\frac{x^4}{6}+o(x^4)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x+\frac{x^2}{2})}{x(\sin x-x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^4}{24}+o(x^4)}{-\frac{x^4}{6}+o(x^4)}=\lim_{x\to 0}-\frac{1}{4}=e^{-\frac{1}{4}}$$

5. $\lim\limits_{x\to 2}\left[\left(\sqrt{3-x}+\ln\left(\frac{x}{2}\right)\right)\right]^{\frac{1}{\sin^2(x-2)}}$

Sea $\begin{matrix} t=x-2 \\ x=t+2\end{matrix}$, $si \begin{matrix} x\to 2 \\ t\to 0\end{matrix}$

$$\lim_{t\to 0}\left[\sqrt{1-t}+\ln\left(1+\frac{t}{2}\right)\right]^{\frac{1}{\sin^2(t)}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-t}+\ln\left(1+\frac{t}{2}\right)}{\sin^2(t)}}$$

$$\sin^2(t) = t^2 + o(t^2)$$

$$(1-t)^{\frac{1}{2}} = 1-\frac{1}{2}t-\frac{1}{4}\frac{t^2}{2!} = 1-\frac{t}{2}-\frac{t^2}{8}+o(t^2)$$

$$f(0) = 1$$

$$f'(0) = \frac{1}{2}(1-t)^{-\frac{1}{2}}(-1) = -\frac{1}{2}(1-t)^{-\frac{1}{2}}$$

$$f'(0) = -\frac{1}{2}$$

$$f''(0) = \frac{1}{4}(1-t)^{-\frac{3}{2}}(-1) = -\frac{1}{4}(1-t)^{-\frac{3}{2}}$$

$$f''(0) = -\frac{1}{4}$$

$$\ln\left(1+\frac{t}{2}\right) = \frac{1}{2}t-\frac{1}{8}t^2+o(t^2)$$

$$f(0) = 0$$

$$f'(0) = \frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{t}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{2+t}{2}} = \frac{1}{t+2} = \frac{1}{2}$$

$$f''(0) = -\frac{1}{(t+2)^2} = -\frac{1}{4}$$

$$e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-t}+\ln\left(1+\frac{t}{2}\right)}{\sin^2(t)}} = e^{\lim\limits_{t\to 0}\frac{\ln\left[1-\frac{1}{4}t^2+o(t^2)\right]}{t^2+o(t^2)}} = e^{\lim\limits_{t\to 0}\frac{\ln\left[1+(-\frac{1}{4}t^2+o(t^2)\right]}{t^2+o(t^2)}} = e^{\lim\limits_{t\to 0}\frac{-\frac{1}{4}t^2+o(t^2)}{t^2+o(t^2)}} = e^{-\frac{1}{4}}$$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[5]{x^5+x^4}-\sqrt[5]{x^5-x^4}$

$$\lim_{x\to 0}\sqrt[5]{x^5\left(1+\frac{1}{x}\right)}-\sqrt[5]{x^5\left(1-\frac{1}{x}\right)}$$

$$\lim_{x\to 0}x\sqrt[5]{1+\frac{1}{x}}-x\sqrt[5]{1-\frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x\to 0}x\left(\sqrt[5]{1+\frac{1}{x}}-\sqrt[5]{1-\frac{1}{x}}\right)$$

$$t = \frac{1}{x}, si \begin{matrix} x \to \infty \\ t \to 0 \end{matrix}$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{\sqrt[5]{1+t} - \sqrt[5]{1-t}}{t}$$

$$\sqrt[5]{1+t} = 1 + \frac{1}{5}t - \frac{4}{50}t^2 + o(t^2)$$

$$f(0) = 1$$

$$f'(0) = \frac{1}{5}(1+t)^{-\frac{4}{5}} = \frac{1}{5}$$

$$f''(0) = -\frac{4}{25}(1+t)^{-\frac{2}{5}} = -\frac{4}{25}$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{\sqrt[5]{1+t} - \sqrt[5]{1-t}}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{1 + \frac{1}{5}t - \frac{4}{50}t^2 + o(t^2) - 1 + \frac{1}{5}t + \frac{4}{50}t^2 + o(t^2)}{t + o(t)}$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{\sqrt[5]{1+t} - \sqrt[5]{1-t}}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{2}{5}t + o(t)}{t + o(t)}$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{\sqrt[5]{1+t} - \sqrt[5]{1-t}}{t} = \frac{2}{5}$$

7. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{2x+\cos(2x)} - e^{\tan(x)} + 2x^2}{2\sin(x) - 2\ln(1+x) - x^2}$

$$\sqrt{2x + \cos(2x)} = 1 + x - \frac{5}{2}x^2 + o(x^2)$$

$$f(0) = 1$$

$$f'(0) = \frac{1}{2}(2x + \cos 2x)^{-\frac{1}{2}}(2 - 2\sin 2x)$$

$$f'(0) = \frac{1}{2}(2) = 1$$

$$f''(0) = \frac{1}{2}\left[(2x + \cos 2x)^{-\frac{1}{2}}(2 - 2\sin 2x)\right] + (2 - 2\sin 2x)\left[-\frac{1}{2}(2x + \cos 2x)^{-\frac{3}{2}}\right]$$

$$f''(0) = \frac{1}{2}\left[\frac{-4\cos 2x}{\sqrt{2x + \cos(2x)}} - \frac{1}{2}\frac{2 - 2\sin 2x}{\sqrt{(2x + \cos 2x)^3}}\right]$$

$$f''(0) = \frac{1}{2}\left[-\frac{4}{1} - \frac{1}{2}\frac{2}{1}\right]$$

$$f''(0) = \frac{1}{2}(-4 - 1)$$

$$f''(0) = -\frac{5}{2}$$

$$e^{\tan(x)} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(t^2)$$

$$\sin(x) = x + o(x^0)$$

$$\ln(1+x) = 1 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{2x^3}{3} + o(x^3)$$

$$f(0) = 0$$

$$f'(0) = \frac{1}{1+x} = 1$$

$$f''(0) = -\frac{1}{(1+x)^2} = -1$$

$$f'''(0) = \frac{2}{(1+x)^3} = 2$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2x + \cos(2x)} - e^{\tan(x)} + 2x^2}{2\sin(x) - 2\ln(1+x) - x^2}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 + x - \frac{5}{2}x^2 + o(x^2) - 1 - x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) + 2x^2}{2x + o(x^2) - 2 - 2x + x^2 + o(x^2) - x^2}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{-x^2 + o(x^2)}{-2} = 0$$

Encontrar el polinomio de Mc Laurin

1. $\boldsymbol{f(x) = \frac{x}{1-x^2} = x(1-x^2)^{-1}}$

$$f(0) = 0$$

$$f'(0) = x[-(1-x^2)^{-2}(-2x)] + (1-x^2)^{-1}$$

$$f'(0) = 2x^2(1-x^2)^{-2} + (1-x^2)^{-1}$$

$$f'(0) = \frac{2x^2}{(1-x^2)^2} + \frac{1}{(1-x^2)}$$

$$f'(0) = \frac{2x^2 + 1 - x^2}{(1-x^2)^2} = (1+x^2)(1-x^2)^{-2}$$

$$f''(0) = (1+x^2)[-2(1-x^2)^{-3}(-2x)] + (1-x^2)^{-2}(2x)$$

$$f''(0) = (1+x^2)(4x)(1-x^2)^{-3} + 2x(1-x^2)^{-2}$$

$$f''(0) = \frac{4x(1+x^2)}{(1-x^2)^3} + \frac{2x}{(1-x^2)^2}$$

$$f''(0) = \frac{4x(1+x^2)+2x-2x^3}{(1-x^2)^3}$$

$$f''(0) = \frac{2x^3+6x}{(1-x^2)^3} = (2x^3+6x)(1-x^2)^{-3}$$

$$f'''(0) = (2x^3+6x)[-3(1-x^2)^{-4}(-2x)] + (1-x^2)^{-3}(6x^2+6)$$

$$f'''(0) = (2x^3+6x)[6x(1-x^2)^{-4}] + (1-x^2)^{-3}(6x^2+6)$$

$$f'''(0) = \frac{6x(2x^3+6x)}{(1-x^2)^4} + \frac{6x^2+6}{(1-x^2)^3}$$

$$f'''(0) = \frac{12x^4+36x^2+6x^2-6x^3+6-6x^2}{(1-x^2)^4}$$

$$f'''(0) = \frac{12x^4-6x^3+36x^2+6}{(1-x^2)^4}$$

$$f'''(0) = 6$$

$$f^{(4)}(0) = (12x^4-6x^3+36x^2+6)[-4(1-x^2)^{-5}(-2x)] + (1-x^2)^{-4}(48x^3 - 18x^2 + 72x)$$

