Geometría plana para ingeniería

TOMO 1

Segmentos, ángulos, polígonos y triángulos

Víctor Hugo Vásconez Velasco

Daniela Carina Vásconez Núñez

Vanessa Alexandra Vásconez Núñez

Fernando Mauricio Tello Oquendo

CIDE EDITORIAL

Geometría plana para ingeniería

TOMO 1

Segmentos, ángulos, polígonos y triángulos

Geometría plana para ingeniería

TOMO 1

Segmentos, ángulos, polígonos y triángulos

Autores

Víctor Hugo Vásconez Velasco
Daniela Carina Vásconez Núñez
Vanessa Alexandra Vásconez Núñez
Fernando Mauricio Tello Oqueando

Centro de Investigación y Desarrollo Ecuador
Tel.: + (593) 04 2037524
http.:/www.cidecuador.org

ISBN: 978-9942-636-18-8

https://doi.org/10.33996/cide.ecuador.GP2636188

Dirección editorial: Lic. Pedro Misacc Naranjo, Msc.
Coordinación técnica: Lic. María J. Delgado
Diseño gráfico: Lic. Danissa Colmenares
Diagramación: Lic. Alba Gil
Fecha de publicación: mayo, 2023

La presente obra fue evaluada por pares académicos experimentados en el área.

Catalogación en la Fuente

Geometría plana para ingeniería. Tomo 1: Segmentos, ángulos, polígonos y triángulos / Víctor Hugo Vásconez Velasco, Daniela Carina Vásconez Núñez, Vanessa Alexandra Vásconez Núñez y Fernando Mauricio Tello Oquendo.--Ecuador: Editorial CIDE, 2023.

198 p.: incluye tablas, figuras; 17,6 x 25 cm.

ISBN: 978-9942-636-18-8

1.- Geometría plana

Dedicatoria

Dedico esta obra a mi querida familia, en especial a mi esposa Olguita, quien ha sido mi apoyo incondicional en todos los aspectos de mi vida.

Víctor Hugo Vásconez Velasco

Índice

Capítulo 1
Geometría euclidiana

Capítulo 2
Segmentos rectilíneos

Capítulo 3
Ángulos en el plano

Capítulo 4
Polígonos

Capítulo 5
Triángulos

Introducción

La Geometría Plana es una parte de la geometría que se encarga del estudio de las propiedades y las medidas de figuras que se estudian en dos dimensiones, es decir, en el plano. Así mismo es una herramienta fundamental para estudiantes de ingeniería en el desarrollo de habilidades y destrezas para su desenvolvimiento en el estudio del álgebra, dibujo técnico, cálculo, trigonometría, física, y demás tópicos básicos de ingeniería.

La presente obra, en su primer tomo, tiene el objetivo de brindar al lector una herramienta para definir los conceptos básicos de la Geometría Plana, poniendo énfasis en las propiedades, teoremas y operaciones de segmentos, ángulos, polígonos, y triángulos.

La obra pretende que los lectores sean capaces de describir las operaciones con segmentos rectilíneos, reconocer los tipos de ángulos, aplicar los teoremas de ángulos, determinar los teoremas aplicados a polígonos, identificar los rectas, segmentos y puntos notables de los triángulos.

Cada capítulo del libro tiene una sección de preguntas de autoevaluación, con la finalidad de que el lector tenga la oportunidad de *reafirmar sus conocimientos geométricos. Además, se presentan ejercicios resueltos que se han desarrollado utilizando procedimientos sencillos, proposiciones fundamentales, ayudando de esta forma a los lectores en mejorar el aprendizaje de la Geometría Plana; finalmente, se proponen ejercicios para el estudio y análisis de los lectores.*

CAPÍTULO 1

Geometría euclidiana

Capítulo 1
Geometría euclidiana

1

"Primeramente como profesor,
después como compañero,
yo le respetaba y admiraba,
él sabía mucho,
pero un día se llevó todo…;
dejemos algo que pueda servir a otros"

— *Anónimo*

Objetivo

Reconocer los elementos simples de la geometría plana, estableciendo los conceptos y definiciones básicas de términos geométricos y matemáticos, que permitan al lector iniciar el conocimiento en esta área.

1.1 Reseña histórica

El hombre, al observar la naturaleza y todo cuanto lo rodea, fue creando conceptos de representaciones, líneas rectas y curvas, figuras planas, cuerpos, volúmenes. De este modo, la luna y al sol los veía proyectados como discos, el haz de luz le dio la idea de línea recta; los bordes de algunas hojas y el arco iris, la idea de curva; los troncos de algunos árboles y las montañas le dieron idea de las formas más diversas. La construcción de casas con sus paredes verticales y sus techos horizontales surgió la noción de perpendicularidad y paralelismo; se llegó a descubrir que la distancia más corta entre dos ciudades es el camino recto.

Si bien en Egipto surgieron los conceptos de geometría en forma práctica, fue en Grecia donde estos conceptos adquirieron forma científica, alcanzando su máximo esplendor estrechamente ligados a la filosofía; de tal manera que para ingresar en la escuela filosófica de Platón se debían tener conocimientos de geometría.

Se puede destacar los aportes de Tales de Mileto (640 – 548 a. C), uno de los siete sabios de Grecia, Pitágoras (580 – 496 a. C), famoso por el teorema que lleva su nombre, y Euclides (325 -275 a.C.), que dio origen a la Geometría Euclidiana [1], [2].

Los primeros conocimientos geométricos que tuvo el hombre consistían en una serie de reglas prácticas, así los antiguos egipcios, chinos, babilonios, romanos y griegos emplearon la geometría en la agrimensura, la astronomía, la navegación y otras actividades, los conocimientos geométricos de los egipcios están patentemente reflejados en la construcción de las grandes pirámides del valle del Nilo.

Las escrituras que están descritos en “Elementos de Euclides” son después de la Biblia, el libro más divulgado que hay en el mundo; por lo que hasta se puede afirmar que en el conocimiento de la geometría como una obra de contenido universal [3].

En tiempos modernos en que vivimos, si miramos a nuestro alrededor observamos “geometría” por todas partes en construcciones, barcos, aviones, satélites artificiales, ferrocarriles, robots, instrumentos médicos, instrumentos de laboratorios, fábricas, etc.; todas estas cosas, son construidas aplicando los criterios de la geometría.

1.2 Conceptos fundamentales

Definición de geometría

Es una la rama de las matemáticas dedicada al estudio de las propiedades de las figuras y de los cuerpos, sin tomar en cuenta, su ubicación, su tamaño ni su estructura que los compone. Considerando puntos, líneas y planos [4].

Objeto de la geometría

Su estudio se fundamenta en las figuras geométricas desde el punto de vista de su forma, medida y de las relaciones que tienen entre sí.

Clases de geometría

Existe una gran variedad de geometrías, bien diferenciadas unas de otras por su complejidad y aplicabilidad matemática, teniendo como las más destacadas y significativas dentro de la Geometría Plana o llamada también Geometría clásica las siguientes [5]:

- Geometría euclidiana
- Geometría no euclidiana

La distinta naturaleza de las propiedades analizadas y la variedad de criterios han dado lugar a la existencia de un gran número de tipos de geometrías, bien diferenciadas entre sí, siendo las más conocidas e importantes las siguientes:

Geometría euclidiana

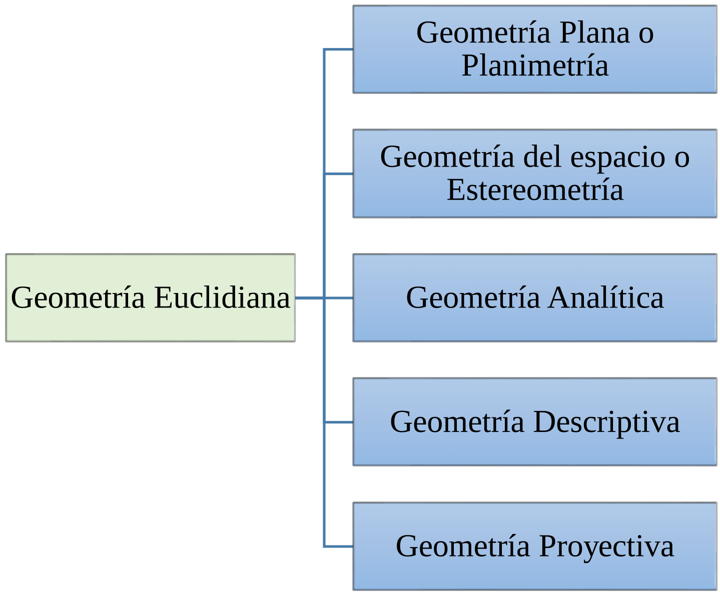
Se caracteriza por ser de carácter axiomático deductivo, partiendo de los conocimientos básicos de Euclides (matemático que vivió en la Antigua Grecia). Los postulados de la geometría euclidiana son [2]:

- Primer postulado: "por dos puntos distintos pasa una recta.”
- Segundo postulado: “un segmento rectilíneo puede prolongarse continuamente en una recta.”
- Tercer postulado: “hay una única circunferencia para cada centro y diámetro.”

- Cuarto postulado: “todos los ángulos rectos son iguales entre sí.”
- Quinto postulado: “si una línea recta corta a otras dos de manera que la suma de las medidas de los ángulos interiores de un mismo lado sea menor que las medidas de dos ángulos rectos, entonces dichas rectas, prolongadas suficientemente, se cortarán del mismo lado de la primera línea recta en que se encuentren aquellos ángulos cuya suma es menor que la medida de dos rectos”.

La geometría euclidiana nace y surge al analizar el quinto postulado. Este postulado es equivalente al axioma de John Playfair (1748-1918) que dice “Por un punto exterior a una recta pasa una única paralela.” El quinto postulado (postulado de las paralelas) es el más conocido debido a la polémica suscitada entre los matemáticos de si puede ser o no demostrado a partir de los otros cuatro. Algunos matemáticos que intentaron demostrar este postulado fueron Adrien-Marie Legendre (1752-1833) y Johann Gauss (1777-1855) [2].

Figura 1.1



Geometría plana o planimetría

Estudia las figuras geométricas ubicadas en un solo plano, en las que, para ubicar un punto, se requiere de dos coordenadas.

Geometría del espacio o estereometría

Llamada así porque estudia las figuras geométricas, tales como: líneas, cuerpos sólidos u objetos que están ubicadas en diferentes planos o en el espacio. Elementos geométricos en tres dimensiones.

Geometría analítica

Estudia en profundidad las figuras geométricas como líneas, superficies y cuerpos geométricos mismas que están representadas por expresiones algebraicas y numéricas empleando ejes y coordenadas cartesianas que están localizadas en un plano o en el espacio constituyendo una relación directa entre el álgebra y la geometría elemental.

Figuras básicas de la geometría analítica

Recta: Ecuación característica $Ax + By + C = 0$

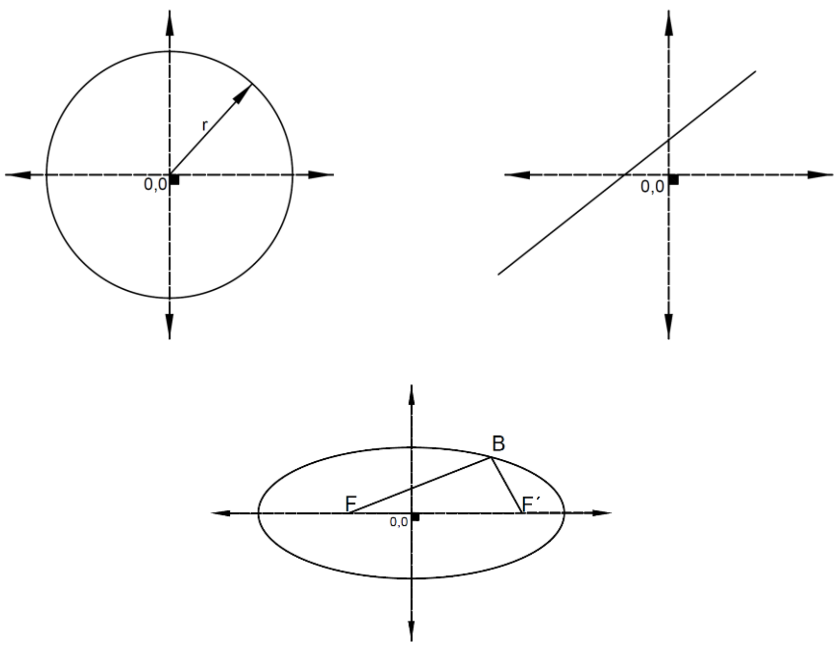
Círculo Ecuación característica $x^2 + y^2 = r^2$

Parábola Ecuación característica $y = ax^2 + bx + c$.

Hipérbola Ecuación característica $(x\text{-}h)^2 = 4p(y\text{-}k)^2$ o´ $(y\text{-}k)^2 = 4p(x\text{-}y)^2$

Elipse Ecuación característica $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Figura 1.2



Geometría descriptiva o proyectiva

Relaciona los conocimientos básicos de la matemática para solucionar analítica y gráficamente las distintas figuras geométricas en el plano cómo en el espacio.

Geometría no euclidiana o no euclídea

Son aquellas que no aceptan el quinto postulado de Euclides.

Geometría hiperbólica o de Lobatchevsky (1793 - 1856) matemático ruso

Es un tipo de geometría que cumple únicamente con los cuatro primeros postulados de la geometría euclidiana. En esta geometría se sustituye el quinto postulado por el siguiente axioma (axioma de Bolyai): "Por un punto exterior a una recta pasan dos rectas paralelas que separan las infinitas rectas no secantes de las infinitas secantes.”

Geometría elíptica o de Riemann (1826 - 1866) matemático alemán

La geometría de Riemann llamada también esférica o elíptica, tema especial de una geometría general. En ella el plano es la superficie de una esfera determinada por un elipsoide de revolución que se obtiene al girar una elipse alrededor de uno de sus ejes de simetría [6].

Figuras geométricas

Geométricamente son superficies o planos que están delimitadas por líneas rectas o curvas, como también cuerpos formados por superficies. Es un conjunto infinito de puntos, como la recta, el plano y los sólidos.

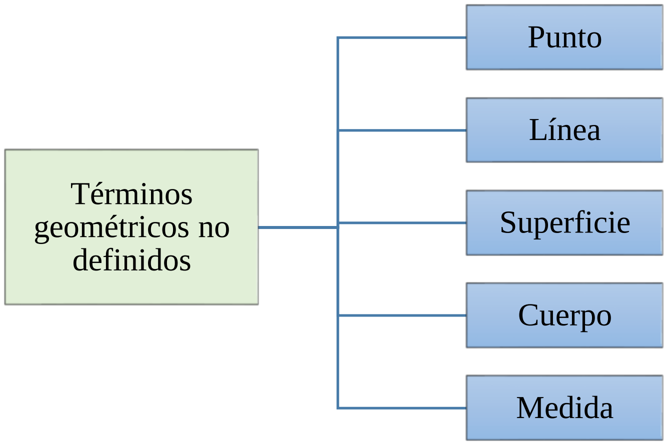
Figuras geométricas de acuerdo con su forma y tamaño

- **Iguales:** son figuras que son iguales en su forma y en su área.
- **Diferentes:** son figuras que son diferentes en forma y área.
- **Equivalentes:** cuando tienen diferente forma, pero igual área.
- **Semejantes:** figuras que tienen diferente área e igual forma.

1.3 Términos geométricos indefinidos o no definidos

En la geometría moderna (determinada por ser axiomática), los conceptos esenciales o primitivos no se pueden definir, por lo que también son llamados términos indefinidos debido a que no se pueden definir de una manera exacta pudiendo únicamente ser estableciendo únicamente su existencia. Siendo los siguientes [5]:

Figura 1.3



Punto

Es una señal casi imperceptible que se presenta en una superficie de una manera natural o artificial, identificándose como una figura geométrica que tiene POSICIÓN careciendo de dimensiones LONGITUD, ESPESOR, ANCHURA.

Puntos colineales

Puntos que están unidos por una misma recta.

Puntos consecutivos

Son los puntos que se marcan en una misma recta siguiendo un orden determinado. Ej. A, B, C, D, …

Línea

Es una sucesión infinita de puntos siguiendo una dirección determinada, caracterizada por tener dimensiones POSICIÓN, LONGITUD careciendo de ESPESOR y ANCHURA.

Tipos de líneas [7]**,** [8]**:**

Línea recta

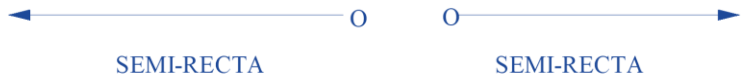
Es una línea generada por el desplazamiento infinito de un punto siguiendo una misma dirección, se caracteriza por no tener un punto inicial ni un punto final.

Figura 1.4

Semirrecta

Es la parte de una recta que no tiene un punto de inicio ni un punto final indicando uno de sus sentidos con una punta de flecha.

Figura 1.5



Rayo

En geometría el rayo se considera como a una semirrecta, su diferencia es que el rayo si tiene su punto de origen.

Figura 1.6

Segmento de recta

Es una porción de una recta comprendida entre dos puntos consecutivos donde su longitud si se puede determinar.

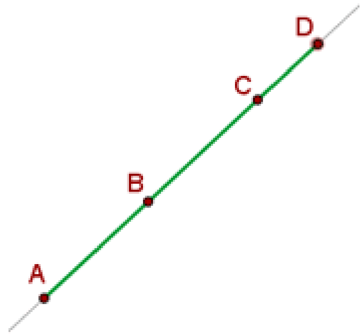
Figura 1.7

Tipos de segmentos rectilíneos [8]**:**

Segmentos colineales

Son aquellos que se encuentran en la misma dirección de una recta.

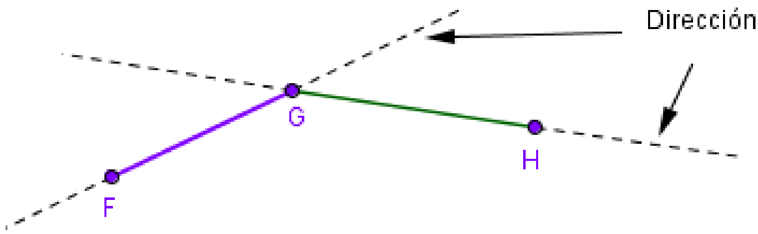
Figura 1.8 [1]



Segmentos no colineales

Son aquellos que no se encuentran en la misma dirección de una recta.

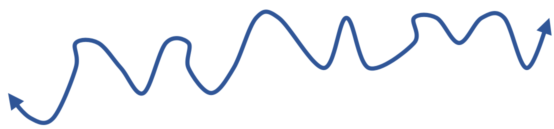
Figura 1.9 [9]



Línea curva

Línea caracterizada por que va cambiando continuamente de dirección y posición.

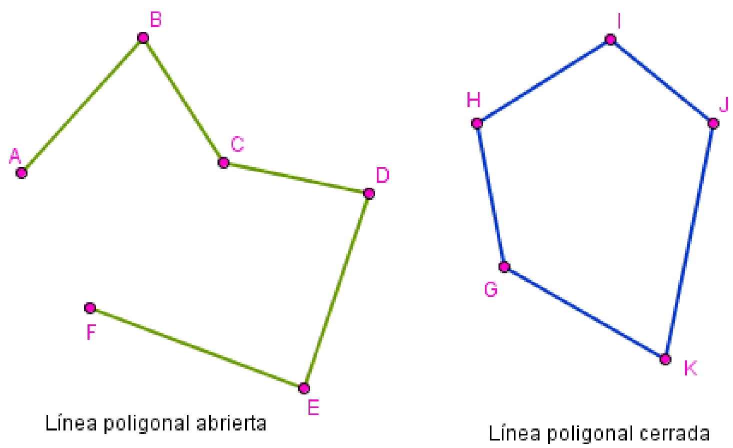
Figura 1.10



Línea quebrada o poligonal

Conformada por el conjunto de algunos segmentos rectilíneos en donde el punto final de un segmento es el punto inicial del siguiente segmento.

Figura 1.11 [10]



Línea poligonal convexa

Es aquella línea que está ubicada en un semiplano y que al prolongar en ambos sentidos sus segmentos cualesquiera de sus lados, estos quedan en un solo semiplano.

Figura 1.12 [11]

Línea poligonal cóncava

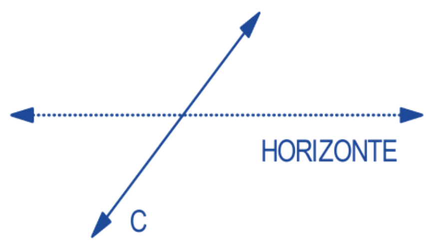
Se encuentra ubicada en un plano cuando al prolongar en ambos sentidos, alguno de sus lados de la línea quebrada poligonal, queda en un semiplano y la otra parte de ella queda ubicada en el otro semiplano.

Figura 1.13 [11]

Línea inclinada

Es una línea cuya posición con relación a una horizontal forman un ángulo; son las que no tienen la dirección vertical ni horizontal.

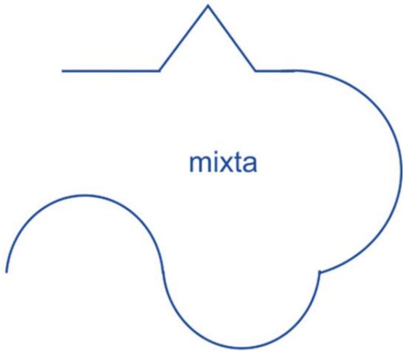
Figura 1.14



Línea mixta

Es aquella que se encuentra conformada por un conjunto de segmentos rectilíneos y una o varias líneas curvas.

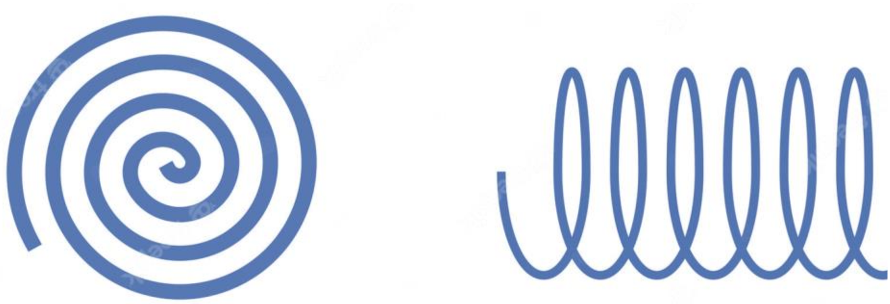
Figura 1.15 [12]



Línea espiral

La línea curva se genera por un punto que gira alrededor de otro punto considerado como centro, mientras se acerque o se aleje de él, en una dirección determinada.

Figura 1.16 [13]



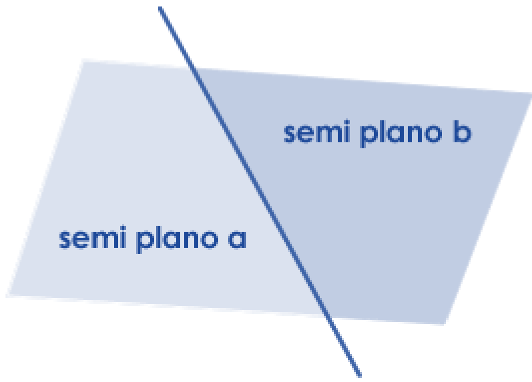
Superficie o plano

Conjunto infinito de puntos considerando dos dimensiones que son la LONGITUD y la AMPLITUD. El tipo de superficie dependerá del tipo de línea que la genere. Si se mueve en un plano o en el espacio.

Semi-plano

Se llama a cada una de las dos regiones en que una recta divide al plano.

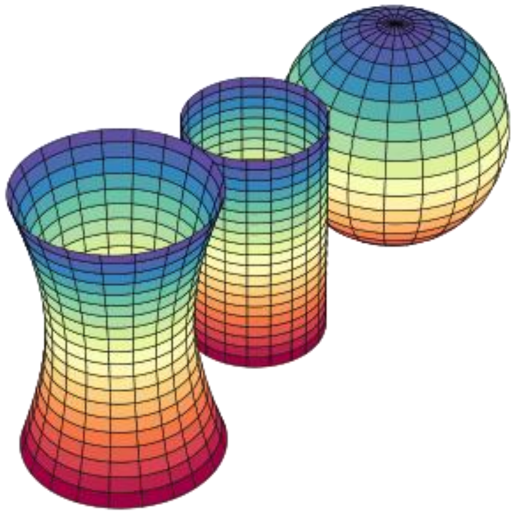
Figura 1.17 [14]



Superficie curva

Es la que se forma por el movimiento sucesivo de una línea curva.

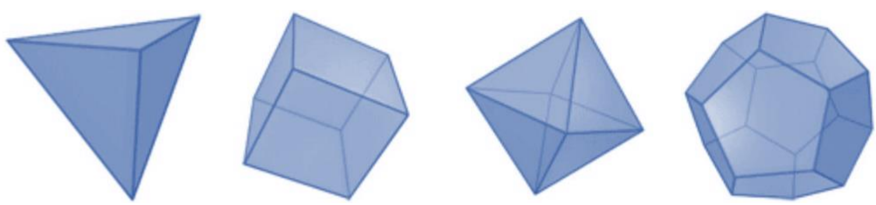
Figura 1.18 [15]



Superficie quebrada o poliédrica

Es aquella formada por diferentes polígonos planos no coplanarios vinculados de dos en dos en forma consecutiva.

Figura 1.19 [16]



Superficie mixta

Es la que está conformada por algunas regiones planas y regiones curvas.

Un plano puede estar determinado por:

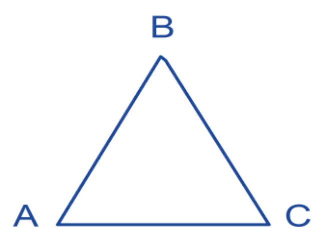
- tres puntos no colineales, ni coincidentes;
- una recta y un punto externo a ella;
- dos rectas secantes;
- dos rectas paralelas.

Representación de un plano

- Un plano puede representarse por un triángulo.

Figura 1.20

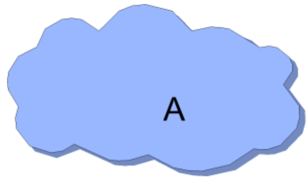
Ej.: Plano ABC



- Por una figura geométrica irregular colocando en su interior, una letra mayúscula o una letra griega.

Figura 1.21

Ej.: Plano A



- Por un cuadrilátero ubicando literales en cada uno de sus vértices, y, que para su designación se consideran los literales de los vértices opuestos de la figura.

Ej. * Plano AC

* Plano DB

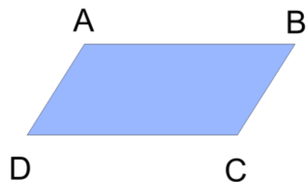
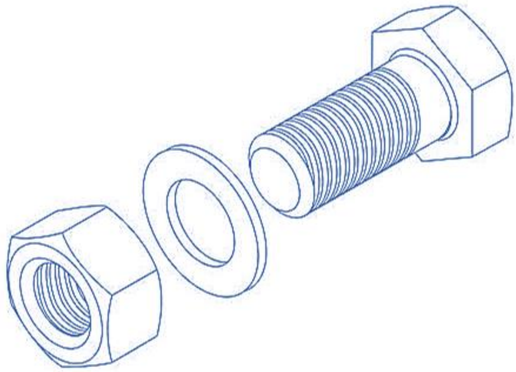


Figura 1.22

Cuerpo geométrico

Figura geométrica que es parte del espacio encerrada o limitada por superficies planas o curvas, caracterizadas por tener POSICIÓN, LONGITUD, ANCHURA y ESPESOR.

Figura 1.23 [17]



Medida

Es el resultado de comparar dos o más magnitudes, una conocida y la otra desconocida de igual especie o condición, que se toma como unidad referencial a través de un instrumento marcado de la misma condición. Geométricamente pueden presentarse de las siguientes maneras:

- en una línea la unidad de medida (segmento rectilíneo o curvilíneo): está representado por un número positivo único llamado longitud pudiendo tener como unidades de medición (mm, cm, m, pulgadas…etc.);

- un ángulo geométrico esta expresado por un número positivo que indica su abertura; la medida angular puede estar expresada en el

Sistema Sexagesimal o inglés;
Sistema Centesimal o francés;
Sistema Radial o internacional.

- la medida de un área estará representada por un número positivo único que indica la medida de una superficie. (Son unidades de área: (mm^2, cm^2, m^2 …etc.);

- la medida del espacio tridimensional ocupado por una cantidad de materia se conoce como volumen que encierra un sólido (cuerpo). (Las unidades de volumen son: mm^3, cm^3, m^3…etc.).

Lugar geométrico

Está conformado por el conjunto infinito de puntos que gozan de una determinada propiedad común, Así, por ejemplo, la mediatriz de un segmento. La bisectriz de un ángulo, un punto de la circunferencia y su centro, etc.

1.4 Generación de figuras

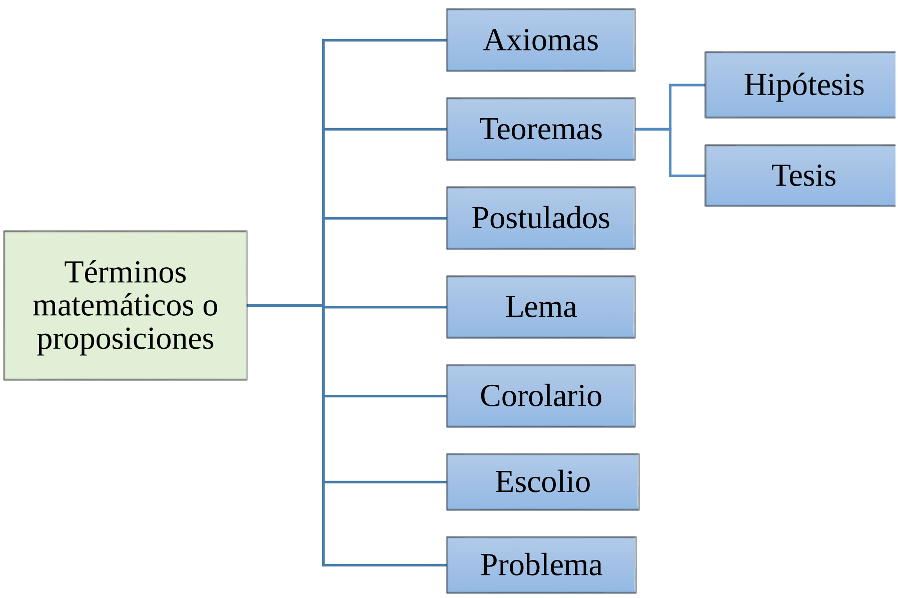
- Un punto al moverse infinitamente en una misma dirección genera una línea recta.
- Una línea al moverse infinitamente en el espacio y no sobre si misma genera un plano o una superficie.

- Una superficie al desplazarse infinitamente en el espacio y no sobre sí misma engendra un sólido; (un sólido o cuerpo geométrico está formado por el conjunto infinito de superficies o planos).

1.5 Términos matemáticos

En el inmenso campo de las matemáticas es muy común el empleo de algunos términos siendo los más importantes los siguientes [18] y [8]:

Figura 1.24



Proposición

Proposición geométrica, alcanza ser definido como un enunciado pudiendo ser calificado como verdadero o falso ya demostrado o que se ha de demostrar

Axioma

Es un enunciado matemático cuya verdad universal es tan sencilla y evidente que no necesita ser demostrado.

Teorema

Un teorema es un enunciado que para ser aceptada necesita ser demostrada mediante operaciones matemáticas. Todo teorema consta de dos partes:

- Hipótesis (H)

Es la condición de una cosa que se supone cierta para sacar de ella una consecuencia.

- Tesis (T)

Es la verdad que se requiere demostrar.

Clases de teoremas

- **Teorema recíproco**
  Teorema recíproco es el enunciado cuya hipótesis es la tesis y cuya tesis es la hipótesis del teorema dado.

- **Teorema contrario**
  Se llama así al enunciado cuya tesis es la negación de la hipótesis y la tesis del teorema dado.

- **Teorema contrarrecíproco**
  Se llama así al enunciado cuya hipótesis y cuya tesis es la negación de la hipótesis y la tesis del recíproco.

Postulado

Un postulado es un enunciado no evidente cuyas verdades se admiten sin demostración, unas veces por estar de acuerdo con nuestra experiencia e intuición y otros porque es imposible su demostración.

Lema

Es un teorema de poca importancia cuyo único objetivo es facilitar la demostración de otro más importante.

Corolario

Se llama corolario a toda consecuencia que se deduce de un teorema ya demostrado por su simple razonamiento.

Escolio

Es una observación que se realiza con la finalidad de explicar, desarrollar o delimitar un teorema ya demostrado.

Problema

Un problema matemático es una incógnita relacionada con una cierta idea matemática que debe desarrollarse a partir de otra idea del mismo tipo que hay que descubrir. Todo problema matemático está compuesto por datos e incógnitas.

Ejemplos de las principales proposiciones

Ejemplos de axiomas

- Cualquier cantidad es igual a sí misma.

  AB = AB ; x = x

- Si a cantidades iguales se suman cantidades iguales los resultados son iguales.

  Si: $5 + 3 = 5 + 3$

  $8 = 8$

- Si de cantidades iguales se substraen cantidades iguales, las diferencias son iguales.

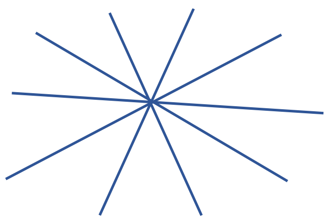
  Si: $5 = 5$

  $5 - 3 = 5 - 3$

  $2 = 2$

- Por un punto se pueden trazar infinitas rectas.

Figura 1.25



Ejemplos de teoremas

- Todos los ángulos rectos son iguales.
- Todos los ángulos llanos son iguales.
- La suma de los ángulos internos de un triángulo cualquiera es igual a dos ángulos rectos.
- En todo triángulo isósceles los ángulos opuestos a los lados iguales son iguales.
- Si dos o más rectas paralelas son cortadas por una recta transversal los ángulos correspondientes son iguales.

Postulados de Euclides [2].

- Se puede trazar una recta de un punto cualquiera a otro punto cualquiera.

- Se puede prolongar continuamente una recta finita en línea recta.
- Se puede describir una circunferencia con cualquier centro y cualquier radio.
- Todos los ángulos rectos son iguales entre sí.
- Si una recta corta a otras dos de manera que los dos ángulos internos en cada uno de sus lados sean menores que dos rectos.

Ejemplos de postulados

- Por dos puntos cualquiera puede hacerse pasar una recta y solo una recta.
- La recta es la línea de menor longitud que se puede trazar entre dos puntos.
- Toda figura puede hacerse cambiar de posición sin afectar su forma ni sus dimensiones.
- Por un punto exterior a una recta, existe una y solo una perpendicular a ella.
- Dos rectas no pueden cortarse en más de un punto.

Ejemplos de corolarios

- Por tres puntos dados cualesquiera no colineales pasa un plano y uno solo.
- Cuando dos circunferencias son tangentes entre sí el punto de contacto está en la línea de los centros o en su prolongación.
- Todo triángulo equilátero es equiángulo.
- Los ángulos opuestos de un paralelogramo son iguales y los adyacentes a un mismo lado son suplementarios.

- Todo ángulo exterior de un triángulo cualquiera es igual a la suma de las medidas de los ángulos internos no adyacentes y por lo tanto es mayor que cada uno de ellos.

Ejemplos de escolios

- Si dos circunferencias son exteriores, la distancia de los centros es mayor que la suma de sus radios.
- La perpendicular levantada en el punto medio de una cuerda, pasa por el centro del círculo y por punto medio de los arcos correspondientes.
- Todo ángulo central tiene igual medida que su arco correspondiente.
- Dos tangentes a una misma circunferencia que parten desde el mismo punto son iguales.
- Dos círculos cualesquiera son figuras geométricas semejantes.

1.6 Preguntas de autoevaluación

1. ¿Cómo podríamos entender en nuestra mente la idea de figura geométrica?
2. ¿Cuáles podrían ser las diferencias que hay entre cuerpo material y un cuerpo geométrico?
3. ¿Qué sería para Ud. una superficie de un cuerpo geométrico?
4. ¿Cómo se puede imaginar la línea partiendo de dos superficies?
5. ¿Cómo se puede obtener un punto geométrico partiendo de dos líneas?

6. ¿Cómo se forma una línea a partir de un punto?
7. ¿Cómo se forma una superficie a partir de una línea?
8. ¿Cómo se genera un cuerpo a partir de una superficie?
9. ¿Explique una definición que sea válida para todas las figuras geométricas, es decir, para los puntos, líneas, superficies y sólidos?
10. ¿Qué entiende por intersección de dos figuras geométricas?
11. ¿Cuándo se dice que dos figuras geométricas son iguales?
12. En un cuerpo geométrico se debe considerar:
    - su color
    - su tamaño y su forma
    - su peso
13. Si una superficie se mueve infinitamente forma:
    - un cuerpo
    - una línea
    - un punto
14. Para que dos o más figuras geométricas sean iguales deben tener:
    - el mismo peso
    - tener la misma forma
    - si las figuras coinciden al estar superpuestas
15. Una línea geométrica puede engendrarse por el movimiento infinito de un punto.

    Verdadero Falso
16. El espacio geométrico está formado por la atmósfera.

    Verdadero Falso

17. El espacio geométrico es ilimitado.

Verdadero Falso.

18. Cualquier figura geométrica es un conjunto de puntos.

Verdadero Falso

CAPÍTULO 2

Segmentos rectilíneos

Capítulo 2
Segmentos rectilíneos

2

"¡Aritmética! ¡Álgebra! ¡Geometría!
¡Trinidad grandiosa! ¡Triángulo luminoso!
¡El que no os ha conocido es un insensato!"

— *Conde de Lautréamont*

Objetivo

Describir las operaciones aritméticas con segmentos rectilíneos utilizando las propiedades de proporcionalidad y los métodos de demostración con la finalidad de resolver ejercicios con segmentos rectilíneos siguiendo un proceso adecuado y sencillo.

Distancia entre dos puntos

Es la longitud del segmento que los une. Ejemplo: la distancia entre los puntos A y B es el segmento representado por AB. El segmento es el camino más corto entre dos puntos [19].

2.1 Operaciones con segmentos

Las operaciones que se pueden realizar con segmentos son la suma, diferencia, producto y división, las cuales se describen a continuación [20]:

Suma de segmentos

Si sumamos gráficamente dos o más segmentos consecutivos obtendremos como resultado otro segmento cuya longitud es igual a la suma de las longitudes de todos y cada uno de los segmentos considerados.

Si tenemos varios segmentos consecutivos ubicados sobre una misma recta AB, CD, RE obtendremos el segmento AE cuyos extremos son los extremos no comunes de los segmentos planteados. Así los extremos no comunes son A y E.

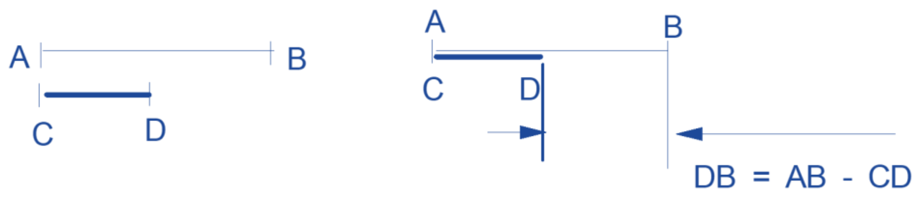
Figura 2.1

Resta o diferencia de segmentos

Si tenemos dos segmentos AB y CD se llama resta o diferencia a un tercer segmento DB tal que, sumado con el segmento de menor longitud (CD), obtendremos el segmento de mayor longitud AB.

AB = Segmento minuendo **SD = Segmento sustraendo**

Figura 2.2

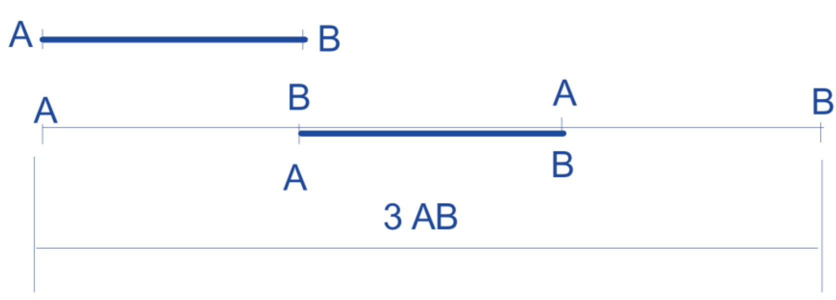


Producto de un segmento por un número natural

Gráficamente consiste en repetir tantas veces el segmento considerado por un número natural indicado.

Ejemplo: (AB) (3) = 3 AB

Figura 2.3



División de un segmento para un número natural

Se llama cociente de un segmento para un número natural, a otro segmento que multiplicado por el número considerado resulte igual al segmento inicial. Todo segmento puede dividirse en cualquier número de partes iguales.

Medida de segmentos

Medir un segmento rectilíneo es encontrar la razón entre el segmento considerado y el segmento unidad.

Segmentos iguales

Dos o más segmentos son iguales cuando los extremos del primer segmento coinciden con los extremos de los otros segmentos considerados.

2.2 Proporcionalidad de segmentos

Razón simple o razón geométrica

Es la cifra que se obtiene como cociente al dividir la medida de un segmento con la medida del otro segmento en donde ambas medidas deben estar expresadas en las mismas unidades; una razón se puede presentar como una fracción, quebrado o una división. La razón a la vez es una cantidad adimensional o una cantidad abstracta [18].

Una razón se puede representar de las siguientes maneras:

Utilizando dos puntos.	Ej.	1: 2
Utilizando una fracción común.	Ej.	1 / 5
Utilizando una cantidad decimal.	Ej.	0.50
Utilizando un porcentaje.	Ej.	50 %

***Ejemplo**:* $\frac{a}{b}$ $\frac{33m}{22m} = \frac{3}{2}$

En las razones geométricas se pueden aplicar todas las propiedades de las fracciones aritméticas.

Proporción

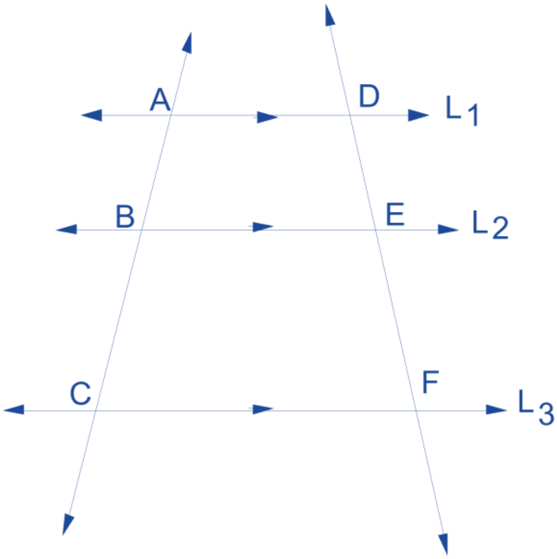
Es la igualdad que existe entre dos razones geométricas, es decir, entre dos comparaciones entre cuatro segmentos (a, b, c, d). Si tenemos dos razones a/b y c/d de existir una igual entre ellas, tendremos la proporción [19]:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Teorema de Thales

Si tres o más rectas paralelas intersecan a dos o más transversales, se determinan en ellas segmentos proporcionales. Pudiendo presentarse que [5]:

Figura 2.4



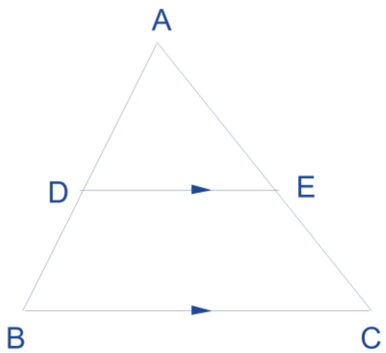
$$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{DE}{DF}$$

$$\frac{BC}{AC} = \frac{EF}{DF}$$

Ejemplo:

Figura 2.5



$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$$

Puesto que una proporción es una ecuación; para transformarla se pueden usar todas las propiedades de la igualdad.

Ejemplo: $\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}} = \frac{\mathrm{c}}{\mathrm{d}}$

De existir tres o más razones, se tiene una serie de razones idénticas.

Ejemplo: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{g}{h}$

Elementos de una proporción

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

a = primer término

b = segundo término

c = tercer término

d = cuarto término

También se puede conocer como:

Términos extremos (a, d)

Términos medios (b, c)

Términos antecedentes (a, c)

Términos consecuentes (b, d)

Propiedades de las proporciones y serie de razones

- En una proporción puede invertirse las razones sin que su igualdad cambie.

Ejemplo:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \qquad \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$$

$$\frac{25}{5} = \frac{20}{4} \qquad \frac{5}{25} = \frac{4}{20}$$

- El producto de los extremos es igual al producto de los medios.

Ejemplo:

(a)(d) = (b)(c) (25)(4) = (20)(5) 100 = 100

- En una proporción a cada antecedente se le puede sumar su respectivo consecuente o a su vez, a su consecuente sumar su respectivo antecedente sin que su igualdad cambie.

Ejemplo: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ $\qquad$ $\frac{25}{5}=\frac{20}{4}$

$\frac{\mathrm{a+b}}{\mathrm{b}}=\frac{\mathrm{c+d}}{\mathrm{d}}$ $\qquad$ $\frac{25+5}{5}=\frac{20+4}{4}$; $\qquad 6=6$

$\frac{a}{b+a}=\frac{c}{d+c}$ $\qquad$ $\frac{25}{5+25}=\frac{20}{4+20}$; $\qquad \frac{5}{6}=\frac{5}{6}$

- En una proporción a cada antecedente se le puede restar su respectivo consecuente o a su vez a cada consecuente se le resta su respectivo antecedente, manteniendo su igualdad.

- En una serie de razones, la suma de los antecedentes es a la suma de los consecuentes; como su resultado es igual al resultado de cualquiera de las razones que forman parte de la serie.

Ejemplo: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$ $\qquad$ $\frac{a+c+e}{b+d+f}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$

$\frac{25}{5}=\frac{20}{4}=\frac{50}{10}$ $\qquad$ $\frac{25+20+50}{5+4+10}=\frac{95}{19}=5$

- Que el resultado de la resta de los antecedentes con respecto a la resta de los consecuentes es igual al resultado de cualquiera de las razones.

Ejemplo:

$$\frac{25}{5} = \frac{20}{4} = \frac{50}{10} \qquad \frac{-25-20-50}{-5-4-10} = \frac{-95}{-19} = 5 \;=\; \frac{25}{5} = \frac{20}{4} = \frac{50}{10}$$

- En toda proporción, la suma de los términos de la primera razón es a su diferencia como la suma de los términos de la segunda razón es a su diferencia.

Ejemplo: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$: $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$

$$\frac{25+5}{25-5} = \frac{20+4}{20-4} \qquad \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

- En toda proporción, la suma de los términos de la primera razón es a la suma de los términos de la segunda razón, como la diferencia entre los términos de la primera razón es a la diferencia entre los términos de la segunda.

Ejemplo: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ $\frac{a+b}{c+d} = \frac{a-b}{c-d}$

$$\frac{25+5}{20+4} = \frac{25-5}{20-4} \qquad \frac{30}{24} = \frac{20}{16} \qquad \frac{5}{4} = \frac{5}{4}$$

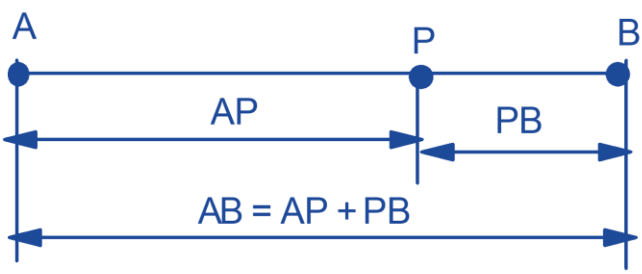
- Si en una proporción se cambian los medios entre sí, o los extremos entre sí, se obtiene una nueva proporción.

División de segmentos

División interna de un segmento

Consiste en ubicar un punto que se encuentre en el interior del segmento planteado considerado como dato, pudiendo presentarse los siguientes casos:

Figura 2.6



1.- Que la razón sea: $\frac{x}{y} > 1$

AB = segmento dato

x, y $\rightarrow$ representan los segmentos parciales obtenidos al realizar gráficamente la división.

AP = x $\rightarrow$ primer segmento parcial.

PB = y $\rightarrow$ segundo segmento parcial.

x > y

P = Punto ubicado en el interior de AB.