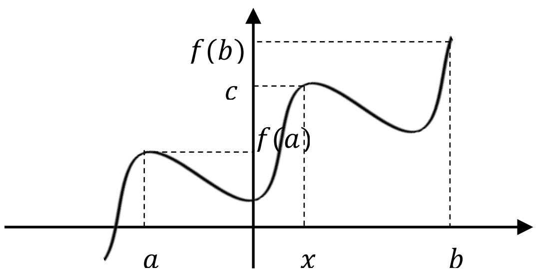
$$f^{(4)}(0) = (12x^4-6x^3+36x^2+6)(8x)(1-x^2)^{-4}$$

Teoremas básicos del cálculo

Teorema del valor intermedio

Si f es una función continua en un intervalo de a a b (es decir, f es una función continua en un intervalo cerrado $[a,b]$), entonces f toma todos los valores entre $f(a)$ y $f(b)$

a. El Teorema del valor medio desde el punto de vista gráfico



b. Verificar la hipótesis de continuidad.

Ejemplo

a) $\boldsymbol{2^x = x^2}$

$g(x) = 2^x - x^2$

$g(0) = 2^0 - 0^2 = 1 > 0$

$g(1) = 2^1 - 1^2 = 2 - 1 = 1 > 0$

$g(2) = 2^2 - 2^2 = 4 - 4 = 0$

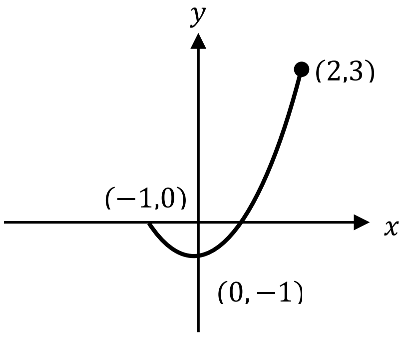
$g(3) = 2^3 - 3^2 = 8 - 9 = -1 < 0$

Teorema del Valor Externo

Si f es una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces f alcanza un valor máximo y un valor mínimo en $[a, b]$

Ejemplos

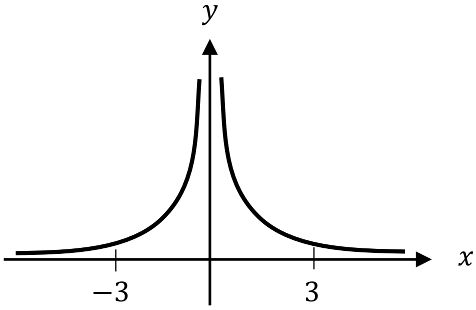
a) $f(x) = x^2 - 1$ en $[-1,2]$



Máximo en $x = 2$

Mínimo en $x = 0$

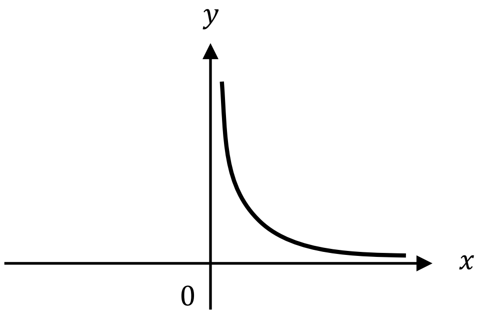
b) Considerar la función alcanza máximo y mínimo en ese intervalo



$f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ en $[-3,3]$

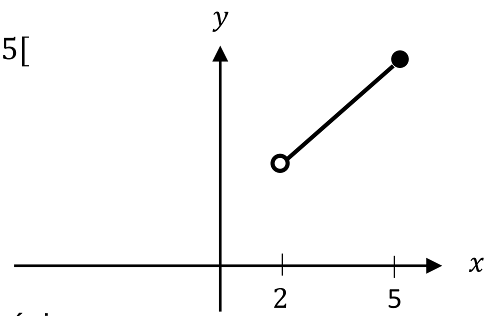
f no es continua, no hay máximos y mínimos en ese intervalo

c) $f(x) = \frac{1}{x}$ en $]0,3]$



El intervalo es abierto, por tanto, no hay máximos en $x = 3$ hay mínimo

d) $f(x) = x + 1$ en $]2,5[$



$en\ x = 5$ hay valor máximo

Nota. Este teorema no sirve para calcular valores externos.