AB = AP + PB

Proporcionalidad entre segmentos parciales. $\frac{AP}{PB} = \frac{x}{y} > 1$

2.- Que la razón sea: $\frac{x}{y} < 1$

Figura 2.7

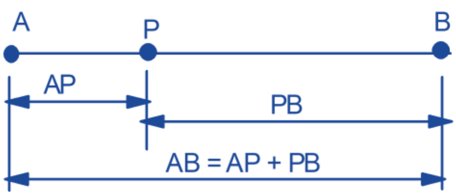


Figura 2.7

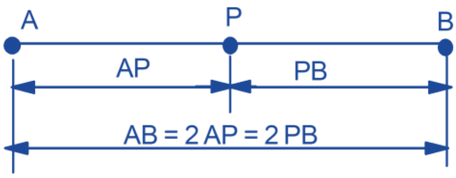
En donde x < y

Proporcionalidad entre segmentos parciales;

$$\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PB}} < 1 \qquad \frac{AP}{PB} = \frac{x}{y} < 1$$

3.- Que la razón sea: $\frac{x}{y} = 1$

Figura 2.8

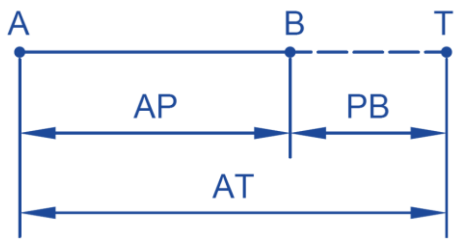


División externa de un segmento

Consiste en localizar un punto que se encuentra en el exterior del segmento, se considera los siguientes casos:

1.- Sea la razón: $\frac{x}{y} > 1$ **x > y**

Figura 2.9



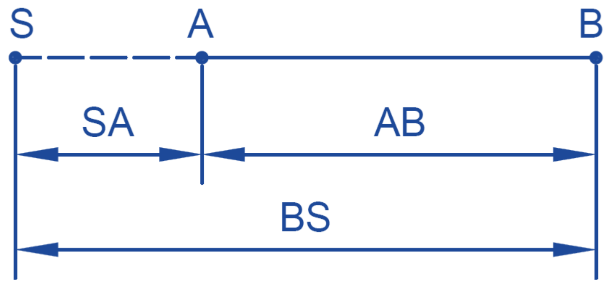
T = Punto exterior en AB

Proporción entre segmentos parciales.

$\frac{AT}{BT} > 1$ $\frac{\mathrm{AT}}{\mathrm{BT}} = \frac{\mathrm{x}}{\mathrm{y}} > 1$

2.- Sea la razón: $\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{y}} < \mathbf{1}$ **x < y**

Figura 2.10



S = Punto exterior en AB

Proporción entre segmentos parciales.

$$\frac{AS}{BS} = \frac{x}{y} < 1$$

3.- Sea la razón: $\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{y}} = \mathbf{1}$

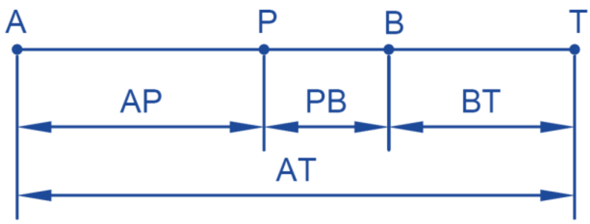
Sí: x = y "No existe solución"

División armónica

Consiste en encontrar simultáneamente un punto en el interior y exterior del segmento dado; es una combinación de los casos anteriores.

1.- **Cuando:** $\frac{x}{y} > 1$ AB = Segmento dado

Figura 2.11



P = Punto interior de AB

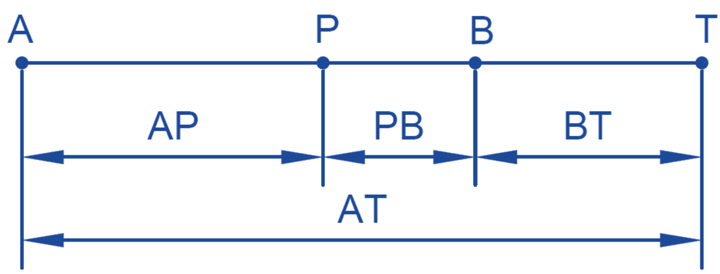
T = Punto exterior de AB

a) División interna b) División externa c) División armónica (a) = (b)

$\frac{AP}{PB} = \frac{x}{y} > 1$ $\frac{AT}{BT} = \frac{x}{y} > 1$ $\frac{AP}{PB} = \frac{AT}{BT} = \frac{x}{y} > 1$

2.- **Cuando:** $\frac{x}{y} < 1$ AB = Segmento dado

Figura 2.12



P = Punto interior de AB

S = Punto exterior de AB

a) División interna b) División externa c) División armónica (a) = (b)

$\frac{AP}{PB} = \frac{x}{y} < 1$ $\frac{AS}{BT} = \frac{x}{y} < 1$ $\frac{AP}{PB} = \frac{AS}{BS} = \frac{x}{y} < 1$

3.- Cuando: $\boldsymbol{\frac{x}{y} = 1}$

No existe solución para la división armónica.

División de un segmento en partes iguales

Cuarta proporcional

Se llama cuarta proporcional respecto a tres segmentos "a", "b", y "c" a un segmento "x" que cumple con la condición.

$$\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}} = \frac{\mathrm{c}}{\mathrm{x}} \qquad \mathrm{x} = \frac{\mathrm{b.c}}{\mathrm{a}}$$

Media proporcional

Se llama media proporcional (media geométrica) a cada término medio o a cada término extremo de una proporción cuando estos son iguales.

$$\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{x}} = \frac{\mathrm{x}}{\mathrm{b}} \qquad X = \sqrt{a.b}$$

La demostración

Es la evidencia de algo partiendo de verdades universales y evidentes. Cuya verdad se busca utilizando como recursos indispensables o necesarios, las proposiciones conocidas y que consta de cinco etapas [21]:

1. Construcción
2. Información
3. Hipótesis
4. Encadenamiento de argumentos
5. Evaluación

Tipos de demostración

Demostración directa

Consiste en aplicar todos los recursos conocidos y demostrados y que tiene estrecha relación con la proposición planteada cuya verdad se afirma.

En el proceso de una demostración directa se puede emplear dos métodos: *INDUCTIVO* y *DEDUCTIVO* que combinados apropiadamente con recursos metodológicos como la observación, experimentación, análisis, entre otros, se establece una verdad.

Método inductivo

Método científico que contiene enunciados y verdades generales partiendo de hechos y casos particulares. El método inductivo se conoce como experimental y sus pasos son:

1. Observación
2. Formulación de hipótesis
3. Verificación
4. Tesis
5. Ley
6. Teoría

Ejemplo:

Enunciado 1: La fachada de mi casa es de color blanco.
Enunciado 2: La fachada de la casa de mis padres es de color blanco.
Enunciado 3: Las casas del pueblo donde vivo son de fachada blanca.
Conclusión: Todas las casas son de color blanco.

Método deductivo

Este método se caracteriza porque va de un enunciado general a un contenido particular.

Ejemplo: Un paralelogramo es un cuadrilátero.
Un rombo es un cuadrilátero.

Demostración indirecta

Conocida como demostración por reducción al absurdo; consiste en partir de una proposición supuesta que se estructura negando la verdad propuesta a partir de la cual se obtendría una conclusión que se busca determinar.

Para ejecutar una buena demostración se debe seguir el siguiente procedimiento:

- Leer e interpretar adecuadamente el enunciado de la proposición planteada hasta comprenderlo completamente.
- Identificar y expresar de una manera sencilla y simbólica la hipótesis y la tesis.
- Trazar un *"gráfico"* lo más exacto posible considerando los datos que se dan por conocidos para poder determinar y aprovechar todo conocimiento geométrico planteado en él.
- Desarrollar la demostración, utilizando proposiciones exactas y lógicas que permitan aplicar razonamientos correctos y sólidamente fundamentados.
- No desarrollar las operaciones que se te describan con la *"imaginación",* tienes que formar "*realmente"* con tus manos y tus ojos, y con los instrumentos de dibujo y otros que sean necesarios (regla, compás, escuadras…), ya que "Las cosas se aprenden con mayor claridad con las manos."
- Explicar: resultados, conclusiones y aplicaciones importantes.

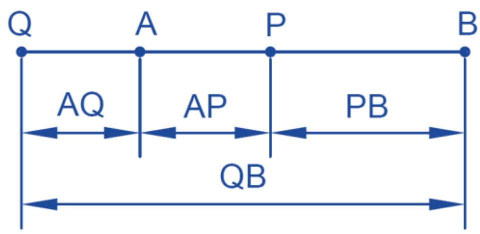
2.3 Preguntas de autoevaluación

1. ¿Los segmentos geométricos son objetos materiales?
2. ¿Cuántos segmentos pasan por dos puntos?
3. ¿Cómo se llama el camino más corto entre dos puntos?
4. ¿Cuál es definición de línea recta a partir de la definición de un segmento? ¿Es limitada la línea recta?
5. ¿Cuántas rectas pasan por dos puntos?
6. ¿En cuántos puntos pueden cortarse como máximo dos rectas?
7. ¿Cuál es la definición de una semirrecta? ¿Cómo se forma una semirrecta?
8. ¿Si se tienen dos segmentos iguales, cómo se llaman?
9. ¿Cuándo se dice que un segmento es mayor que otro?
10. ¿Cuándo se dice que dos segmentos son adyacentes?
11. ¿Cómo se realiza la suma de dos segmentos adyacentes?
12. ¿Cómo se construye el segmento diferencia?
13. Defina el cociente de un segmento para un número natural.
14. Por dos puntos se pueden trazar:
    - Dos rectas.
    - Infinitas rectas.
    - Una sola recta.
    - Ninguna recta.
15. Dos segmentos adyacentes son los que:
    - Tienen sus extremos confundidos.
    - Tienen un extremo común y los otros dos en semirrectas opuestas.
    - Pasan por un mismo punto.
16. El producto de un segmento por un número es otro segmento.
17. El cociente de un segmento para un número es otro número.

2.4 Ejercicios resueltos

Ejercicio 1.1. Si los puntos P y Q dividen armónicamente al segmento $\overline{AB}$ en relación $\frac{x}{y} < 1$. ¿Cuál es la relación $\frac{x}{y}$ sí; $\overline{AB} = 820$ unidades y $\overline{PQ} = 350$ unidades?

Figura 2.13



Solución:

$$a.- \quad \frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{QA}}{\overline{QB}} = \frac{x}{y} < 1 \qquad por\ def.\ división \quad armónica$$

$$b.- \quad \overline{QA} = \overline{QB} - \overline{AB}$$

$$c.- \quad \overline{QB} = \overline{PQ} + \overline{PB}$$

$$d.- \quad \overline{AB} = \overline{AP} + \overline{PB}$$

(b), (c) y (d) en (a)

$$\frac{AB - \overline{PB}}{\overline{PB}} = \frac{QP + PB - AB}{QP + PB} \qquad : \qquad \frac{820 - \overline{PB}}{\overline{PB}}$$

$$= \frac{350 + \overline{PB} - 820}{350 + \overline{PB}}$$

$$Asumimos\ que: \quad \overline{PB} = X$$

$2X^2 - 940X - 287000 = 0$

$X_1 = 614.54\ unidades = \overline{PB} \qquad (e)$

$\overline{AP} = \overline{AB} - \overline{PB} \qquad \Rightarrow \qquad \overline{AP} = (820 - 614.54)\ unidades$

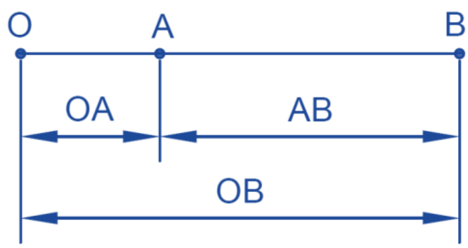
$\overline{AP} = 205.46\ unidades \qquad (f)$

$(e)\ y\ (f)\ en\ (a)$

$\frac{205.46}{614.54} = \frac{x}{y} \qquad * \frac{x}{y} < 1 = 0.33 \quad LQQD.$

Ejercicio 1.2. Si O, A y B son colineales demostrar que: $OA^2 + OB^2 = AB^2 + 2(OA)(OB)$.

Figura 2.14



Solución:

$\overline{OA} + \overline{AB} = \overline{OB}$

$(\overline{OA} + \overline{AB})^2 = \overline{OB}^2$

$\overline{OA}^2 + 2(OA)\overline{AB} + \overline{AB^2} = \overline{OB}^2$

$\overline{OA}^2 + 2(OA)(\overline{\overline{OB}} - OA) + \overline{AB^2} = \overline{OB}^2$

$* \ \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 = \overline{AB^2}\overline{OA}^2 + 2(\overline{OA}..\overline{OB}) \qquad LQQD.$

Ejercicio 1.3. Los segmentos a, b, c son proporcionales a 7, 5 y 6 respectivamente si: a + b + c = 12 unidades. Calcular las medidas de los segmentos a, b y c.

Solución:

$$\frac{a}{7}=\frac{b}{5}=\frac{c}{6}=\frac{a+b+c}{7+5+6} \qquad propiedad\ de\ las\ proporciones$$

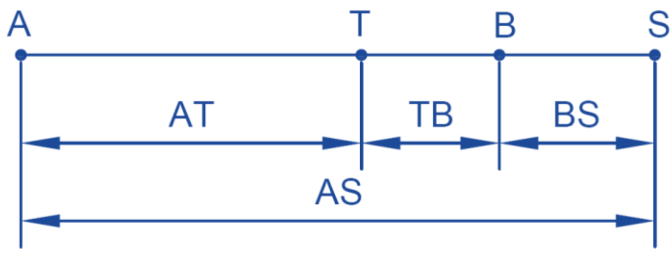
$$\frac{12\ unidades}{18}=\frac{a}{7} \quad : \quad a=\frac{(12)(7)}{18} \quad : \quad a = 4.66\ unidades \qquad LQQD.$$

$$\frac{12\ unidades}{18}=\frac{b}{5} \quad : \quad b=\frac{(12)(5)}{18} \quad : \quad b = 3.33\ unidades \qquad LQQD.$$

$$\frac{12\ unidades}{18}=\frac{c}{6} \quad : \quad c=\frac{(12)(6)}{18} \quad : \quad c = 4\ unidades \qquad LQQD.$$

Ejercicio 1.4. Si los puntos T y S dividen armónicamente al segmento AB donde ($\frac{x}{y} > 1$), Calcular AB si: TE .BS = 28 unidades^2 y BS – TB = 7 unidades.

Figura 2.15



Solución:

$(TE)(BS) = 28\ unidades^2 \quad por\ hipótesis \quad ; \quad TB = \frac{28}{BQ} \quad (a)$

$BS - TB = 7\ unidades \quad (b)$

$\frac{AT}{TB} = \frac{AS}{BS} = \frac{x}{y} > 1 \quad por\ definición\ de \rightleftarrows\ división\ armonica \quad (c)$

$(a)\ en\ (b)$

$BS - \frac{28}{BS} = 7 \quad ; \quad BS^2 - 7BS - 28 = 0 \quad ; \quad BS = 9.84\ unidades \quad (d)$

$(d)\ en\ (b)$

$9.84\ unidades - TB = 7 \qquad ; \qquad TB = 2.84\ unidades \quad (e)$

$(d)\ en\ (b)$

$$\frac{AT+TB}{TB} = \frac{AS+BS}{BS} \qquad ; \qquad \frac{AB}{TB} = \frac{AB+2BS}{BS} \qquad AB$$

$$= \frac{2.TB.BS}{BS-TB}$$

$* \quad AB = 7.98\ unidades \quad LQQD$

2.5 Ejercicios propuestos

1.- Sobre una recta se ubican consecutivamente los puntos, A, B, C y D tal que: AC = a unidades, BC = b unidades, y AD^2 = (AC) (BD), calcular la longitud de CD, sabiendo además que:

AC + BC = 2 unidades *Resp. "a" unidades*

2. - Sobre una recta se encuentran ordenadamente los puntos A, B, C, D, y E; tal que:

AB = BC, BD = DE y BE – AC = 14 u. Calcular la longitud de CD.

Resp. 7u

3.- En una recta se encuentran los puntos consecutivos A, B, y C. Si M es el punto medio de AB que mide 1 m., calcular la longitud de BC, si BC^2 = (8AM) (AC) Resp. *1 m*.

4.- En una recta se ubican los puntos consecutivos A, B, C y D; tal que: AB + CD = 2 BC y AC + CD = 21m. Calcular BC. *Resp. 7m*

5.- Sobre una línea recta se ubican los puntos consecutivos A, B, C y D; siendo M, N, y P puntos medios de AB, BC y CD respectivamente. Si: AN + MC + BP + ND = 27m y NC = 2m. Hallar AD *Resp. 14m*

6.- En una línea recta se ubican los puntos A, B y C. siendo M, N y Q, puntos medios de AB, MC y BC respectivamente; si: NC – AM = 10m. Calcular QN. *Resp. 5m*

7.- En una línea recta se encuentran los puntos consecutivos A, B, C y E sabiendo que:

AC + BD + CE = 324m y además que: 11BD = 7AE. Calcular AE. *Resp. 198m*

8.- Sobre una línea recta se encuentran los puntos consecutivos A, B, C y D. Si:

9 (CD. BC) = (BC. CD) (AC / AB) - (CD / AC) = 1m. Calcular AC. *Resp. 9m*

9.- Sobre una recta se consideran los puntos consecutivos A, B, C y D si M y N son puntos medios de AC y BD respectivamente y además AB + CD = 13m. Calcular MN. *Resp. 605m*

10.- Sobre una recta se ubican los puntos consecutivos A, B, M, y C; sabiendo que M es punto medio de BC. Si $AB^2 + AC^2 = 8m^2$. Calcular $AM^2 + BM^2$. <u>*Resp. $4m^2$*</u>

CAPÍTULO 3

Ángulos en el plano

Capítulo 3
Ángulos en el plano

3

“Frente a un obstáculo, la línea más corta entre dos puntos puede ser una línea curva”

— B. Bretch

Objetivo

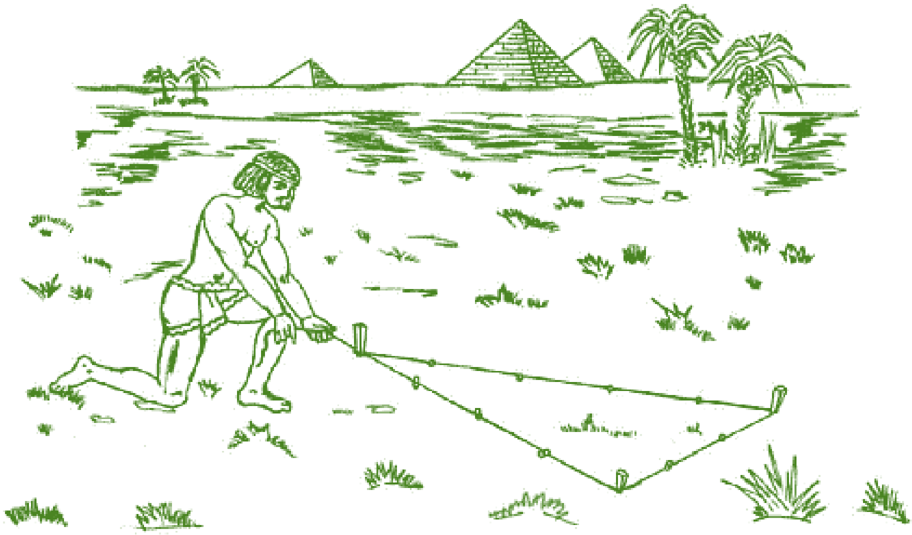
Desarrollar la capacidad de analizar, pensar y resolver casos que involucren el conocimiento geométrico aplicado a los ángulos en el plano, reconociendo los tipos de ángulos, sus unidades de medida y aplicando los teoremas de ángulos planos para la resolución de ejercicios.

3.1 Reseña histórica

La escuadra de los arquitectos egipcios

En todas partes, en el mundo antiguo, se conocía un método muy simple para formar ángulos rectos de 90º. Según una leyenda, los sacerdotes egipcios trazaban ángulos rectos juntando tres pedazos de cuerda de 3, 4 y 5 unidades de longitud respectivamente, y fijando la cuerda por los nudos en el terreno mediante estacas de tal manera que la cuerda quedase tensa [22].

Figura 3.1 [23]



Se formaba así un triángulo que tenía un ángulo recto en la intersección de los lados 3 y 4. De tal escuadra perfecta, los sacerdotes arquitectos se servían para sus construcciones maravillosas y colosales; a partir de este principio se desarrollaron infinitas aplicaciones.

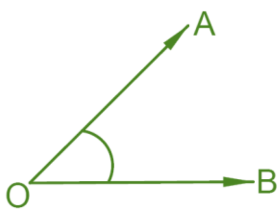
Ejemplo: un egipcio utilizó este método para determinar la dirección de la línea Este - Oeste. Una vez determinada la línea Norte – Sur, encontraba la posición de la otra, formando un triángulo.

3.2 Ángulos

Ángulo plano

Es una figura formada por dos rectas, semi-rectas, rayos que se cortan en un punto; las rectas, semi-rectas ó rayos se llaman lados y el punto común de origen se llama vértice. A un lado de un ángulo, se le conoce como lado inicial que es el que generalmente permanece fijo, y al otro lado, se le llama lado terminal que es el que gira en sentido horario o antihorario determinando la magnitud del ángulo [8].

Figura 3.2



$\overrightarrow{OB} = Lado\ inicial$

$O =$ Vértice

$\overrightarrow{OA} = Lado\ final\ o\ terminal$

Notación de los ángulos [20]

Un ángulo se lo representa de varios modos:

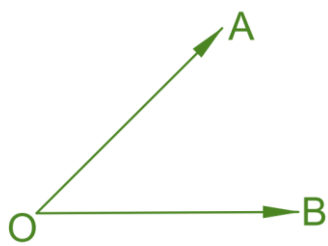
- Anteponiendo la letra "m" a todos estos símbolos que significa medida.

Ejemplo:

1 m ∠ ó 1 m ∠AOB

- Utilizando tres letras, una que corresponde a cada lado y otra en el vértice, colocando siempre la letra del vértice en el medio de las otras dos.

Figura 3.3

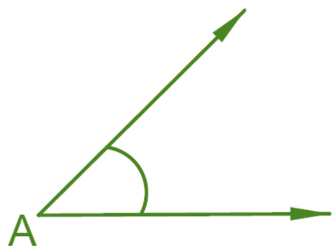


1m∠ AOB ó 1m ∠ AOB

- Con una sola letra en el vértice.

Ejemplo: ángulo A

Figura 3.4



- Se puede utilizar también una letra mayúscula, un número, una letra del alfabeto griego, una señal colocada en el interior, fuera o sobre el arquito descrito entre los lados.

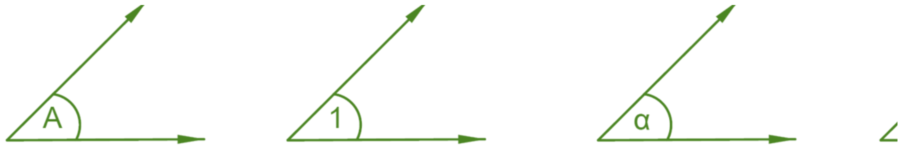


Figura 3.5

Observación: cuando dos o más ángulos tienen el mismo vértice, NUNCA debe usarse una sola letra para referirse a uno de ellos.

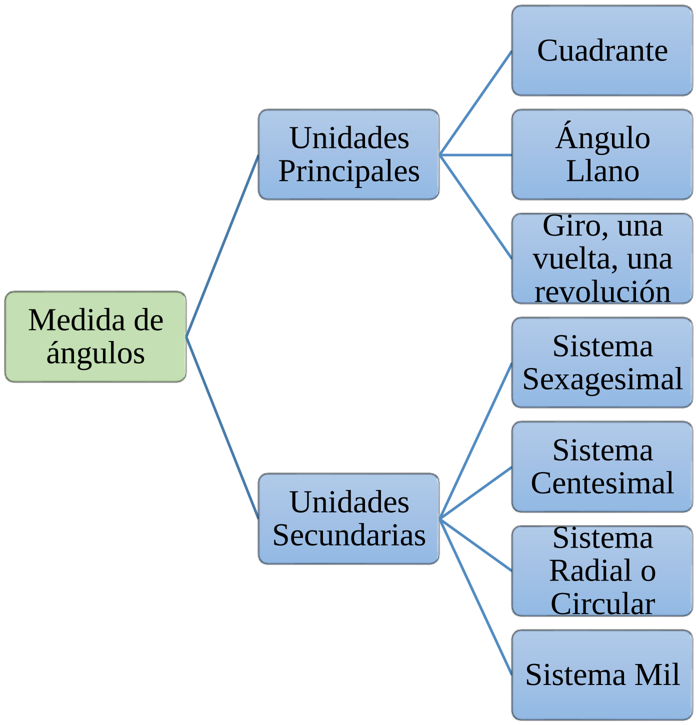
Alfabeto griego

SÍMBOLO	NOMBRE		SÍMBOLO	NOMBRE
α	alfa		ή	eta
β	beta		θ	theta
γ	gamma		ί	iota
δ	delta		χ	kappa
ε	èpsilon		λ	lamda
ζ	zeta		μ	my
ν	ny		τ	tau
ξ	xi		υ	ípsilon
O	ómicron		φ	phi
π	pi		χ	ji
ρ	rho		ψ	psi
σ ó Σ	sigma		ω	omega

3.3 Medida de ángulos

Medir un ángulo es compararlo con otro ángulo que se toma por unidad [5].

Figura 3.6



Unidades principales:

- Cuadrante = mitad del ángulo llano.
- Ángulo llano = mitad del giro.
- Giro = ángulo completo.

Unidades secundarias [20]**:**

Sistema sexagesimal o Sistema inglés

La unidad de medida es llamada "Grado Sexagesimal" y es igual a 360^{ava} partes de la circunferencia o círculo; cada grado es dividido en 60 partes llamados "minutos" y cada minuto es dividido en 60 partes llamados "segundos", es decir:

- 1 vuelta = 360^0 (grados)
- 1 grado = 60´ (minutos) = 3600"
- 1 minuto = 60" (segundos

Sistema centesimal o Sistema francés

La unidad de medida es llamada **"Grado Centesimal"** y es igual a 400^{ava} partes de la circunferencia o círculo; cada grado es dividido en 100 partes y se llaman "minutos"; cada minuto está dividido en 100 partes y se llaman "segundos", es decir:

- 1 vuelta = 400^g (grados)
- 1 grado = 100^m (minutos) = 10000^s
- 1 minuto = 100^s (segundos)

Los grados centesimales se representan utilizando una letra "g" como exponente en la medida del ángulo, los minutos con una "m", y los segundos con una "s".

Sistema radial o Sistema circular

En este sistema se usa como unidad el ángulo llamado **"Radián".** Un radián es el ángulo cuyos lados son radios y comprenden un ángulo cuya longitud es igual al radio de la circunferencia.

En geometría, la longitud de una circunferencia de radio "R" se conoce como perímetro: $P = 2\pi.R$

El radio en trigonometría es de una longitud igual a la unidad unitaria, entonces la longitud de la circunferencia valdrá 2π radianes.

Sistema Mili

En este sistema, la circunferencia trigonométrica se divide en 6400 partes, cada una de las cuales se denomina **"MILI"**; este sistema es muy utilizado en el área militar, en sus instrumentos de navegación.

El MILI corresponde a la medida del ángulo central, cuyos lados (radios) subtienden un arco de longitud igual a una de las 6400 partes en que este sistema divide a la circunferencia.

Relación entre sistemas de medida:

$$\frac{S}{180°} = \frac{C}{200^g} = \frac{R}{\pi} = \frac{M}{3200}$$

Donde:

S = grados Sexagesimales
C = grados Centesimales
R = Radianes
M = grados Mili

El número $\boldsymbol{\pi}$ se define como la razón entre la longitud de una circunferencia y su diámetro.

Donde: **"P"** es la longitud de cualquier circunferencia, de radio **R**: → $\frac{P}{2R} = \pi$ (constante)

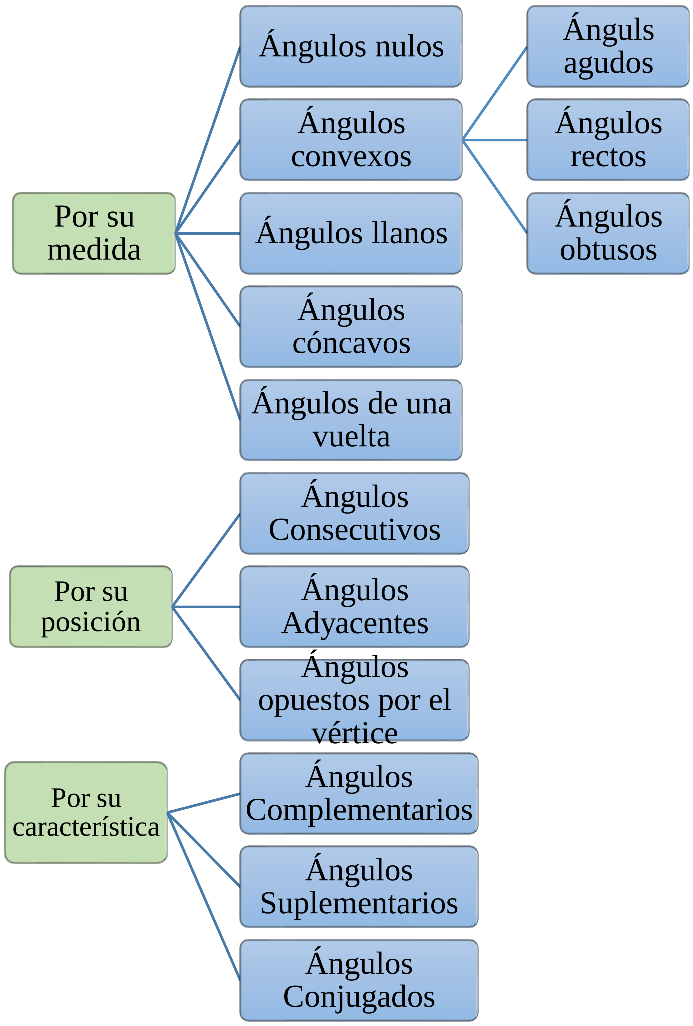
Equivalencias angulares entre los sistemas de medida

SISTEMA SEXAGESIMAL	SISTEMA CENTESIMAL	SISTEMA CIRCULAR	SISTEMA MIL
$0°$	0^g	0 radianes	0 milis
$45°$	50^g	$\frac{\pi}{4}$ radianes	800 milis
$90°$	100^g	$\frac{\pi}{2}$ radianes	1600 milis
$180°$	200^g	π radianes	3200 milis
$270°$	300^g	$\frac{3\pi}{2}$ radianes	4800 milis
$360°$	400^g	2π radianes	6400 milis

3.4 Clasificación de los ángulos

Los ángulos se pueden clasificar según su medida, según su posición y por alguna característica específica [2], [8].

Figura 3.7



Ángulos nulos

Son aquellos ángulos que son iguales a 0 grados.

Ángulos convexos

Son aquellos ángulos que son mayores de 0° pero menores de dos ángulos rectos.

Ángulos agudos

Son aquellos ángulos que son menores de un ángulo recto.

Ángulos rectos

Son aquellos ángulos que son iguales a un ángulo recto, donde sus lados son dos rectas perpendiculares.

Ángulos obtusos

Son aquellos ángulos que son mayores de un ángulo recto pero menores de dos ángulos rectos.

Ángulos llanos

Son ángulos iguales a dos ángulos rectos sus lados son dos rectas linealmente opuestas.

Ángulos cóncavos

Son aquellos ángulos mayores de dos ángulos rectos y menores de cuatro ángulos rectos.

Ángulos de una vuelta

Son los ángulos iguales a cuatro ángulos rectos.

Ángulos complementarios

Son una pareja de ángulos que sumados dan un ángulo recto.

Ángulos suplementarios

Son una pareja de ángulos convexos que sumados sus medidas son iguales a dos ángulos rectos.

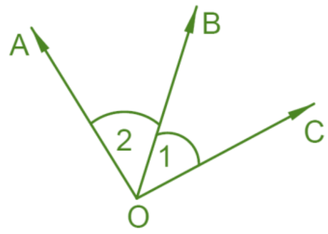
Observaciones generales

- Todo ángulo agudo tiene complemento y suplemento.
- Los ángulos obtusos tienen un solo suplemento.
- Si: θ^o es la medida de un ángulo agudo, entonces las medidas de su complemento y su suplemento, son respectivamente iguales a: ($1\angle$recto - $1m\angle\,\theta^o$) y ($2\angle$ rectos - $1m\angle\,\theta^o$).
- Los complementos de dos ángulos iguales son iguales.
- Los suplementos de dos ángulos iguales son iguales.
- Dos ángulos que tienen el mismo complemento o suplemento son iguales.

Ángulos consecutivos

Son aquellos ángulos que se caracterizan por tener dos elementos comunes, un lado y un vértice y sus medidas se encuentran a uno y otro lado del lado común.

Figura 3.8



OB lado común

O vértice común

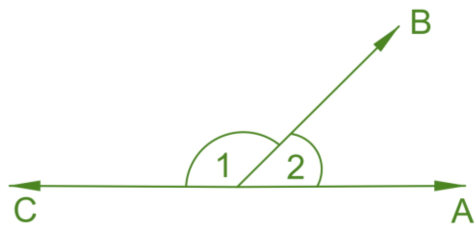
1m∠ BOC 1m∠AOB

1m∠ 1 1m∠ 2

Ángulos adyacentes

Son dos ángulos consecutivos cuyos lados no comunes son colineales o alineados.

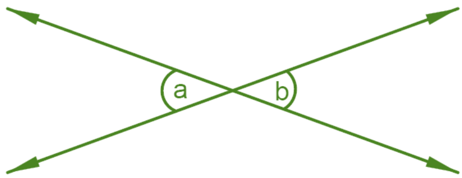
Figura 3.9



Ángulos opuestos por el vértice

Son aquellos ángulos cuyos lados de uno, son las prolongaciones en sentido contrario de los lados del otro.

Figura 3.10



1m∠a y 1m∠b

ángulos opuestos por

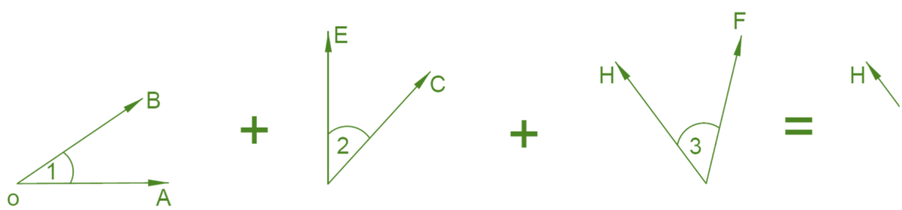
el vértice

3.5 Operaciones con ángulos

Suma de ángulos

La suma de ángulos se puede realizar de dos maneras: gráfica y analítica. De manera gráfica, la suma se puede realizar entre dos o más ángulos ubicando los ángulos considerados en posición de consecutivos, esto es compartiendo un mismo vértice y un lado para obtener otro [24].

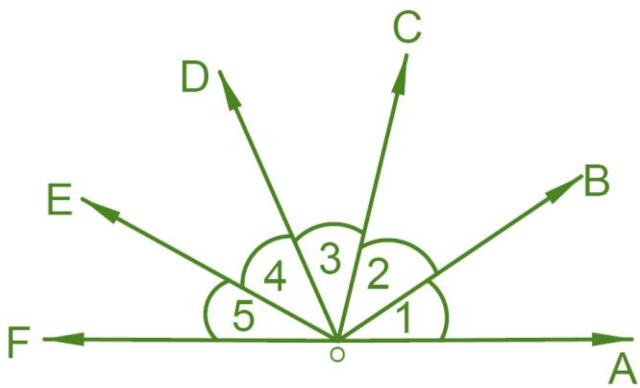
Figura 3.11



Propiedades de la suma de ángulos

- La suma de ángulos consecutivos de igual vértice que se forma en uno de los semiplanos que determina una recta es igual a dos ángulos rectos.

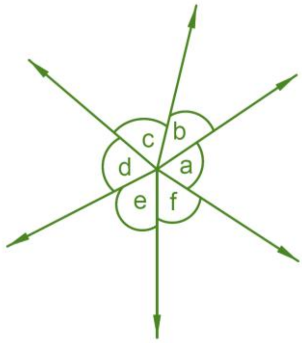
Figura 3.12



$1m\angle 1 + 1m\angle 2 + 1m\angle 3 + 1m\angle 4 + 1m\angle 5 = 180°$

- La suma de todos los ángulos consecutivos que se pueden formar alrededor de un punto es igual a cuatro ángulos rectos (360°).

Figura 3.13



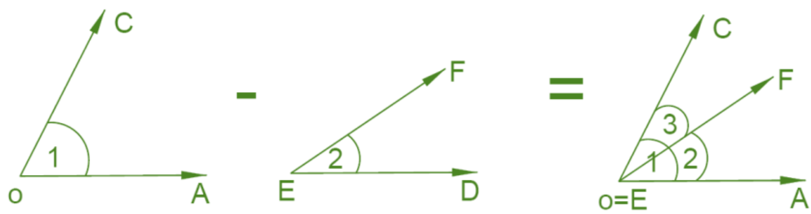
$$1m\angle a + 1m\angle b + 1m\angle c + 1m\angle d + 1m\angle e + 1m\angle f = 360°$$

Resta de ángulos

Se llama resta o diferencia de dos ángulos, al ángulo obtenido (ángulo diferencia) que sumado con el ángulo menor se obtiene un ángulo igual al mayor.

El ángulo mayor se llama minuendo y el ángulo menor substraendo.

Figura 3.14



$$1m\angle COA \quad - \quad 1m\angle FED \quad = \quad 1m\angle COF$$

Minuendo - Substraendo = Ángulo diferencia

División de un ángulo para un número natural

La división de un ángulo por un número natural consiste en encontrar otro ángulo tal que, multiplicado por el número, se obtiene un ángulo igual al original.

Un ángulo siempre es posible dividirlo en cualquier número de partes iguales.

Producto de un ángulo por un número natural

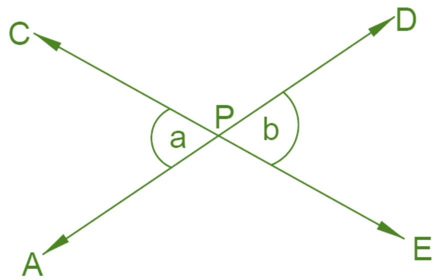
Multiplicar un ángulo por un número natural cualquiera consiste en sumar tantas veces el ángulo dado según se indique el número natural planteado.

3.6 Teoremas de ángulos

Los teoremas de los ángulos más importantes se describen a continuación [20], [19]:

1.- Los ángulos opuestos por el vértice son iguales.

Figura 3.15



$$1m\angle a + 1m\angle b + 1m\angle c + 1m\angle d + 1m\angle e + 1m\angle f = 360°$$

T) $1m\angle a = 1m\angle b$

$1m\angle CPA + 1m\angle CPD = 1m\angle APD = 180°$ (ángulos suplementarios)

(a)

$1m\angle CPD + 1m\angle DPE = 1m\angle CPE = 180°$ (ángulos suplementarios)

(b)

(a) = (b)

$1m\angle CPA + 1m\angle CPD = 1m\angle CPD + 1m\angle DPE$

$1m\angle CPA = 1m\angle DPE$

$\mathbf{1m\angle a = 1m\angle b}$

2.- Las bisectrices de los ángulos opuestos por el vértice son coloniales.

Observación

Recordar que existe la bisectriz de un segmento y la bisectriz de un ángulo.

Bisectriz de un segmento

Es una recta que pasa por el punto medio de un segmento.

Bisectriz de un ángulo

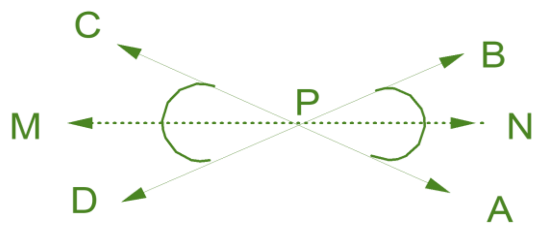
Es una recta que divide a un ángulo en dos ángulos parciales exactamente iguales.

H) 1m $\angle$ CPD, 1m $\angle$ BPA (ángulos opuestos por el vértice)

MN bisectriz de los ángulos CPD y BPA

T) 1m $\angle$ MPN = 1m $\angle$ NPM

Figura 3.16



1m $\angle$ MPC + 1m $\angle$ CPB + 1m $\angle$ BPN = 180° (suma de ángulos consecutivos) (a)

$1m \angle NPA + 1m \angle APD + 1m\angle DPM = 180°$ (suma de ángulos consecutivos) (b)

Como:

$1m\angle CPB = 1m\angle APD$ (por ser opuestos por el vértice)

$1m\angle MPC = 1m \angle DPM$ (por definición de bisectriz de ángulo)

$1m \angle BPN = 1m \angle NPA$

(a) = (b)

$1m \angle MPC + 1m\angle CPB + 1m\angle BPN = 1m\angle NPA + 1m \angle APD + 1m \angle DPM$

$$\mathbf{180° = 180°}$$

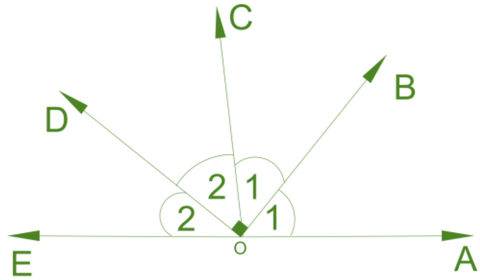
3.- Las bisectrices de dos ángulos adyacentes forman un ángulo recto.

H) BO biseca. $\angle COA$

T) $1m\angle DOC + 1m\angle COB$ = 1 ángulo recto.

DO biseca. $\angle COE$

Figura 3.17



$1m \angle COA = 2\ m \angle 1$; $1m \angle COE = 2\ m \angle 2$

$1m\angle COA + 1m\angle COE = 1m \angle EOA = 180°$

$2m \angle 1 + 2m\angle 2 = 180°$ $\Rightarrow$ $\mathbf{1m\angle 1 + 1m\angle 2 = 90°}$

3.7 Rectas especiales

Rectas paralelas

Rectas paralelas son las que estando en el mismo plano y prolongándolas indefinidamente en ambos sentidos, no se cortan ni en uno ni en el otro sentido [7].

Notación:

Se indica que dos rectas "a" y “b" son paralelas escribiendo:

$\vec{a}\ II\ \vec{b}$

Caracteres del paralelismo

- **Carácter idéntico**

  Toda recta es paralela a sí misma.

  a ll a

- **Carácter recíproco**

  Si una recta es paralela a otra, esta es paralela a la primera.

  a ll b $\Rightarrow$ b ll a

- **Carácter transitivo**

  Dos rectas paralelas a una tercera son paralelas entre sí.

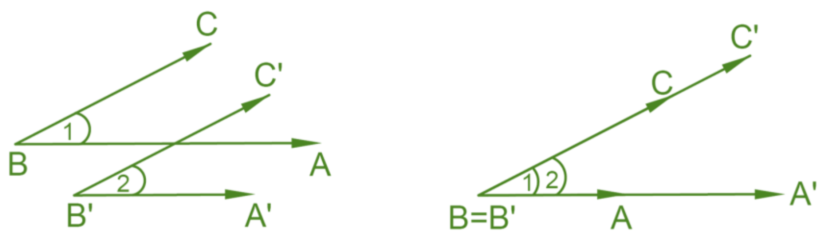
Si: a ll b ; b ll c $\Rightarrow$ a ll c

Teoremas de los ángulos que tienen sus lados paralelos [25]**.**

1.- Dos ángulos agudos que tienen sus lados respectivamente paralelos entre sí y dirigidos en el mismo sentido son iguales.

Figura 3.18

BA ll B'A' ^ BC ll B'C'

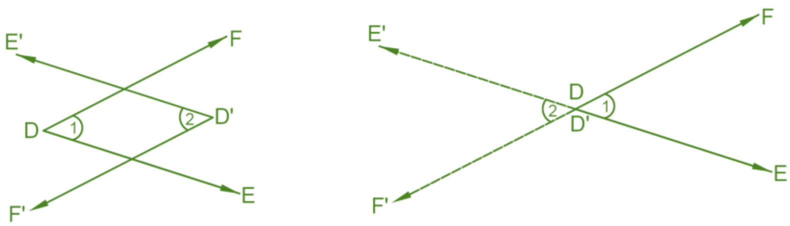


1m ∠ ABC = 1m ∠ A'B'C'

2.- Dos ángulos obtusos que tienen sus lados respectivamente paralelos entre sí y dirigidos en sentido contrario son iguales.

Figura 3.19

DE ll D'E' DF ll D'F'

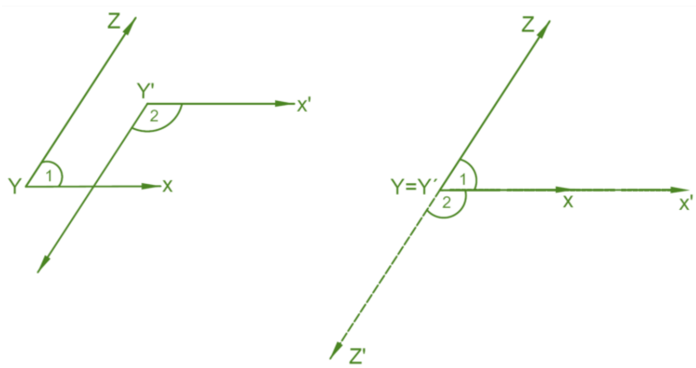


1m ∠EDF = 1m ∠ E'D'F´

3.- Si dos ángulos tienen sus lados respectivamente paralelos, dos de ellos dirigidos en el mismo sentido y los otros dos en sentido contrario, dichos ángulos son suplementarios.

Figura 3.20

YX ll Y'X' ; YZ ll Y'Z'



1m∠ XYZ + 1m ∠ X' Y' Z' = 180°

Rectas perpendiculares

Dos rectas son perpendiculares cuando al cortarse entre sí forman cuatro ángulos iguales, cada uno es igual a un ángulo recto [1].

El símbolo de perpendicular es $\perp$.

Si dos rectas que se cortan no son perpendiculares se dice que son oblicuas.

Carácter de perpendicularidad

Carácter recíproco de la perpendicularidad

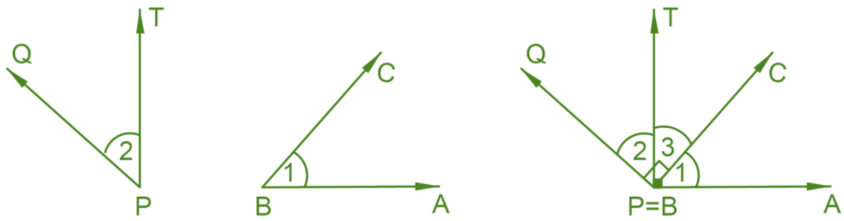
Si una recta es perpendicular a otra, esta es perpendicular a otra, esta es perpendicular a la primera.

Teoremas de los ángulos que tienen sus lados perpendiculares [26]

1.- Dos ángulos agudos cuyos lados son respectivamente perpendiculares entre sí son iguales.

Figura 3.21

$BC \perp PQ \qquad BA \perp PT$



$1m\angle 1 + 1m\angle 3 = 90°$ (ángulos complementarios) (a)

$1m\angle 2 + 1m\angle 3 = 90°$ (ángulos complementarios) (b)

(a) = (b)

$1m\angle 1 + 1m\angle 3 = 1m\angle 2 + 1m\angle 3$

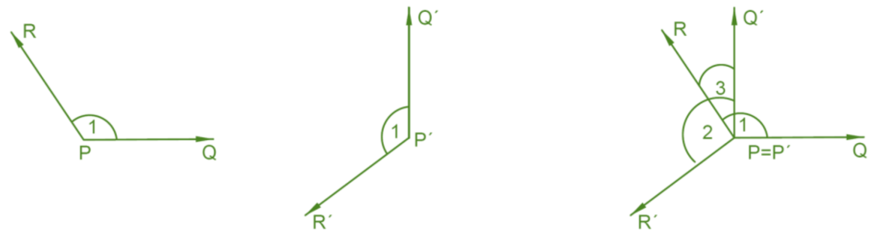
$1m\angle 1 = 1m\angle 2$

$1m\angle ABC = 1m\angle TPQ$

2.- Dos ángulos obtusos que tienen sus lados respectivamente perpendiculares son iguales.

Figura 3.22

$PQ \perp P'\,Q'$ $\qquad$ $PR \perp P'\,R'$



$1m\angle\ R'P'Q´ - 1m\ \angle 3 = 90°$ (a)

$1m\angle\ R'P'Q' - 1m\angle 3 = 90°$ (b)

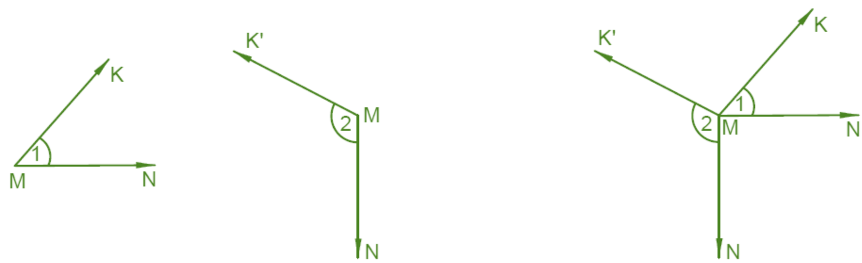
(a) = (b)

$1m\angle\ R'P'Q - 1m\ \angle 3 = 1m\ \angle\ R'P'Q' - 1m\ \angle 3$

$\mathbf{1m\angle RP'Q = 1m\angle R'P'Q'}$

3.- Dos ángulos, uno agudo y otro obtuso, que tienen sus lados respectivamente perpendiculares son suplementarios.

Figura 3.23



1m∠ NMK = 1m∠1= ángulo agudo

1m∠N'M'K' = 1m∠ 2 = ángulo obtuso

MN ⊥ M' N' : MK ⊥ M' K'

1m∠N'MN+ 1m∠ NMK + 1m∠ KMK' + 1m∠ K¨MN'= 360° (suma de áng. consecutivos)

1m∠N'MN = 1m∠ KMK' = 90°

1m∠ NMK + 1m∠ N' M' K' = 180° LQQD.