Teorema de Rolle

De acuerdo con Larson & Hostetler (1991), si f es una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, y si

1. $f(a) = f(b) = 0$ y
2. f es diferenciable en el intervalo $]a, b[$

Entonces, hay un punto $c(a < c < b)$ tal que $f'(c) = 0$

Ejemplo

a) Considerando la función $\boldsymbol{f(x) = x^2 - 4x + 3}$ en $[\mathbf{1, 3}]$

1. $f(1) = 1^2 - 4(1) + 3 = 1 - 4 + 3 = 0$

   $f(3) = 3^2 - 4(3) + 3 = 9 - 12 + 3 = 0$

2. $f'(x) = 2x - 4$

   $2x - 4 = 0$

   $2x = 4$

   $x = 2$

   $c = 2$

b) $\boldsymbol{x^3 + x^2 - 2x}$ en $[\mathbf{-2, 0}]$

1. $f(-2) = (-2)^3 + (-2)^2 - 2(-2) = -8 + 4 + 4 = 0$

   $f(0) = 0$

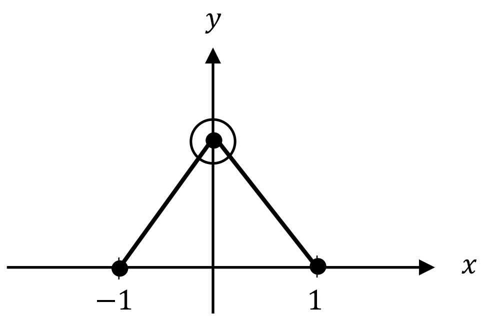
2. $f'(x) = 3x^2 + 2x - 2$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 24}}{6} = \frac{-2 \pm \sqrt{28}}{6}$$

$$x = \frac{-2 \pm 2\sqrt{7}}{6}$$

$$x_1 = \frac{-2 + 2\sqrt{7}}{6} \vee x_2 = \frac{-2 - 2\sqrt{7}}{6}$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x & para \quad -1 \leq x \leq 0 \\ 1 - x & para \quad 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$



Teorema del Valor Medio

En cuanto al teorema del valor medio Larson & Hostetler (1991) afirma que "una función continua en un intervalo cerrado tiene necesariamente un máximo y un mínimo en ese intervalo" (p. 188), en otras palabras, si f es una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y diferenciable en el intervalo abierto $]a, b[$, entonces existe al menos un punto c entre a y b tal que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, es la pendiente de la recta que pasa por los puntos: $\big(a, f(a)\big), (b, f(b))$. La pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en $x = c$ es $f'(c)$, por lo tanto, el Teorema de valor medio afirma que la recta tangente $x = c$ es paralela a la recta de los puntos correspondientes en $x = a$ y $x = b$

Ejercicio

1. **Hallar el valor de c descrito por el Teorema de valor medio si $f(x) = x^2$ para $1 \leq x \leq 3$**

   $f(a) = 1$ $\qquad$ $f'(c) = \frac{9-1}{3-1} = \frac{8}{2} = 4$

   $f(b) = 9$

   $f'(x) = 2x$

   $2x = 4$

   $x = 2$

2. **Considerar $f(x) = x^3$ en $1 \leq x \leq 3$**

   $f(a) = 1$ $\qquad$ $f'(c) = \frac{27-1}{2} = \frac{26}{2} = 13$

   $f(b) = 27$

   $f'(x) = 3x^2$

   $3x^2 = 13$

   $$x^2 = \frac{13}{3}$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{13}{3}} = \sqrt{\frac{13}{3}}$$

3. $\frac{3}{x+2}$ **en** $[-1, 1]$

$f(a) = 3$ $\qquad f'(c) = \frac{1-3}{1+1} = -\frac{2}{2} = -1$

$f(b) = 1$

$$f'(x) = -3(x+2)^{-2} = -\frac{3}{(x+2)^2}$$

$$-\frac{3}{(x+2)^2} = -1$$

$$-(x+2)^2 = -3$$

$$x + 2 = \sqrt{3}$$

$$x = \sqrt{3} - 2$$

Ejercicios propuestos

1) Encuentre el límite de las siguientes expresiones:

a. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{\sin^2 x} - 1}{\arctan 4x^2}$

b. $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{\ln(1+e^x)}{x}$

c. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{1-\cos\left(\frac{x}{2}\right)}$

d. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(5x)}{\ln(1+4x)}$

e. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{1-\cos\left(\frac{x}{2}\right)}$

f. $\lim\limits_{x\to \pi} \frac{\sin x}{\pi^2 - x^2}$

g. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{\ln(1+5x)}$

h. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{\sin 3x} - 1}{\ln(1+\tan 2x)}$