Recta transversal o secante

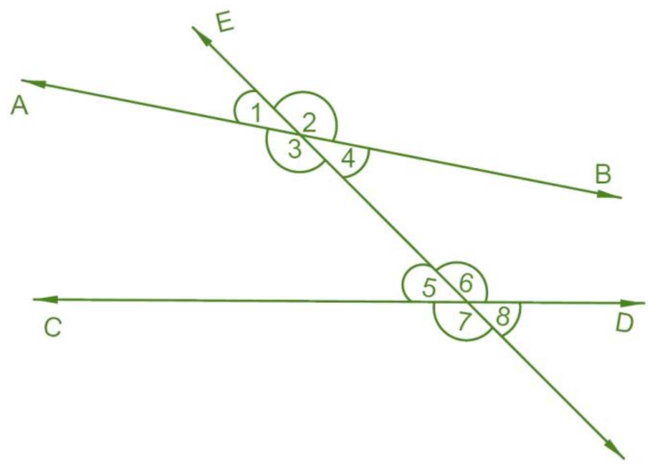
Se llama transversal o secante de dos o más rectas a otra recta que las corta.

Ángulos formados por dos rectas cortadas por una transversal [2]

Toda transversal que corta a dos rectas cualesquiera forma con ella ocho ángulos, cuatro en cada punto de intersección, cuatro internos y cuatro externos.

Figura 3.24

AB ; CD rectas cualesquiera   EF = recta transversal



Ángulos internos

Son los ángulos comprendidos entre las rectas AB y CD a un lado y otro lado de la transversal.

Ej. (3, 4, 5, 6)

Ángulos internos

Son los que se encuentran fuera de las rectas cualesquiera a ambos lados de la transversal.

Ej. (1, 2, 7, 8)

Ángulos internos

Son ángulos situados al mismo lado de la transversal o en el mismo semiplano de los dos en que esa transversal divide el plano entero.

Ej. (1, 3, 5, 7); (2, 4, 6, 8)

Ángulos internos

Son dos ángulos colaterales, uno interno y otro externo y no adyacentes.

Los lados de los ángulos correspondientes forman una letra "F" mayúscula.

Ej. (1, 5); (3, 7) ; (2, 6) ; (4,8)

Ángulos internos

Son dos ángulos internos no colaterales ni adyacentes.

Los lados de dos ángulos alternos internos forman una "Z" mayúscula.

Ej. (3, 6) ; (4, 5)

Ángulos alternos externos

Son dos ángulos externos no colaterales ni adyacentes.

Ej. (2, 7) ; (1, 8)

Ángulos colaterales internos

Son dos ángulos cuando son colaterales internos.

Ej. (4, 6) ; (3, 5)

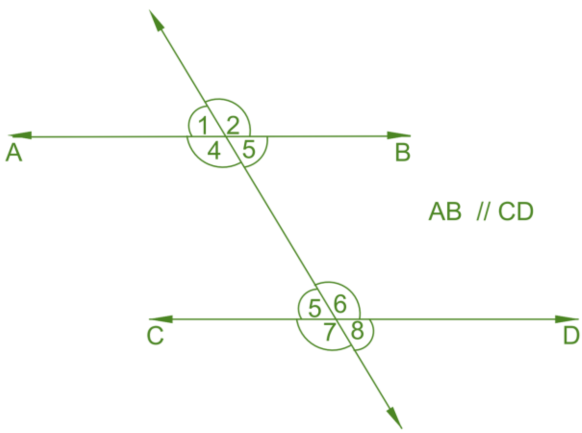
Ángulos colaterales externos

Son dos ángulos cuando son colaterales y externos.

Ej. (1, 7) ; (2, 8)

Ángulos formados entre dos rectas paralelas cortadas por una secante o transversal [20]

Figura 3.25



Los ángulos que se forman entre dos rectas paralelas y una transversal son los mismos que el caso anterior, con la particularidad de que presentan las siguientes características:

1.- los ángulos alternos internos son iguales;
2.- los ángulos alternos externos son iguales;
3.- los ángulos correspondientes son iguales;
4.- los ángulos colaterales internos son suplementarios;
5.- los ángulos colaterales externos son suplementarios.

3.8 Preguntas de autoevaluación

1.- ¿Qué es un ángulo llano?
2.- ¿Qué es un ángulo completo o ángulo de un giro?
3.- ¿Qué requisitos deben cumplir dos ángulos para ser consecutivos?¿Y para ser adyacentes?
4.- ¿Qué son dos ángulos opuestos por el vértice?
5.- ¿Cómo se define el ángulo como conjunto de semirrectas ordenadas con el origen común?
6.- ¿Cómo se define y cómo se obtiene gráficamente la diferencia de dos ángulos?
7.- ¿Qué propiedades tienen la suma y la diferencia de ángulos?
8.- ¿Cómo se define el producto de un ángulo por un número natural?
9.- ¿Cómo se define el cociente de un ángulo por un número natural?
10.- ¿Qué es la bisectriz de un ángulo?

11.- Indica un procedimiento doblando el papel para obtener la bisectriz de un ángulo.

12.- ¿Cómo se llaman los dos ángulos iguales en que queda dividido un ángulo llano por su bisectriz?

13.- ¿Qué son ángulos complementarios? ¿Y suplementarios?

14.- ¿Qué es un ángulo agudo? ¿Y un ángulo obtuso?

3.9 Ejercicios resueltos

Ejercicio 2.1. La suma de las medidas de dos ángulos es 75° y el complemento del primer ángulo es el doble del segundo. ¿Encontrar las medidas de los ángulos?

Solución:

$a)\quad 1m\angle\theta + 1m\angle\alpha = 75° \qquad Por\ hipótesis$

$1m\angle\theta =\ primer\ ángulo$

$1m\angle\alpha =\ segundo\ ángulo$

$b)\quad 1m\angle\theta = 75° - 1m\angle\alpha$

$c)\quad 90° - 1m\angle\theta = 2m\alpha \qquad Por\ hipótesis$

$(b)\ en\ (c)$

$d)\quad 90° - (75° - 1m\angle\alpha) = 2m\angle\alpha \qquad \Rightarrow \qquad 1m\angle\alpha = 15° \quad LQQD$

$b)\quad 1m\angle\theta = 75° - 1m\angle\alpha \qquad \Rightarrow \qquad 1m\angle\theta = 60° \quad LQQD$

Ejercicio 2.2. Si a un ángulo θ se le añade la mitad de su complemento, se obtendrá otro ángulo que es igual al doble de su complemento aumentado en 15°. Encontrar la medida del ángulo θ.

Solución:

$$a)\quad 1\mathrm{m}\angle\theta + \frac{1}{2}(90° - 1m\angle\theta) = 1m\angle\beta \qquad por\ hipótesis$$

$$b)\quad 1\mathrm{m}\angle\beta = 2(90° - 1m\angle\beta) + 15° \qquad \Rightarrow \qquad 3m\angle\beta = 195°$$

$$\Rightarrow \qquad 1m\angle\beta = 65° \quad (c)$$

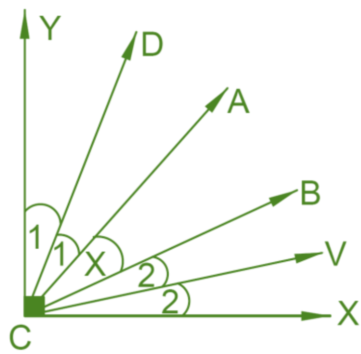
$$(c)\ en\ (a)$$

$$d)\quad 1\mathrm{m}\angle\theta + \frac{1}{2}(90° - 65°) = 65°$$

$$1\mathrm{m}\angle\theta + 12.5° = 65° \qquad \Rightarrow \qquad 1m\angle\theta = 52.5° \quad LQQD$$

Ejercicio 2.3. En la figura, encontrar el valor del ángulo x, si: $1m\angle DCV = 3m\angle ACB$

Figura 3.26



Solución:

$a)$ $1m\angle DCV = 3(1m\angle ACB)$ $\quad$ *por hip.*

$b)$ $1m\angle 1 + 1m\angle x + 1m\angle 2 = 3m\angle x$

(c) $1m\angle 1 + 1m\angle 2 = 2m\angle x$

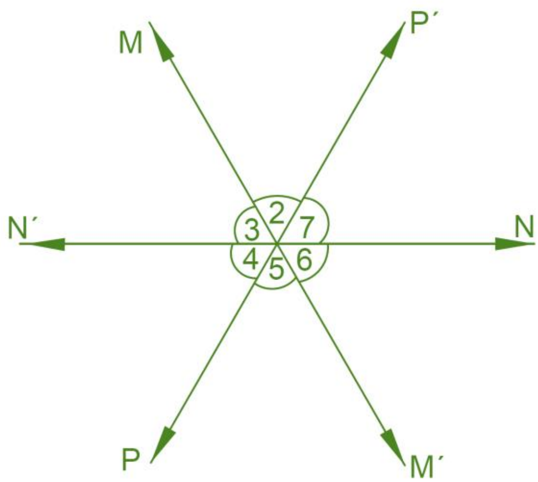
$d)$ $2m\angle 1 + 1m\angle x + 2m\angle 2 = 1\angle recto$ $\quad$ *por hip. gráfica*

(c') *en* (d)

$d)$ $4m\angle x = 90°$ $\quad \Rightarrow \quad$ $1m\angle x = 18°$ $\quad$ $LQQD$

Ejercicio 2.4. Tres semirrectas ON, OM, OP forman alrededor del punto "O" tres ángulos iguales que cubren todo el plano. Demostrar que la prolongación de cada una es bisectriz del ángulo determinado por las otras dos.

Figura 3.27



Solución:

$1m\angle NOM = 1m\angle MOP = 1m\angle PON = 1m\angle 1$

$= 120° \quad por\ hipótesis$

$1m\angle NOM = 1m\angle 7 + 1m\angle 2 = 120° \qquad (a)$

$1m\angle MOP = 1m\angle 3 + 1m\angle 4 = 120° \qquad (b)$

$1m\angle PON = 1m\angle 5 + 1m\angle 6 = 120° \qquad (c)$

$1m\angle NON' = 1m\angle NOM + 1m\angle 3$

$= 180° \qquad por\ ángulos\ suplementarios$

$1m\angle 3 = 60° \qquad \Rightarrow \qquad 1m\angle 4 = 60°$

$1m\angle MOM' = 1m\angle NOM + 1m\angle 5 = 180°$

$1m\angle 5 = 60° \qquad \Rightarrow \qquad 1m\angle 6 = 60°$

$1m\angle POP' = 1m\angle PON + 1m\angle 7 = 120°$

$1m\angle 7 = 60° \qquad \Rightarrow \qquad 1m\angle 2 = 60°$

$1m\angle 2 = 1m\angle 3 = 1m\angle 4 = 1m\angle 5 = 1m\angle 6 = 1m\angle 7 = 60°$

$*\ ON', OM', OP'\ son\ bisectrices\ del\ ángulo\ determinado\ por$

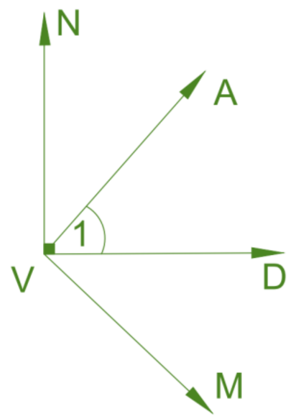
$las\ otras\ dos \quad LQQD$

Ejercicio 2.5. Dos ángulos rectos DVN, AVM tienen un ángulo común.

1.- Establecer la relación entre los ángulos, DVN y AVM.

2.- Demostrar que el ángulo DVN y el AVM son suplementarios.

Figura 3.28



$Solución$:

$1m\angle AVM = 1m\angle NVD = 1ángulo\ recto \qquad por\ hipótesis$

$1m\angle NVD = 90° = 1m\angle 1 + 1m\angle NVA \qquad (a)$

$1m\angle AVM = 90° = 1m\angle 1 + 1m\angle DVM \qquad (b)$

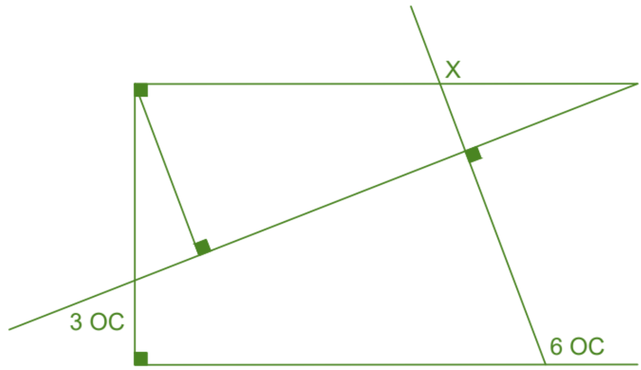
$(a) = (b)$

$1m\angle 1 + 1m\angle NVA = 1m\angle 1 + 1m\angle DVM \qquad ; \qquad * 1m\angle NVA$
$= 1m\angle DVM \qquad LQQD.$

3.10 Ejercicios propuestos

1. Dos ángulos son suplementarios y el mayor es siempre el doble del menor. Encontrar la medida de los ángulos.
2. Si dos ángulos son suplementarios y su diferencia es $\frac{2\pi}{3}$. Hallar el complemento del menor e identifique que tipo de ángulo es el mayor.
3. Si dos ángulos son congruentes y suplementarios. ¿Cuáles son esos ángulos?
4. Dos ángulos son suplementarios, el menor es los $\frac{4}{5}$ del mayor. ¿Qué medida tienen los ángulos?
5. Dos ángulos son suplementarios y los $\frac{2}{5}$ de uno de ellos, aumentados en los $\frac{9}{15}$ del otro determinan un ángulo recto. ¿Cuáles son sus medidas?
6. La diferencia de dos ángulos es un recto ¿Qué medida tendrá el ángulo formado por sus bisectrices?
7. Tres semirrectas que tienen el mismo origen dividen al plano en tres ángulos de los cuales el segundo mide $\frac{2}{3}$ del primero y el tercero $\frac{5}{6}$ del segundo. Calcular la amplitud de ellos.
8. Demostrar si dos ángulos que tienen lados paralelos son iguales o suplementarios.
9. Encontrar el valor de "x"

Figura 3.29



CAPÍTULO 4

Polígonos

Capítulo 4
Polígonos

4

"Todavía hay una diferencia entre algo y nada,
pero es puramente geométrica
y no hay nada detrás de la geometría..."

— *Martin Gardner*

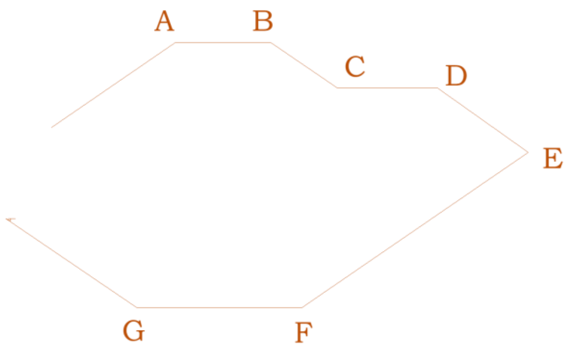
Objetivo

Identificar los elementos de un polígono, los tipos de polígonos y aplicar los teoremas fundamentales para la resolución de ejercicios relacionados con polígonos en el plano.

4.1 Definición

El polígono es una parte de un plano limitada por una línea quebrada poligonal cerrada (cuando el primer extremo del primer segmento coincide con el segundo extremo del último segmento). Para designar a un polígono se utilizan las letras del alfabeto ubicadas en los "n" puntos (vértices) del polígono, sea en el sentido horario o antihorario [27] .

Figura 4.1

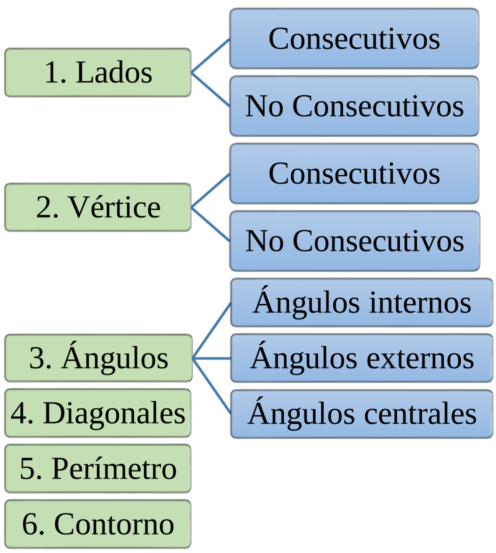


Polígono ABCDEF.........N

4.2 Elementos del polígono

Los elementos del polígono son [5]:

Figura 4.2



Lados

Son los segmentos rectilíneos que limitan al polígono.

- **Lados consecutivos**

Son los segmentos rectilíneos que tienen un vértice común. Ej.; AB y BC ; CD y DE

- **Lados no consecutivos**

Lados que no tienen un vértice común. Ej.; AB y DE

Vértices

Son los puntos de intersección entre dos lados consecutivos.

- **Vértices consecutivos**

Son los vértices que tienen un lado común. Ej.; A y B; C y D

- **Vértices no consecutivos**

Son los vértices que no tienen un lado en común. Ej.; A, C, E

Ángulos internos

Son los ángulos formados por dos lados consecutivos y que se encuentran en el interior del polígono.

Ángulos externos

Son los ángulos que están ubicados en cada uno de los vértices de un polígono formados por un lado y la prolongación del lado consecutivo.

Los ángulos externos pueden estar dentro o fuera del polígono según sea este.

Ángulos centrales

Son los ángulos en donde su vértice es el centro del polígono y sus lados son segmentos rectilíneos que unen el centro con un vértice del polígono.

Diagonales

Son segmentos rectilíneos que unen dos vértices no consecutivos.

Perímetro

Es la suma de las longitudes de los lados del polígono, y se denota por “2p”.

Contorno

Es el conjunto de los lados del polígono; es la línea quebrada constituida por todos los lados del polígono.

4.3 Clases de polígonos

- **Por el número de lados [2]**

NOMBRE	Nº DE LADOS
Triángulos	3
Cuadriláteros	4
Pentágono	5
Hexágono	6

NOMBRE	Nº DE LADOS
Heptágono	7
Octágono	8
Eneágono o Nonágono	9
Decágono	10
Endecágono	11
Dodecágono	12
Pentadecágono	15
Icoságono	20

Otros polígonos se mencionan según su número de lados. Por ejemplo, polígono de 17 lados, polígono de 31 lados, etc.

- **Por sus lados y ángulos o por la forma de su contorno**

Polígono plano

Es aquel polígono que tiene sus puntos ubicados en un mismo plano.

Polígono alabeado

Es aquel polígono que tiene sus puntos ubicados en diferentes planos.

Polígono simple

Se dice que un polígono es simple cuando dos lados no consecutivos no tienen puntos comunes.

Polígono cruzado

Es aquel que tiene puntos comunes entre dos lados no consecutivos.

Polígonos convexos

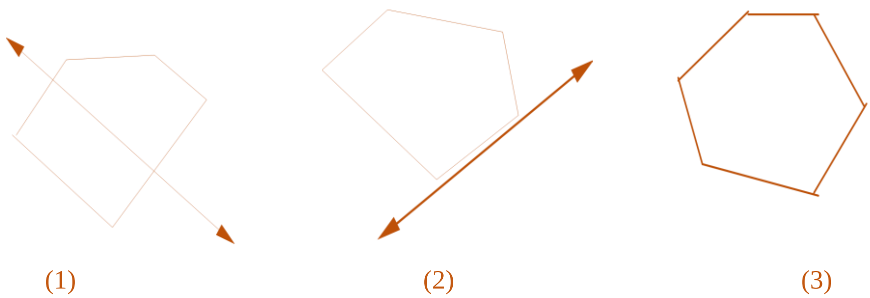
Los polígonos convexos pueden ser definidos de varias maneras así:

1.- polígono en el que, al atravesarlo, por una recta esta corta al polígono, máximo en dos puntos;

2.- polígono que tiene todos sus puntos situados en un mismo semiplano respecto a recta cualquiera que se prolongue por cualquiera de sus lados;

3.- polígonos que no tiene ángulo entrante (ángulo entrante es aquel ángulo cuyo vértice está dirigido hacia el interior del polígono).

Figura 4.3



Polígonos cóncavos

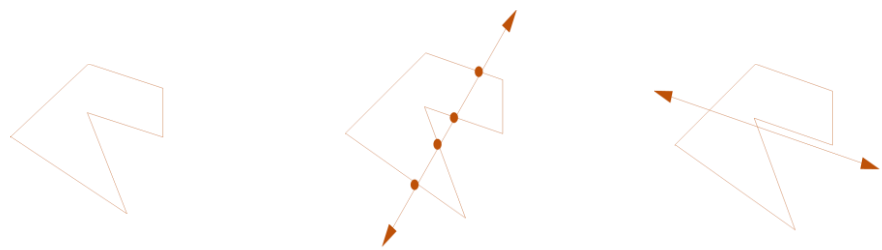
Los polígonos cóncavos tienen sus características contrarias a los polígonos convexos así:

Polígonos que tienen ángulo entrante

Ángulo entrante es aquel cuyo vértice está dirigido hacia el interior del polígono.

Son polígonos en los que una recta transversal puede cortar en más de dos puntos. Es aquel polígono que basta con prolongar uno de sus lados, este queda ubicado en dos semiplanos.

Figura 4.4



(1) (2) (3)

Polígonos equiláteros

Son los polígonos que tienen todos sus lados iguales.

Polígono equiángulo

Son los polígonos que tienen sus ángulos iguales.

Polígonos regulares

Son aquellos polígonos que tienen sus ángulos iguales entre sí, como también sus lados.

Polígonos irregulares

Son los polígonos que tienen sus lados y ángulos desiguales.

Polígonos estrellados

Es un polígono cruzado cuyos vértices se obtienen por la intersección de las prolongaciones de los lados de un polígono convexo. El pentágono es el polígono estrellado de menor número de lados.

4.4 Descomposición de los polígonos

Cualquiera de los polígonos que sean estos, se pueden descomponer en triángulos de la siguiente manera [1]:

1. Las diagonales trazadas desde un vértice descomponen a un polígono en tantos lados tiene, menos dos.

(n - 2) = número de triángulos   n = número de lados del polígono

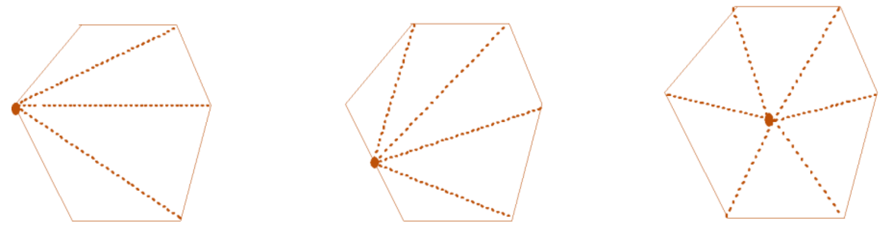
2. Considerando un punto cualquiera en uno de los lados del polígono uniendo los segmentos con este punto, por lo que queda descompuesto en tantos triángulos como lados tiene menos uno, es decir:

$$(n - 1) = \text{Número de triángulos}$$

3. Uniendo los vértices del polígono con un punto interior cualquiera del mismo quedando descompuesto en "n" triángulos.

$$n = \text{Número de triángulos}$$

Figura 4.5



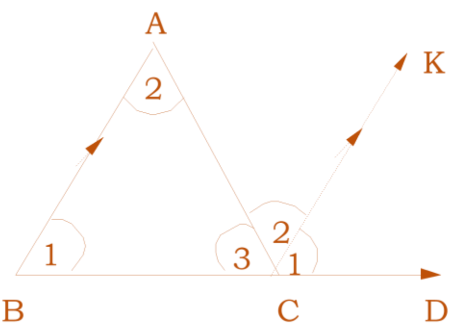
(1) (2) (3)

4.5 Teoremas

Los polígonos tienen los siguientes teoremas ([28], [2], [24])

1.- La suma de los ángulos internos de un triángulo es igual a dos ángulos rectos. A este teorema se le conoce como el teorema básico de los polígonos o el teorema fundamental del triángulo designado como (T. F. Δ)

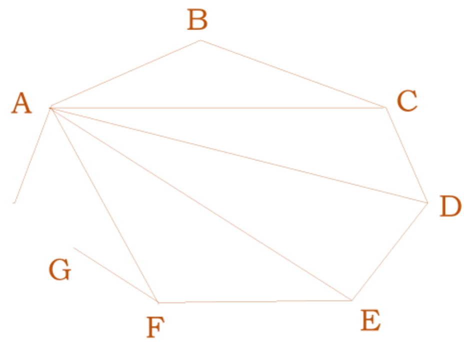
Figura 4.6



$$1m\angle 1 + 1m\angle 2 + 1m\angle 3 = 2 \text{ ángulos rectos}$$
$$\vdots \quad = 180^\circ = 200^g = \pi \text{ radianes}$$

2.- La suma de los ángulos interiores de un polígono cualquiera es dos ángulos rectos multiplicados por el número de triángulos en que se descompone el polígono.

Figura 4.7



Δ	ABC:	Suma de los ángulos internos	= 2 ángulos rectos	= 180°
Δ	ACD:	Suma de los ángulos internos	= 2 ángulos rectos	= 180°
Δ	......	”	= ”	= ”
Δ	......	______________________________	= ______________	_______

La suma de los ángulos internos del polígono ABCD...N = 180° + 180° + 180° + .. + n

(Según indique el número de triángulos en que se ha descompuesto el polígono).

Una forma más simple es:

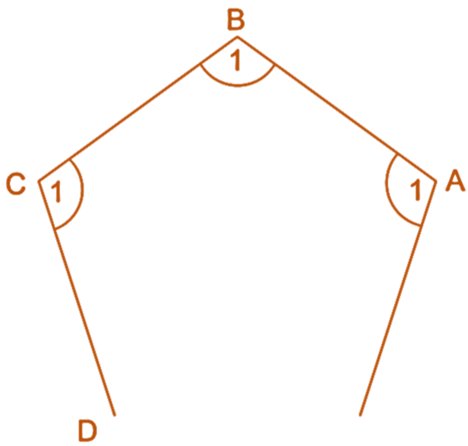
La suma de los ángulos internos del polígono = (180°) (el número de triángulos).

Simplificando:

$$S_{\angle i \ \ polígono} = (180°)(n-2)$$

3.- El valor de un sólo ángulo interior de un polígono convexo regular de "n" lados vienen dados por:

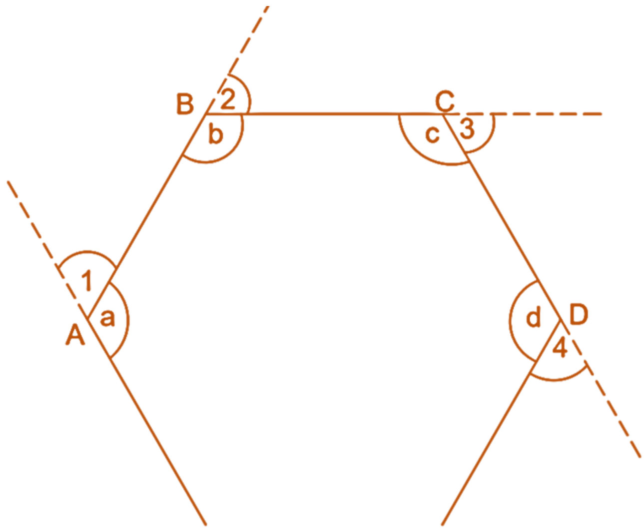
Figura 4.8



$$1m\angle EDC = \frac{S_{\angle i \ \ polígono}}{n} = \frac{180°(n-2)}{n}$$

4.- La suma de los ángulos exteriores de todo polígono convexo es igual a cuatro ángulos rectos.

Figura 4.8



Asumimos que;

Vértice A: 1m∠ 1+ 1m∠ a = 2m∠ rectos = 180°
(por suplementarios)

Vértice B: 1m∠ 2 + 1m∠ b = " = "

Vértice C: 1m ∠ 3 + 1m∠ c = " = "

Vértice D: 1m ∠4 + 1m∠ d = " = "

... . + ... " = "

N .... + ...“ = "

Así tendremos:

$1m\angle 1 + 1m\angle 2 + 1m\angle 3 + 1m\angle 4 + ... + ... +$ = Suma de los áng. exteriores del polígono.

$1m\angle a + 1m\angle b + 1m\angle c + 1m\angle d + ... + ... +$ = Suma de los áng. interiores del polígono.

Por lo tanto:

$$S_{\angle i \ \ polígono} + S_{\angle e \ \ polígono} = (2\angle rectos)\ (Número\ de\ vértices\ del\ polígono)$$

$180° (n - 2) + S_{\angle \text{ e del polígono}} = (180°). (n)$

$(180°). (n) - (180°). (2) + S_{\angle \text{ e del polígono}} = (180°). (n)$

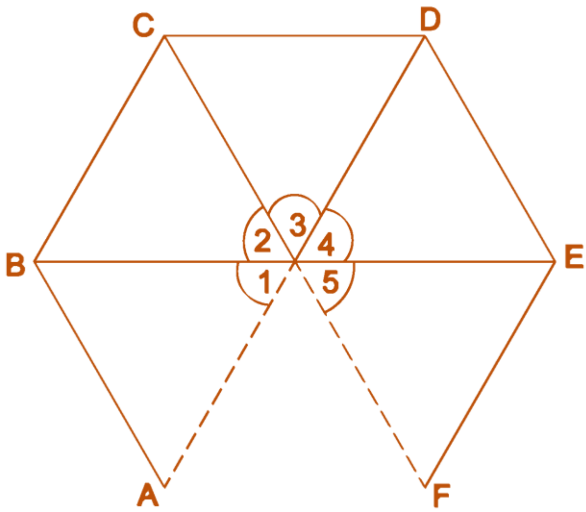
"$S_{\angle \text{ e del polígono}} = (180°) (2) = 360° = 4$ ángulos rectos"

5.- El valor de un solo ángulo exterior de un polígono convexo regular de "n" lados, está dado por:

$$\text{Un ángulo externo} = \frac{\text{4 ángulos rectos}}{\text{n}} = \frac{360°}{\text{n}}$$

6.- La suma de los ángulos centrales de un polígono convexo es igual a cuatro ángulos rectos.

Figura 4.9



Suma ángulos centrales = 1m∠ 1+1m∠ 2 + 1m ∠3 + 1m∠4 +...+. = 4 ángulos rectos.

Suma **ángulos centrales = 4 ángulos rectos = 360°**

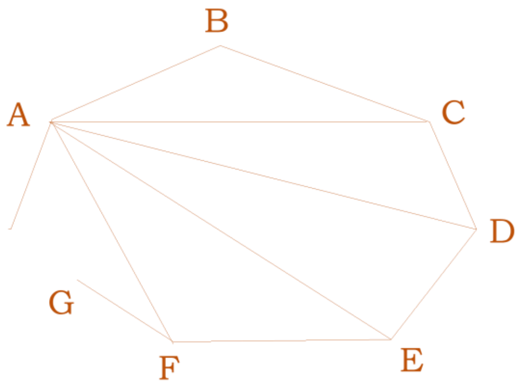
7.- El valor de un sólo ángulo central en un polígono convexo regular es igual a un ángulo externo del mismo.

$$1\ \acute{a}ngulo\ central = 1\ \acute{a}ngulo\ exterior = \frac{4\ \acute{a}ngulos\ rectos}{n}$$

$$= \frac{360°}{n}$$

8.- El número de diagonales “d” que pueden trazarse desde un vértice es igual al número de vértices menos tres.

Figura 4.10



Ej.: Si consideramos el vértice "B"

d = (n - 3)

n = Número de vértices del polígono

3 = Número de vértices a los cuales no es posible trazar las diagonales

Así, en el polígono, los vértices hacia donde no se pueden trazar las diagonales son:

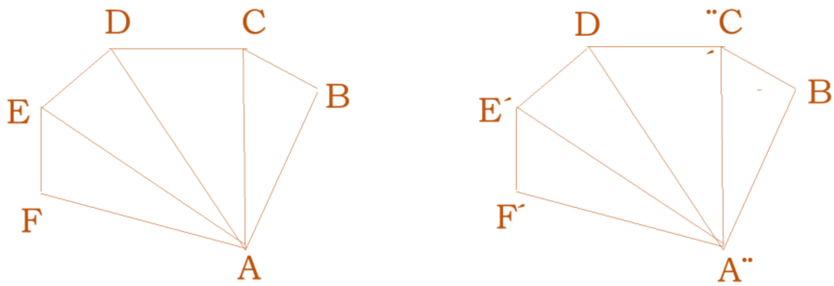
A, B y C.

9.- Si (n) es el número de vértices del polígono, el número total de diagonales "D" que pueden trazarse desde todos los vértices está dada por la fórmula:

$$D = \frac{n(n-3)}{2}$$

10.- Dos polígonos son iguales si pueden descomponerse en igual número de triángulos respectivamente iguales y dispuestos del mismo modo.

Figura 4.11



Nota

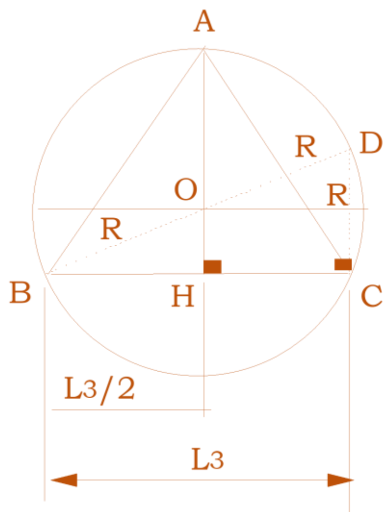
Como práctica se sugiere realizar la demostración de la suma de los ángulos interiores y la suma de los ángulos exteriores de un polígono cóncavo.

4.6 Cálculo del lado y apotema de los polígonos regulares en función del radio “r” de la circunferencia inscrita y circunscrita [7]

1. Triángulo equilátero

Sea el triángulo A, B, C, inscrito la circunferencia de centro” O” y radio “R”.

Figura 4.12



Procedimiento para:

Cálculo del lado “L_3”

- BD = diámetro (por construcción).
- DC = cuerda (por construcción).
- $BC \perp DC$ por ángulo inscrito en una semicircunferencia.
- El triángulo BCD, es rectángulo.

Por Pitágoras:

$$\overline{BC}^2 = \overline{BD}^2 - \overline{DC}^2$$

BD = 2R = Diámetro

$$L_3^2 = (2R)^2 - R^2 = 4R^2 - R^2 = 3R^2$$

$$\boldsymbol{L_3 = R\sqrt{3}}$$

Cálculo del apotema

El triángulo BHO es rectángulo

Por Pitágoras: $\overline{OH}^2 = \overline{BO}^2 - \overline{BH}^2$

OH = a_3 = apotema

BO = R = radio

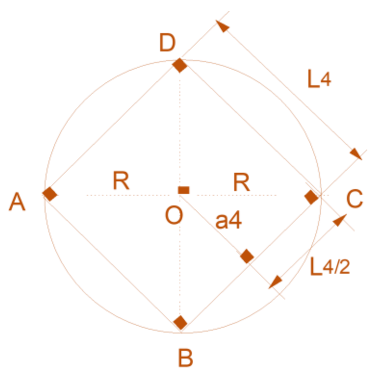
$\overline{BH} = \frac{L_3}{2}$; $\overline{BH} = \frac{R\sqrt{3}}{2}$; $a_3^2 = R^2 - \left(\frac{R\sqrt{3}}{2}\right)^2$

2. Cuadrado [24]

AB ⊥ BC ⊥ CD ⊥ DA = L_4

m ∠ ABC = m ∠ BCD = m ∠ CDA = m ∠ DAB = Un ángulo recto (ángulos inscritos).

Figura 4.13



Cálculo del lado ("L_4")

El triángulo AOB es isósceles y rectángulo (por construcción).

Por Pitágoras:

$$L_4^2 = R^2 + R^2 = 2R^2 \qquad ; \qquad \bullet \quad L_4 = R\sqrt{2}$$

Cálculo del apotema (a_4)

El triángulo AOH rectángulo (por construcción)

OH = a_4

$$a_4^2 = \overline{AO}^2 - \overline{AH}^2 \qquad ; \qquad \overline{BO} = R = \overline{AO}$$

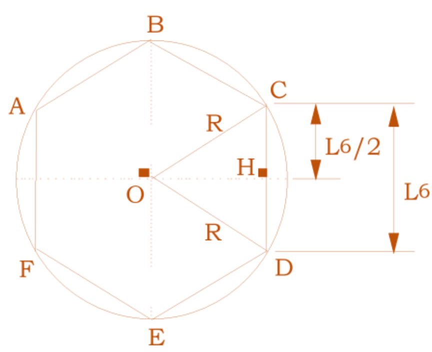
Por Pitágoras: $L_4^2 = 2R^2$

$$a_4^2 = R^2 - \left(\frac{L_4}{2}\right)^2 = R^2 - \frac{2R^2}{4} \qquad ; \qquad \bullet \quad a_4 = \frac{R\sqrt{2}}{2}$$

3. Hexágono

Sea el hexágono ABCDEF inscrito en la circunferencia de centro “O” y radio “R”.

Figura 4.14



El triángulo COD es equilátero por construcción

$\overline{OC} = \overline{OD} = \overline{CD} = Radio = R = L_6$

$$\boldsymbol{L_6 = R}$$

Cálculo del apotema $(\boldsymbol{a_6})$

El triángulo CHO es rectángulo (por construcción)

$$\overline{OH} = apotema = a_6$$

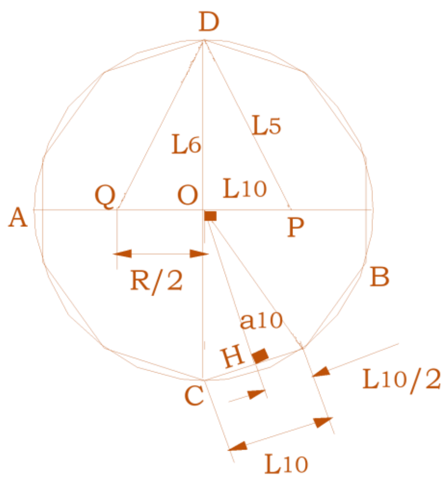
Por Pitágoras

$$\overline{OH}^2 = \overline{OC}^2 - \overline{CH}^2$$

$$a_6^2 = R^2 - \frac{R^2}{4} \qquad ; \qquad \bullet \quad a_6 = \frac{R\sqrt{3}}{2}$$

4.- Decágono [24]

Figura 4.15



Cálculo del lado "L_{10}"

$$\overline{AQ} = \overline{QO} = \frac{R}{2} \qquad \text{(por construcción) (a)} \qquad \overline{QD} = \overline{QP}$$

Triángulo ODP rectángulo (por construcción)

$$\overline{OP} = L_{10} \ : \quad \overline{OD} = L_6 \quad : \quad \overline{PD} = L_5$$

En el triángulo rectángulo QOD.

Por Pitágoras:

$$\overline{QD}^2 = L_6^2 + \overline{QO}^2 \qquad \overline{QD}^2 = R^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2 = R^2 + \frac{R^2}{4}$$

$$\overline{QD}^2 = \frac{5R^2}{4} \ \text{(b)} \qquad \overline{QD} = \frac{R\sqrt{5}}{2} = \overline{QP}$$

En el triángulo QDP isósceles:

$$L_{10} = \overline{QP} - \overline{QO} \qquad \text{(c)}$$

(a),(b) en (c)

$$L_{10} = \frac{R\sqrt{5}}{2} - \frac{R}{2}$$

$$\boldsymbol{L_{10} = \frac{R}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right)}$$

Cálculo del apotema (a_{10})

En el triángulo rectángulo OHN

Por Pitágoras: OH = a_{10}

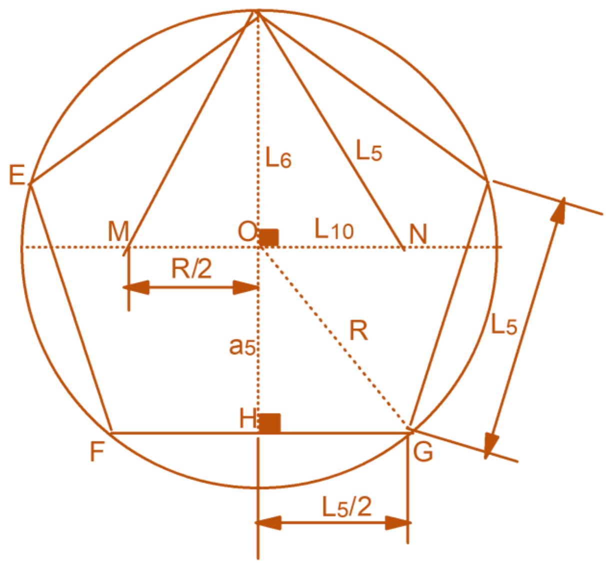
$$\overline{OH}^2 = \overline{ON}^2 - \overline{HN}^2 \qquad a_{10}^2 = R^2 - \left(\frac{L_{10}}{2}\right)^2$$

$$a_{10}^2 = R^2 - \left[\frac{\frac{R}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)}{2}\right]^2$$

$$a_{10} = \frac{R}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$$

5.- Pentágono [24]

Figura 4.16



Cálculo del lado "L_5"

En el gráfico correspondiente al decágono, analizamos el triángulo PDQ que es igual al triángulo OND que se encuentra en el gráfico del pentágono.

$$L_5^2 = L_{10}^2 + L_6^2$$

$$L_5^2 = \left[\frac{R}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)\right]^2 + R^2$$

$$L_5 = \frac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$$

Cálculo del apotema (a_5)

En el gráfico del pentágono.

Analizamos el triángulo OHG, por Pitágoras:

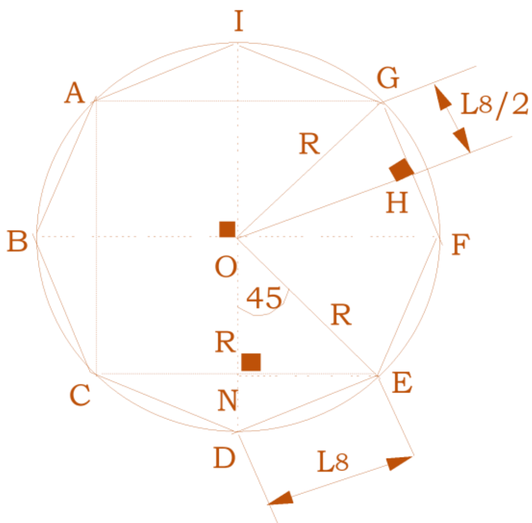
$$a_5^2 = R^2 - \left(\frac{L_5}{2}\right)^2 = R^2 - \left[\frac{\frac{R\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}}{2}\right]^2$$

$$* \ \boldsymbol{a_5 = \frac{R}{4}\sqrt{6 + 2\sqrt{5}}}$$

6.- Octágono

En la circunferencia de centro "O" y de radio" R" se inscribe un octógono, se trazan los radios OD y OE formándose el triángulo isósceles DOE cuyo ángulo DOE es igual a 45°, luego trazamos en perpendicular a OD formándose el triángulo rectángulo isósceles ONE por el teorema de Pitágoras generalizado.

Figura 4.17



$$L_8^2 = \overline{OE}^2 + \overline{OD}^2 - 2(\overline{OE})(\overline{OE})$$

$$\boldsymbol{L_8^2 = R^2 + R^2 - 2R.\overline{ON}}$$

ON = apotema del cuadrado ACEG

$$\overline{ON} = \frac{R}{2}\sqrt{2}$$

$$L_8^2 = 2R^2 - (2R)\left(\frac{R}{2}\sqrt{2}\right)$$

$$L_8 = R\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

Cálculo del apotema (a_8)

OM = apotema = a_8

El triángulo OMG es rectángulo.

Por Pitágoras:

$$\overline{OM}^2 = \overline{OG}^2 - \overline{GM}^2$$

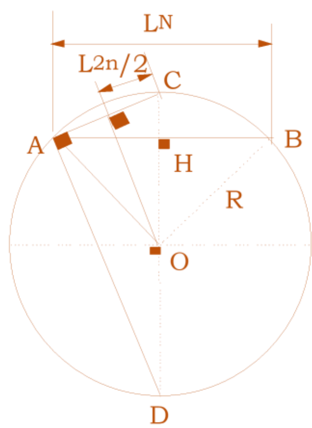
$$a_8^2 = R^2 - \left(\frac{L_8}{2}\right)^2$$

$$a_8^2 = R^2 - \left(\frac{R\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right)^2$$

$$* \qquad a_8 = \frac{R}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$$

7.- Dado el lado "L_n" de un polígono regular inscrito en una circunferencia de centro "O" y de radio "R", de "n" lados. Hallar el lado de un polígono inscrito del doble número de lados "L_{2n}".

Figura 4.18



En el triángulo rectángulo ACD

$$\overline{\boldsymbol{AC}}^{\boldsymbol{2}} = (\overline{\boldsymbol{AC}})(\overline{\boldsymbol{CH}}) \text{ por proporciones (a)}$$

$$\overline{\boldsymbol{AC}} = \boldsymbol{L_{2n}}$$

CD = 2R = diámetro

CH = R - OH   (b)

OH = apotema del polígono de "n" lados

En el triángulo rectángulo OHB

Por Pitágoras: $\overline{OB}^2 = \overline{OH}^2 + \overline{HB}^2$ AC = L_{2n}

$$\overline{OH}^2 = \overline{OB}^2 - \overline{BH}^2 \quad : \quad \overline{OB}^2 = R^2$$

$$HB^2 = \left(\frac{L_n}{2}\right)^2 \qquad OH^2 = R^2 - \frac{L_n^2}{4}$$

$$OH = \sqrt{\frac{4R^2 - L_n^2}{2}} \qquad (c)$$

$$H = R - \frac{\sqrt{2R - L_n^2}}{2} = \frac{2R - \sqrt{4R^2 - L_n^2}}{2} \qquad (d)$$

(c) en (b) y (d) en (a)

$$L_{2n}^2 = (2R)\left(\frac{2R - \sqrt{4R^2 - L_n^2}}{2}\right)$$

- $L_{2n} = \sqrt{R\left(2R - \sqrt{4R^2 - L_n^2}\right)}$

Cálculo del apotema (a_{2n})

$$R^2 = a_{2n}^2 + \left(\frac{L_{2n}}{2}\right)^2 \qquad a_{2n} = \frac{\sqrt{4R^2 - L_{2n}^2}}{2}$$

- $$\boldsymbol{a_{2n} = \sqrt{2R^2 + \frac{R\sqrt{4R^2 - L_n^2}}{2}}}$$

4.7 Preguntas de autoevaluación

1. ¿Qué es una línea poligonal?
2. ¿Qué es un polígono?
3. ¿Qué son las diagonales de un polígono?
4. ¿Qué es el perímetro de un polígono?
5. ¿Cómo se define un ángulo exterior de un polígono?
6. Como se llaman los polígonos desde 3 hasta 10 lados. ¿Cómo se llama el polígono de 12 lados? ¿y el de 17?
7. ¿Qué es un polígono equiángulo? ¿un equilátero?
8. ¿Cuántas diagonales tiene un polígono de “n” lados?
9. ¿Cuánto vale la suma de los ángulos internos de un polígono convexo?
10. ¿Cuánto vale un ángulo interno de un polígono equiángulo de “n” lados?
11. ¿Cuánto vale la suma de los ángulos externos de cualquier polígono convexo?

4.8 Preguntas propuestas

1. Calcular la medida del ángulo externo de un octágono regular.
2. Si la suma de los ángulos internos de un polígono regular es de 1260°. ¿Calcular el número de lados del polígono?
3. Si la suma de los ángulos internos de un polígono regular es de 1800°, calcular el número de lados del polígono y la medida de: un ángulo interno, externo y central.
4. Calcular la medida de la suma de los ángulos externos de un octágono regular y de un decágono regular.
5. Un ángulo externo de un polígono regular es de 45° calcular el número de lados del polígono.
6. El ángulo externo de un polígono regular es de 120° calcular la suma de los ángulos externos.
7. El polígono, cuyo número de diagonales aumenta en dos, al aumentar en 1 el número de lados, cuál es ese polígono.
8. ¿Qué tipo de relación se cumple entre los lados y ángulos de un polígono, al aumentar y disminuir progresivamente el número de lados?

CAPÍTULO 5

Triángulos

Capítulo 5
Triángulos

5

"Si los triángulos hicieran un dios,
lo idearían con tres lados."

— Montesquieu

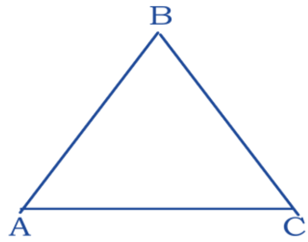
Objetivo

Reconocer los tipos de triángulos, aplicar los teoremas relacionados a los triángulos describiendo las rectas, segmentos y puntos notables del triángulo para la resolución de ejercicios.

5.1 Definición

Triángulo es la porción de plano limitado por tres segmentos rectilíneos que tiene dos a dos un extremo común. Es el polígono de menor número de lados. Para construir un triángulo se marcan tres puntos A, B, C que no sean colineales y se unen con los segmentos AB, BC, AC. Estos segmentos se llaman lados del triángulo, y los puntos A, B, C, son los vértices del triángulo [8].