i. $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(2^{\sin x})}{\tan x}$

j. $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\sin 4x)}{e^{\sin 5x}-1}$

k. $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(2-\cos 2x)}{\ln^2(\sin 3x+1)}$

l. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\arctan(\sin x)}$

m. $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} (1+\cos x)^{3\sec x}$

n. $\lim_{x\to \pi} \frac{\tan(\pi-x)}{\pi^2-x^2}$

o. $\lim_{x\to 0} (cosx)^{\frac{1}{x^2}}$

2) Obtener el polinomio de Taylor de grado n para $f(x)$ cerca de $x=a$ en los problemas siguientes:

a. $f(x)=e^{3x}, a=0, n=3$

b. $f(x)=x^{\frac{3}{2}}, a=1, n=3$

c. $f(x)=x^3+5x^2-2, a=0, n=4$

d. $f(x)=\cos^2(x), a=0, n=4$

e. $f(x)=\sin(x), a=\frac{\pi}{4}, n=5$

f. $f(x)=\cosh(x), a=0, n=4$

g. $f(x)=\ln(x+3), a=-2, n=4$

h. $f(x)=\sqrt[3]{x}, a=8, n=2$

i. $f(x)=e^{x^2}, a=0, n=2$

3) Hallar la serie de Taylor para x cerca de a

a. $f(x)=\sinh(x), a=\ln(3)$

b. $f(x)=e^{2x}, a=0$

c. $f(x)=\sinh(x), a=0$

d. $f(x)=\cos^2(x), a=0$

e. $f(x)=\ln(2+x), a=-1$

f. $f(x) = \frac{(e^{x^2}-1)}{x^2}, a = 0$

g. $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}, a = 0$

h. $f(x) = \sin(x)\,, a = \frac{\pi}{4}$

i. $f(x) = e^x, a = \ln(2)$

Hallar el polinomio de Taylor de Grado 4 para $f(x) = e^{-2x}$

Datos:

$a = 0$

$f(x) = e^{-2x}$

$n = 4$

Referencias

Demidovich, B. (1967). *Problemas y ejercicios de análisis matemático.* (2da ed.) Editorial MIR.

Barreno, N., Cachuput, J., Martínez, J., & Román, M. (2018). *Límites y continuidad de una función real.* Grupo Compás. htpps://publicaciones/public/docs/books/2019-09-19-144049-79%20Libro%20L%C3%ADmites%20y%20Continuidad%20de%20una%20Funci%C3%B3n%20Real.pdf

Farrand, S. M., & Jim Poxon, N. (1988). *Cálculo: Compendios universitarios.* HBJ.

Lara P., J., & Arroba R., J. (2017). *Análisis matemático.* (6ta ed.). Unidad Académica de Matemática de la Universidad Central.

Larson, R. E., & Hostetler, R. P. (1991). *Cálculo y geometría analítica* (3ra ed.). McGraw-Hill Interemamericana de México.

Larson, R., & Edwards, B. H. (2010). *Cálculo 1 de una variable.* McGraw-Hill/Interamericana Editores. https://ingindustrial869624637.files.wordpress.com/2019/02/calculo-1-ron-larson-.pdf

Leithold, L. (1987). *El cálculo con geometría analítica.* (5ta ed.). Industria Editorial Mexicana.

Rojas, G., Trujillo, J. C., & Barba, F. (2017). *Cálculo diferencial: Cálculo en una variable* (2da ed.). Facultad de Ciencias: Escuela Politécnica Nacional.

Ron, L., & Edwards, B. (2018). *Matemáticas I. Cálculo diferencial* (1ra ed.). Cengage.https://www.academia.edu/48917622/Matematicas_I_C%C3%A1lculo_diferencial

Sánchez, C., & Valdés, C. (1982). *Análisis matemático.* Editorial Pueblo y Educación.

Stewart, J. (2012). *Cálculo de una variable trascendentes tempranas* (7ma ed.). Cengage Learning. https://eva.interior.udelar.edu.uy/pluginfile.php/96366/mod_resource/content/1/Stewart.%20C%C3%A1lculo%20de%20una%20variable..pdf

Swokowski, E. W. (1988). *Cálculo con geometría analítica* (2da ed.). Grupo Editorial Iberoamérica.

Tomeo Perucha, V., Uña Juárez, I., & San Martín Moreno, J. (2012). *Cálculo en una variable* (1ra ed.). Alfaomega Grupo Editor.

ISBN: 978-9942-636-90-4
9789942636904