Figura 5.1



5.2 Notación

El triángulo se designa por las tres letras de sus vértices, enunciadas en cualquier orden; así el triángulo ABC se lo representa como [19]:

$$\Delta\ ABC$$

5.3 Elementos del triangulo

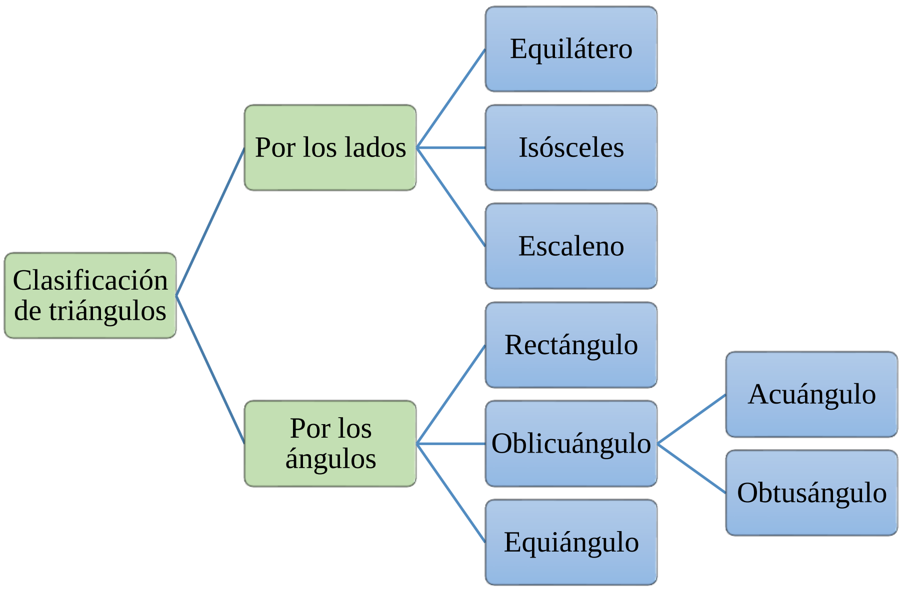
- Vértices.
- Lados.
- Ángulos internos.
- Ángulos externos.
- Perímetro.
- Contorno.

Elementos que ya fueron analizados en el tema de los polígonos.

5.4 Clasificación de los triángulos

Los triángulos se clasifican atendiendo a sus lados o a sus ángulos [7].

Figura 5.2



- Equilátero: si sus tres lados son iguales.
- Isósceles: si tiene dos lados iguales.
- Escaleno: si sus tres lados son desiguales.
- Rectángulo: el que tiene un ángulo recto.
- Acutángulo: el que tiene agudos sus tres ángulos.
- Obtusángulo: el que tiene un ángulo obtuso.
- Equiángulo: aquel que tiene sus tres ángulos iguales.

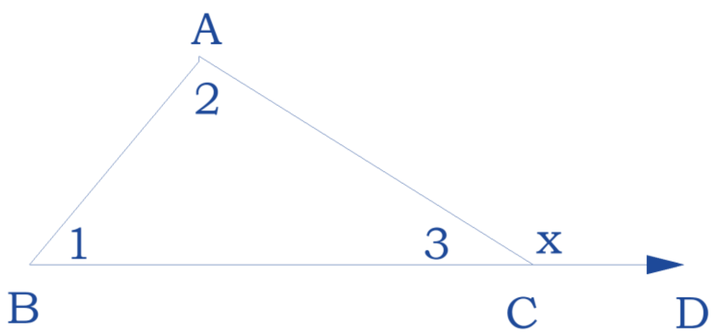
5.5 Teoremas principales de triángulos

Los teoremas principales de los triángulos son [5]:

1. La suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a dos ángulos rectos.
   (Teorema ya demostrado en polígonos).

2. Un ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de los ángulos interiores no adyacentes a él.

Figura 5.3



$1m\angle ACB + 1m\angle ACD = 180°$ (por ser suplementarios) (a)

$1m\angle 3 + 1m\angle x = 180°$ (por ser ángulos suplementarios) (b)

$1m\angle ABC + 1m\angle BAC + 1m\angle ACB = 180°$ (T. F. del Δ) (c)

$1m\angle 1 + 1m\angle 2 + 1m\angle 3 = 180°$ (T. F. del Δ) (d)

(b) = (d)

$1m\angle 3 + 1m\angle x = 1m\angle 1 + 1m\angle 2 + 1m\angle 3$

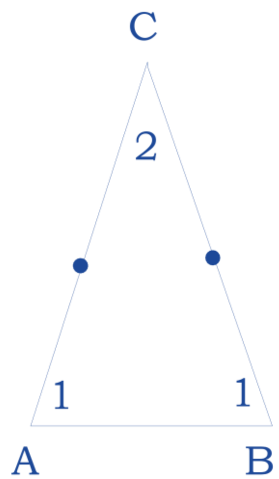
*** $1m\angle x = 1m\angle 1 + 1m\angle 2$ LQQD**

3. La suma de los ángulos exteriores de un triángulo es igual a cuatro ángulos rectos.

(Teorema ya demostrado en polígonos).

4. En todo triángulo isósceles, a lados iguales se oponen ángulos iguales o viceversa.

Figura 5.4

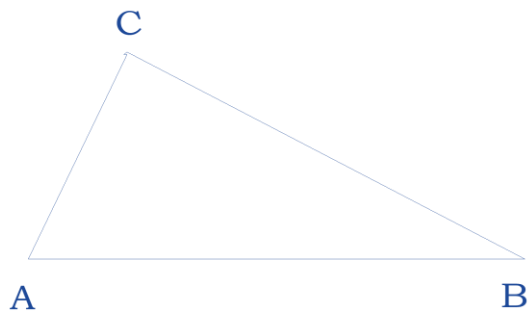


Si: CA = CB

$1m\angle CAB = 1m\angle CBA = 1m\angle 1$

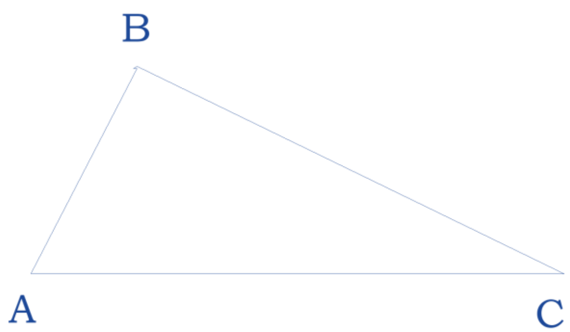
En todo triángulo a mayor lado se opone mayor ángulo.

Figura 5.5



5. En todo triángulo, un lado es menor que la suma de los otros dos, pero mayor que su diferencia.

Figura 5.6



$$BC \neq AC \neq AB$$

$$BC < AC + AB$$

$$BC > AC - AB$$

Entonces; $BC < AC > AB$

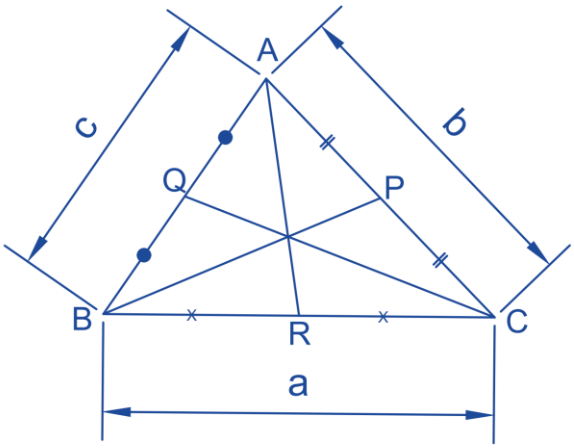
5.6 Rectas - Segmentos y puntos notables de un triángulo

A continuación se describen las rectas, segmentos y puntos notables de un triángulo ([27] [25], [19]):

- **Mediana**

Es el segmento trazado desde un vértice hacia el punto medio del lado opuesto.

Figura 5.7



AP = PC

AQ = BQ

BR = CR

Existen tres medianas, una correspondiente a cada lado; se designa con la letra "m" y un subíndice que indica el lado.

$AR = m_a$ $BP = m_b$ $CQ = m_c$

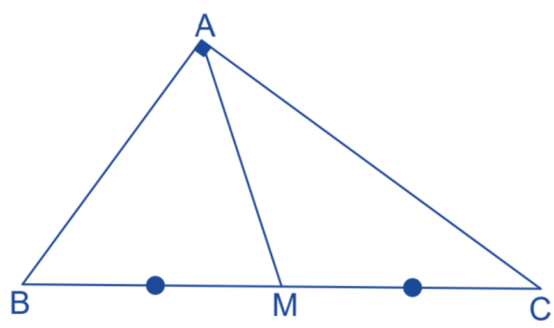
El punto de intersección de las tres medianas se llama **BARICENTRO, CENTRO DE GRAVEDAD o CENTROIDE** y se representa por **(G).**

1.- El baricentro está situado a $\frac{2}{3}$ de cada vértice (Propiedad del Baricentro).

$$BG = \frac{2}{3}BP \qquad CG = \frac{2}{3}QC \qquad AG = \frac{2}{3}AR$$

2.- La mediana respecto a la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la mitad de la hipotenusa.

Figura 5.8

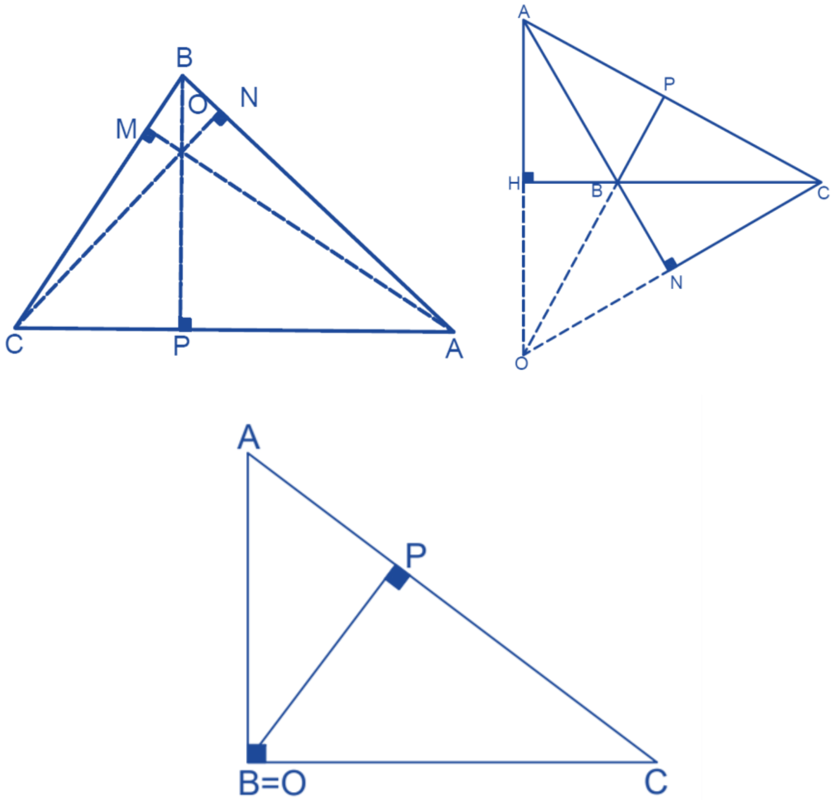


$$AM = MB = MC = \frac{BC}{2}$$

- **Altura**

Es la perpendicular trazada desde un vértice hacia el lado opuesto o a su prolongación.

Figura 5.9



Hay tres alturas, una correspondientes a cada lado; se designan con la letra "h" y un subíndice que indica el lado al cual se traza la altura.

AM = ha BP = hb CN = hc

El punto donde concurren las tres alturas se llama **ORTOCENTRO** y está representado por **"O".**

Propiedades del ortocentro

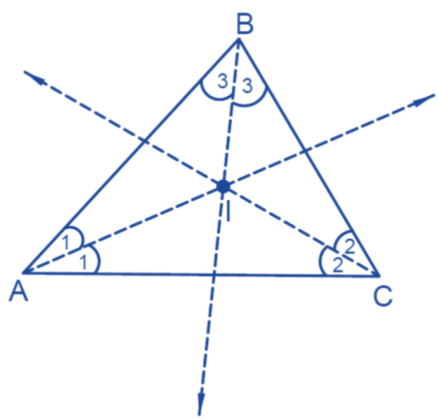
1. En el triángulo acutángulo, el ortocentro está dentro del triángulo.
2. En el triángulo obtusángulo, el ortocentro está fuera del triángulo.
3. En el triángulo rectángulo, el ortocentro se confunde con el vértice del ángulo recto.

- **Bisectriz**

Bisectriz interior de un ángulo

Es la recta notable que divide a un ángulo interno del triángulo en dos ángulos parciales iguales; consecuentemente en un triángulo existirán tres bisectrices internas.

Figura 5.10



$$1m \angle BAI = 1m \angle IAC = 1m \angle 1$$

$$1m \angle BCI = 1m \angle ICA = 1m \angle 2$$

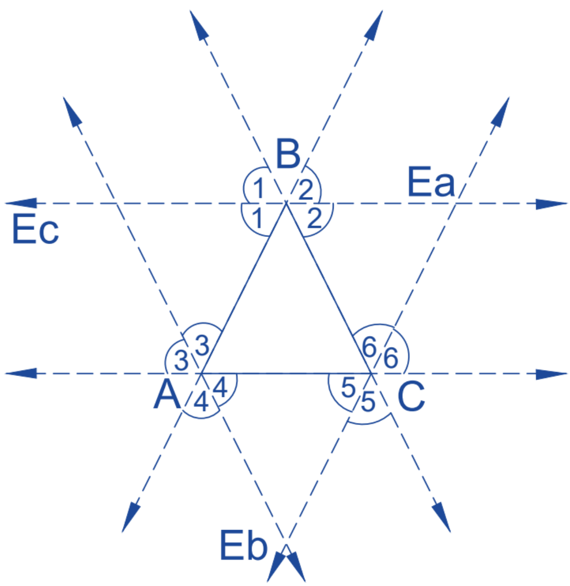
$$1m \angle ABI = 1m \angle IBC = 1m \angle 3$$

El punto donde concurren las tres bisectrices interiores se llama **INCENTRO** y se representa por **"I"**. El incentro corresponde al centro de la circunferencia inscrita al triángulo.

Bisectriz exterior de un ángulo

Es la recta que corresponde a la bisectriz de un ángulo exterior; hay tres bisectrices, una para cada ángulo exterior.

Figura 5.11

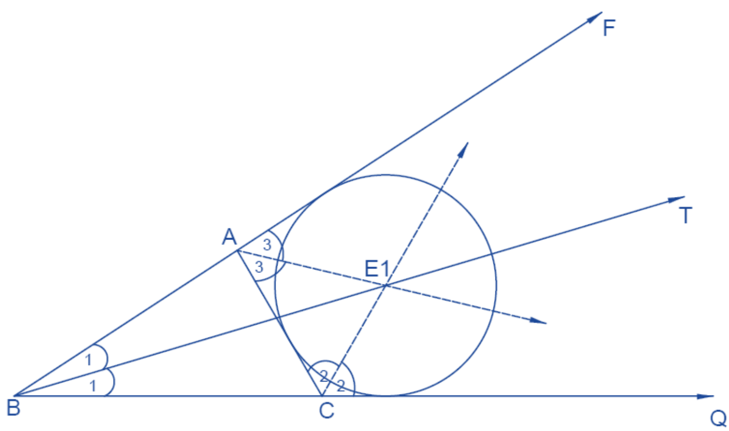


El punto de intersección de las bisectrices exteriores determina el **EX-CENTRO o EX - INCENTRO**, se representa con **"E"**. El ex - centro es el centro de la circunferencia ex - inscrita al triángulo.

Propiedades de las bisectrices de los ángulos [27]

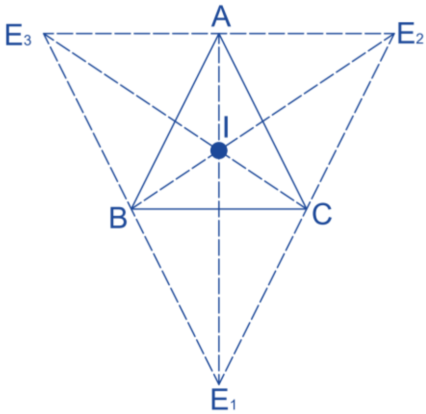
1.- En todo triángulo, las bisectrices de dos ángulos externos y la bisectriz del ángulo interno adyacente cortan en un punto E_1 exterior al triángulo ABC.

Figura 5.12



2.- Las bisectrices interiores del triángulo ABC son las alturas del triángulo E_1 E_2 E_3 pues las bisectrices de dos ángulos adyacentes, AE_1, AE_2 son perpendiculares entre sí.

Figura 5.13



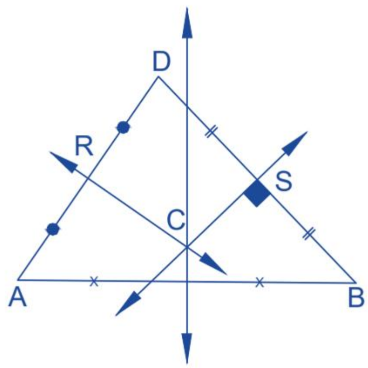
El triángulo ABC es el **TRIÁNGULO ÓRTICO** del triángulo E_1 E_2 E_3 y este es el **TRIÁNGULO ANTIÓRTICO** del triángulo ABC.

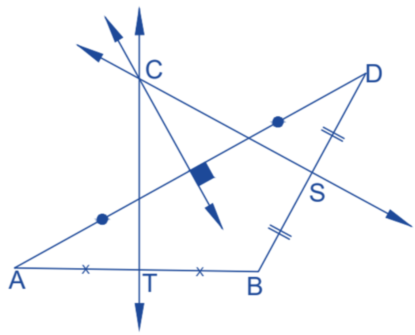
“I” es el in - centro del triángulo ABC y a la vez el Ortocentro del triángulo E_1 E_2 E_3.

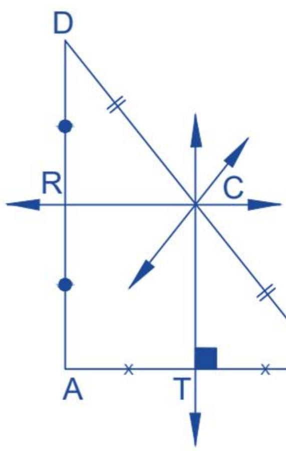
- **Mediatriz**

Es la perpendicular trazada en el punto medio de cada lado; las mediatrices se denominan con la letra "M" y un subíndice que indica el lado al cual ha sido trazada.

Figura 5.14







CS = M_a = Mediatriz respecto al lado “a”

RC = M_b = Mediatriz respecto al lado “b”

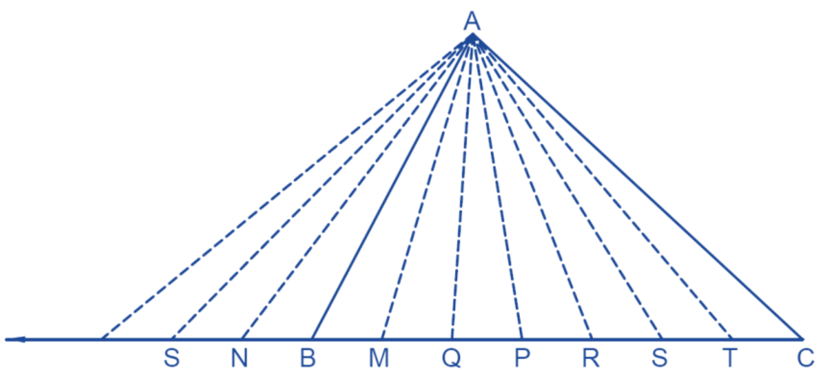
TC = M_c = Mediatriz respecto al lado “c”

El punto de intersección de las tres mediatrices se llama **CIRCUNCENTRO** y se representa por **“C”** y que equidistan de los tres vértices de este, y constituye el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo. El circuncentro puede estar ubicado en el interior o en el exterior del triángulo como también, en el punto medio de la hipotenusa de un triángulo rectángulo.

- **Ceviana**

Es el segmento rectilíneo que une un vértice con cualquier punto del lado opuesto o su prolongación.

Figura 5.15



Δ ABC

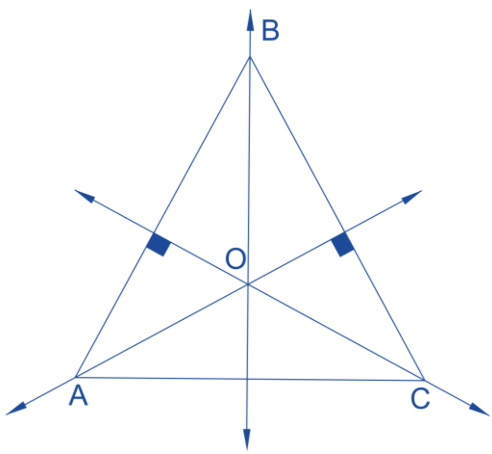
AK, AN, AM, AP, ……AR = CEVIANAS

5.7 Características de las rectas - segmentos y puntos notables en los triángulos equiláteros - isósceles – escalenos [19]

1.- En los triángulos equiláteros las rectas, segmentos notables, trazados desde uno de los vértices se confunden en una sola y pueden ser consideradas como mediana, altura, bisectriz interna, mediatriz, ceviana.

En lo que respecta a los puntos notables, así mismo un solo punto representa el baricentro, ortocentro, incentro, circuncentro.

Figura 5.16



2.- En los triángulos isósceles las rectas, segmentos, trazadas desde el vértice comprendido entre los dos lados iguales tienen la misma característica que el caso anterior; no así con los puntos notables que se encuentran ubicados en distinta posición.

3.- En los triángulos escalenos las rectas, segmentos y puntos notables se encuentran ubicados en el interior y exterior del triángulo.

Nota

Estimado lector a manera de ejercicio, se le sugiere analizar qué sucede con los diferentes segmentos, rectas y puntos notables en los casos 2 y 3, utilizando los instrumentos necesarios.

- **Recta de Euler**

El ortocentro, el baricentro y el circuncentro de un triángulo están en línea recta denominada **RECTA DE EULER**. La distancia del ortocentro "O", al baricentro "G" es dos veces la distancia del baricentro "G" al circuncentro "C".

OG = 2 GC

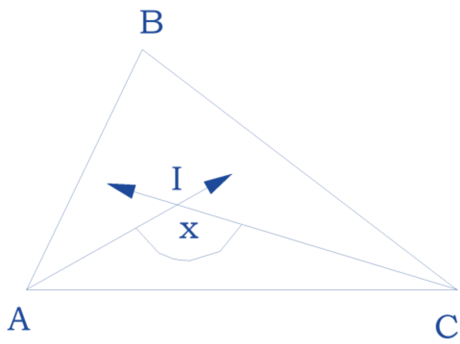
Nota

Realizar este análisis como práctica.

Propiedades de las rectas notables ([8], [27],[19]**)**

1.-El ángulo formado por bisectrices internas de un triángulo es igual a un ángulo recto más la mitad de la medida del ángulo no considerado por las bisectrices.

Figura 5.17



H) AI bisectriz interna del $\angle$ BAC

CI bisectriz interna del $\angle$ BCA.

$$T)\quad 1m\angle x = 90^{\circ} + \frac{1m\angle ABC}{2}$$

Δ AIC

$1m\angle 1 + 1m\angle x + 1m\angle 2 = 180°$ (a)

Δ ABC

$(2m\angle 1 + 2m\angle 2 + m\angle ABC = 180°) \div 2$ (b)

$$1m\angle 1 + 1m\angle 2 + \frac{1m\angle ABC}{2} = 90°$$

$$(a) = \ (b)$$

$$1m\angle 1 + 1m\angle x + 1m\angle 2 = 2m\angle 1 + 2m\angle 2 + 1m\angle ABC$$

$$1m\angle x = 1m\angle 1 + 1m\angle 2 + \frac{1m\angle ABC}{2} + \frac{1m\angle ABC}{2}$$

$$* \quad \mathbf{1m\angle x = 90° + \frac{1m\angle ABC}{2}}$$

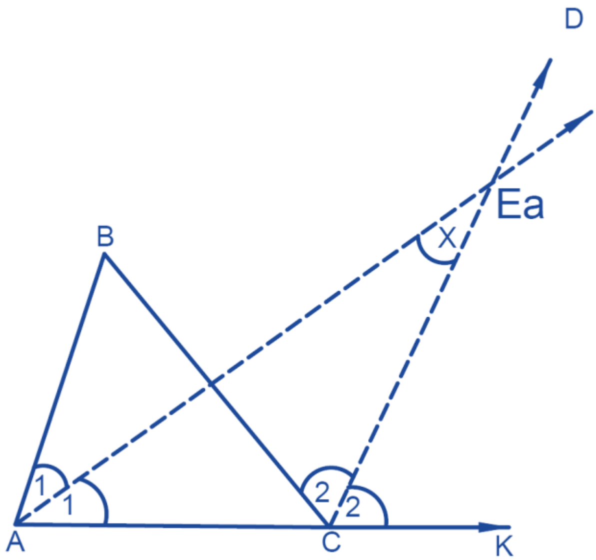
2.- El ángulo formado por dos bisectrices externas de un triángulo es igual a un ángulo recto disminuido en la mitad del ángulo interno en el tercer vértice, no considerado por las bisectrices.

Nota

Como práctica se le sugiere realizar esta demostración a partir de los datos indicados.

3.- El ángulo formado por dos bisectrices, una interna y otra externa de dos vértices diferentes de un triángulo, es igual a la mitad de la medida del ángulo interno correspondiente al tercer vértice no considerado por las bisectrices señaladas.

Figura 5.18



H) Ea = Ex-centro Δ AEC

$T)\quad 1m\angle x = \frac{1m\angle ABC}{2}$

Δ AEC

1m $\angle 2$ = 1m$\angle 1$ + 1m$\angle x$ (T. del áng. ext. al Δ) (a)

1m$\angle x$ = 1m$\angle 2$ - 1m$\angle 1$ (a')

ΔABC

$(2m\angle 2 = 2m1 + 1m\angle ABC)$ (b) $(T.\ del\ \acute{a}ng.\ ext.\ al\ \Delta)$

$\Rightarrow \quad (b/2)$

$$1m\angle 2 = 1m\angle 1 + \frac{1m\angle ABC}{2} \qquad (b')$$

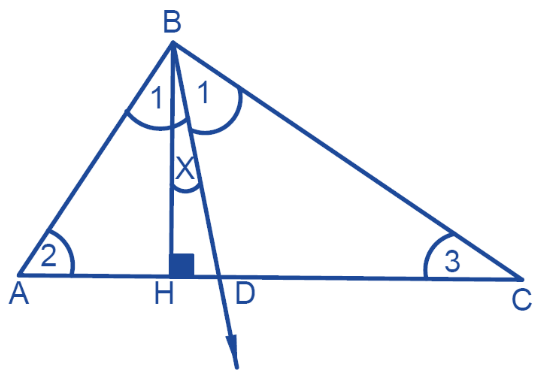
$(a) = (b')$

$$1m\angle 1 + 1m\angle x = 1m\angle 1 + \frac{1\text{m}\angle\text{ABC}}{2} \qquad \Rightarrow \qquad \bullet \quad 1m\angle x$$

$$= \frac{1\text{m}\angle\text{ABC}}{2} \qquad LQQD$$

4.- El ángulo formado por la bisectriz interna y la altura del mismo vértice de un triángulo es igual a la semi-diferencia de las medidas de los ángulos internos en los otros vértices.

Figura 5.19



H) HD bisectriz del $\angle$ ABC

BH = altura.

$T)$ $\quad 1\text{m}\angle x = \dfrac{1\text{m}\angle B\text{AC-}1\text{m}\angle\text{ACB}}{2}$

Δ ABH rectángulo

1m$\angle$1 - 1m$\angle$x + 1m $\angle$2 = 90° (a)

1m$\angle$2 = 1m$\angle$ BAC

Δ BHC rectángulo

1m$\angle$1 + 1m$\angle$x + 1m$\angle$3 = 90° (b)

$1m\angle 3 = 1m\angle ACB$

(a) = (b)

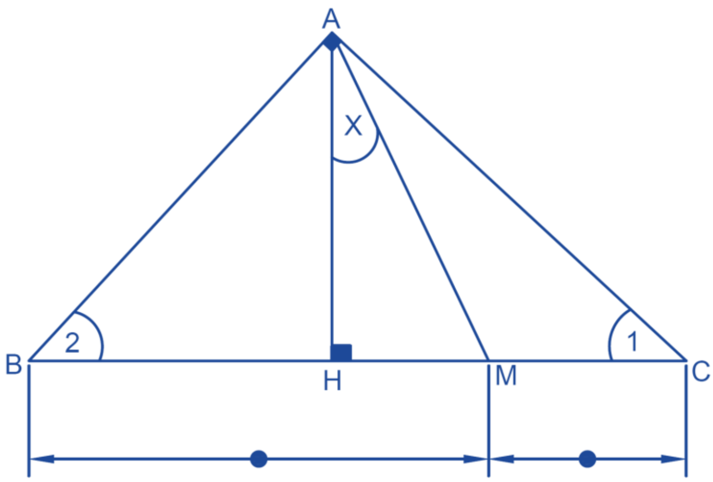
$1m\angle 1 - 1m\angle x + 1m\angle 2 = 1m\angle 1 + 1m\angle x + 1m\angle 3$

$2m\angle x = 1m\angle BAC - 1m\angle ACB$

$$1m\angle x = \frac{1m\angle BAC - 1m\angle ACB}{2} \quad \Rightarrow \quad * \quad 1m\angle x = \frac{1m\angle 2 - 1m\angle 3}{2} \quad \text{LQQD.}$$

5.- El ángulo formado por la altura y la mediana relativas a la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la diferencia de los ángulos agudos.

Figura 5.20



H) AM mediana

AH altura

T) $1m\angle x = 1m\angle ABC - 1m\angle ACB$

Δ ABC   rectángulo

AM = MB = MC   (T. de las medianas en los Δ rectángulos)

Δ BMA   isósceles

1m$\angle$ ABM = 1m$\angle$ BAM = 1m$\angle$ ABC   (T. de los Δ isósceles)

Δ AMC   isósceles

1m$\angle$ MAC = 1m$\angle$ MCA = 1m $\angle$ ACB   (T. de los Δ isósceles)

Δ ABC rectángulo

(2m$\angle$1 + 2m$\angle$2 = 180°) ÷ 2

1m $\angle$1 + 1m$\angle$ 2 = 90°   (T. F. del Δ)   (a)

Δ BHA   rectángulo

1m$\angle$2 - 1m $\angle$x + 1m$\angle$2 = 90°   (T. F. del Δ)   (b)

(b) = (a)

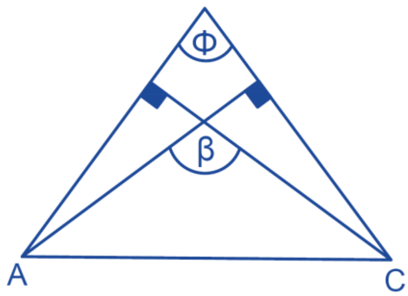
2m$\angle$2 - 1m $\angle$ x = 1m$\angle$1+ 1m$\angle$2   1m $\angle$2 = 1m$\angle$ABC

1m $\angle$2 - 1m $\angle$1= 1m$\angle$x   1m $\angle$1= 1m $\angle$ACB

*** 1m $\angle$x = 1m $\angle$ABC - 1m $\angle$ACB   LQQD**

6.- Ángulo formado por dos alturas.

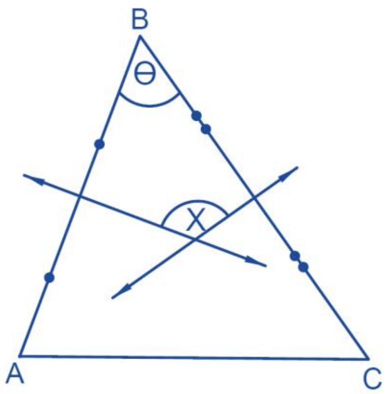
Figura 5.21



$$1m\angle\beta = 2\angle rectos - 1m\angle\varphi$$

7.- Ángulo formado por dos mediatrices.

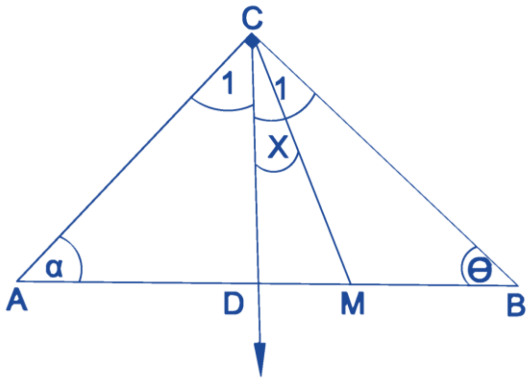
Figura 5.22



$$1m\angle x = 2\angle rectos - 1m\angle\theta$$

8.- Ángulo formado por una bisectriz interna y la mediana, relativas a la hipotenusa de un triángulo rectángulo.

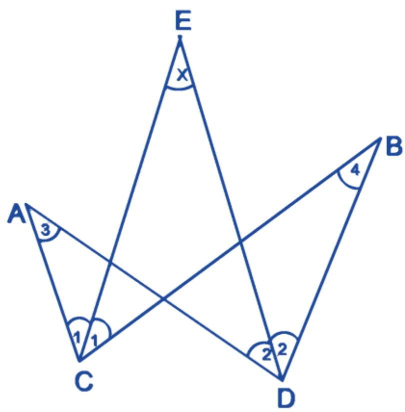
Figura 5.23



$$1m\angle x = \frac{1m\angle\alpha - 1m\angle\theta}{2}$$

9.- Ángulo formado por dos bisectrices.

Figura 5.24

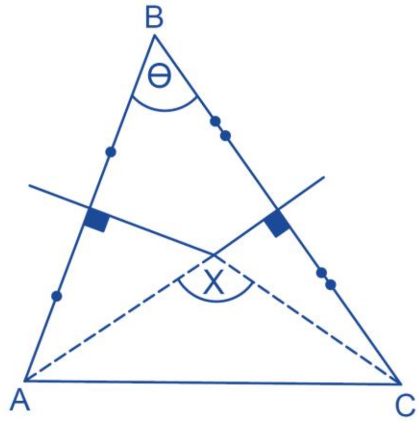


$$1m\angle x = \frac{1m\angle 3 + 1m\angle 4}{2}$$

10.- Propiedad de la mediatriz.

$$1m\angle x = 2m\angle \theta$$

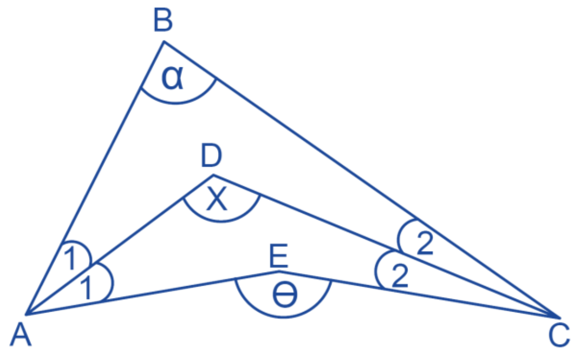
Figura 5.25



12. Ángulo formado por bisectrices.

$$1m\angle x = \frac{1m\angle \alpha + 1m\angle \theta}{2}$$

Figura 5.26



5.8 Preguntas de autoevaluación

1) Dados tres segmentos cualesquiera ¿se puede construir siempre triángulo? ¿Qué condición tienen que cumplir tres segmentos *a*, *b* y *c*, para que con ellos se pueda formar un triángulo?
2) Define el ángulo exterior de un triángulo.
3) ¿Cuántos ángulos exteriores se forman en cada vértice? ¿Cómo son estos ángulos?
4) ¿Qué relación existe entre un ángulo exterior de un triángulo y los interiores no adyacentes?
5) Para asegurar la igualdad de dos triángulos ¿es necesario comprobar que los tres lados y los tres ángulos del primero son respectivamente iguales a los tres lados y los tres ángulos del segundo? ¿Cuántos elementos bastan para determinar un triángulo?

6) Enuncia y comprueba los tres casos de igualdad de triángulos.

7) ¿Cómo se clasifican los triángulos atendidos a sus ángulos? ¿Y atendiendo a sus lados?

8) Define con precisión las siguientes líneas notables de un triángulo: altura, mediana, bisectrices, mediatrices.

9) ¿Cómo se llaman los lados que forman el ángulo recto de un triángulo rectángulo? ¿Y el lado opuesto al ángulo recto?

10) ¿Cuáles son las propiedades más sencillas del triángulo rectángulo?

11) ¿Cuáles son las propiedades más notables de un triángulo isósceles?

12) ¿Qué propiedades notables tiene el triángulo rectángulo isósceles?

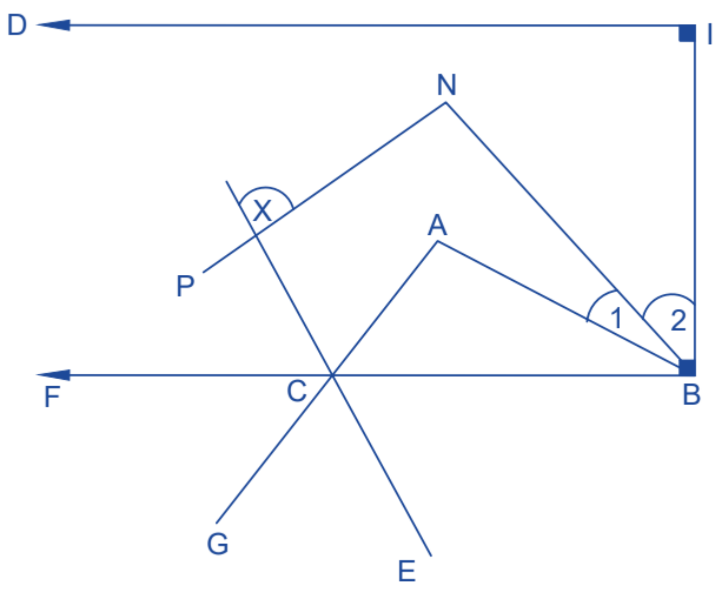
13) ¿Cómo son los tres ángulos de un triángulo equilátero? ¿Por qué? ¿Cuánto vale cada uno?

14) ¿Cuántos datos son necesarios para construir un triángulo rectángulo isósceles?

5.9 Ejercicios propuestos

Ejercicio 5.1.- Calcular la medida del ángulo x de la figura 5.27, conociendo que el 1m∠1=36º, 1m∠BCE=2m∠2 y que 1m∠CGE=3m∠2

Figura 5.27



$H)\quad 1m\angle 1 = 36^{o}$

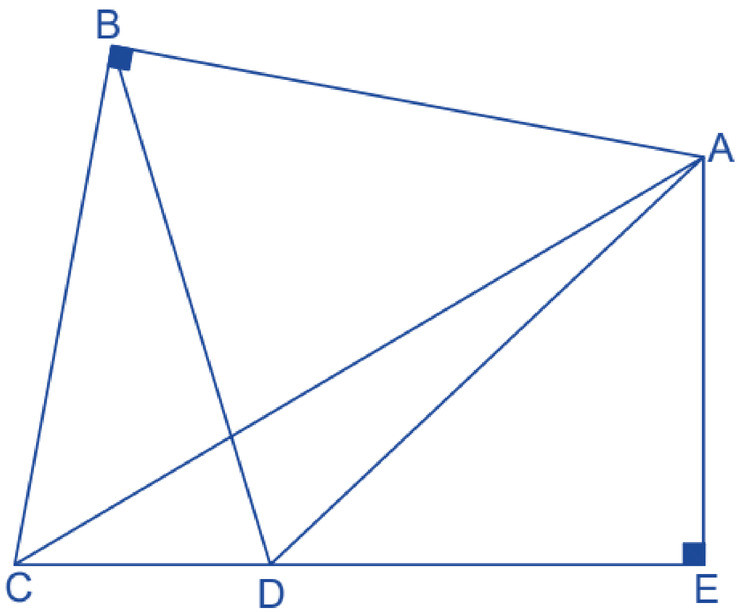
$1m\angle BCE = 2m\angle 2$

$1m\angle GCE = 3m\angle 2$

$T)\ 1m\angle x = ?$

Ejercicio 5.2.- Calcular la medida del ángulo ∠CAE de la figura 5.28, sabiendo que el segmento AB es igual al segmento AD, que la m∠BAD=60º y que la m∠CDA=135º.

Figura 5.28



$H)\quad AB = AD$

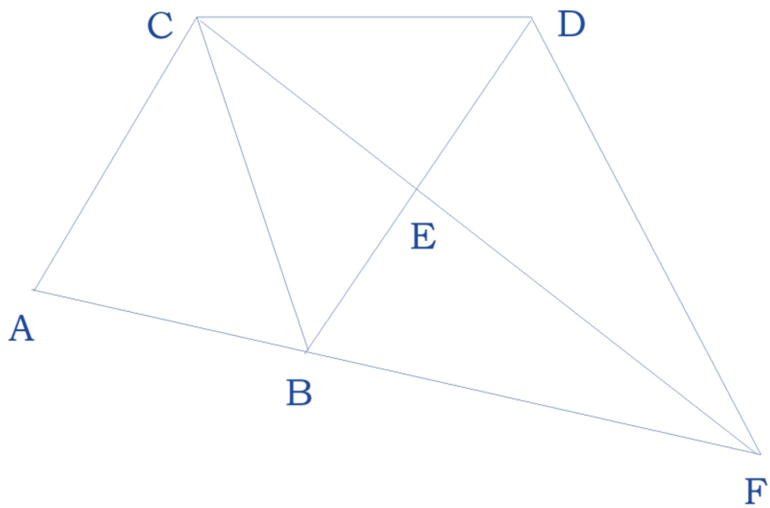
$\quad 1m\angle BAD = 60^{o}$

$\quad m\angle CDA = 135^{o}$

$T)\quad m\angle CAE = ?$

Ejercicio 5.3.- Calcular la medida del ángulo ∠AFC de la figura 5.29, conociendo que el segmento AC es igual al BC, que el segmento BE es igual al ED, que el segmento CE es perpendicular al BD, que la m∠ACB=115º y que la m∠CDE=65º.

Figura 5.29



$H)\quad AC = BC \qquad ; \qquad BE = ED$

$CE \perp BD$

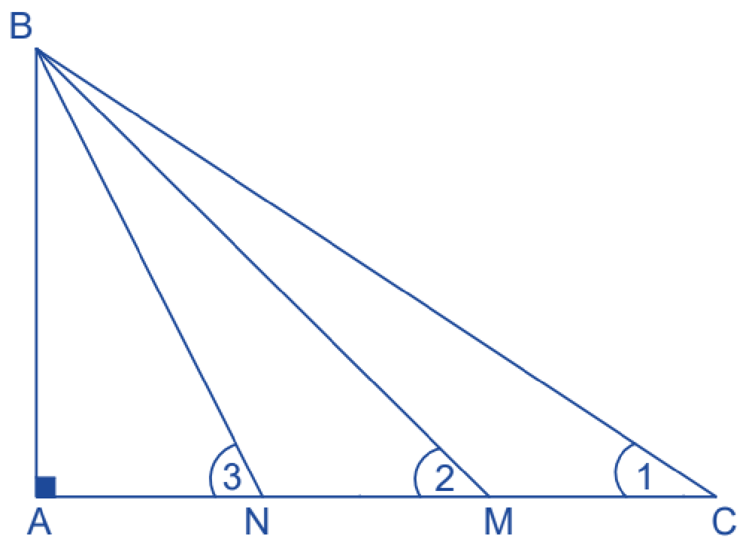
$1m\angle ACB = 115^{o}$

$1m\angle CDE = 65^{o}$

$T)\quad 1m\angle AFC = ?$

Ejercicio 5.4.- Demostrar que 1m∠1+1m∠2+1m∠3=90º en el triángulo de la figura 5.30, sabiendo que el ΔABC es rectángulo, que 3AB=AC y que AN=NM=MC

Figura 5.30



$H)\quad \Delta ABC\ rectángulo$

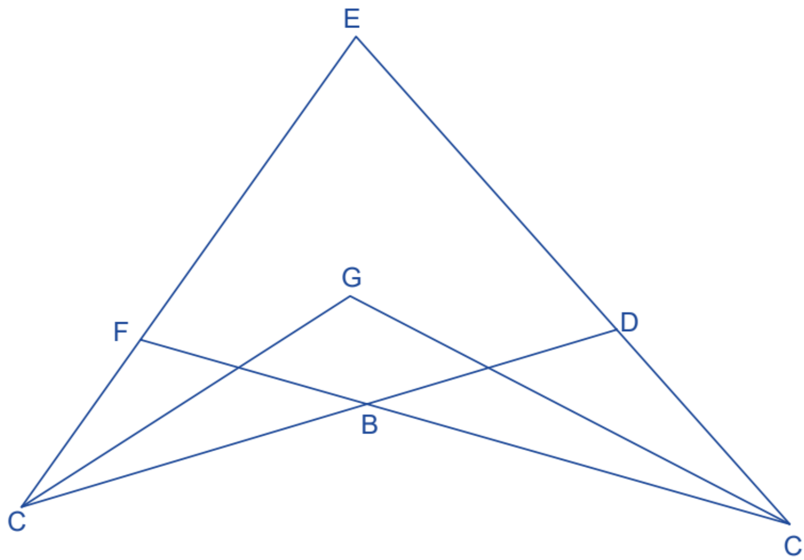
$3AB = AC$

$AN = NM = MC$

$T)\quad 1m\angle 1 + 1m\angle 2 + 1m\angle 3 = 90^{o}$

Ejercicio 5.5.- Calcular la medida del ángulo ∠AGD de la figura 5.31, conociendo que la m∠AFC=40º, la m∠EDB=80º, que GC es bisectriz del ΔFCE y que AG es bisectriz del ΔEAD.

Figura 5.31



$H)\quad 1m\angle AFC = 40^o$

$1m\angle EDB = 80^o$

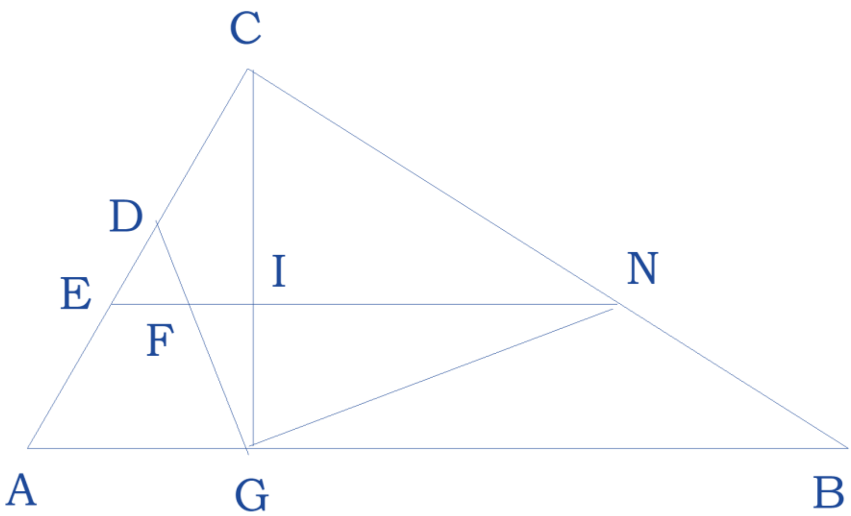
$GC\ \ bi\,sec\,t\,riz\ \ FCE$

$AG\ \ bi\,sec\,t\,riz\ \ EAD$

$T)\quad 1m\angle AGD = ?$

Ejercicio 5.6.- Demostrar que 1m∠EFG=1m∠NGB+90º en el triángulo de la figura 5.32, sabiendo que en el ΔABC el segmento NE es paralelo a AB, FI=IG y que la GN es bisectriz del ∠CGB.

Figura 5.32



$H)\quad \Delta ABC$

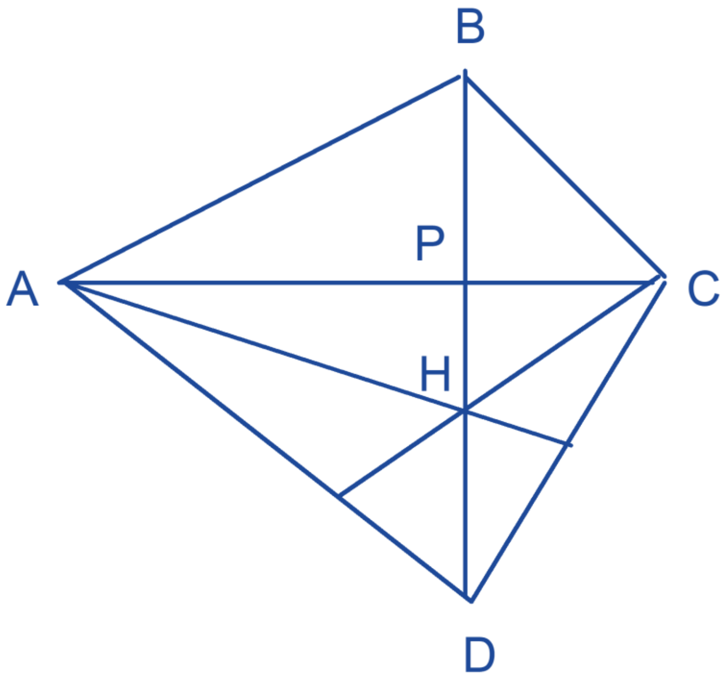
$\quad NE\ II\ AB \qquad FI = IG$

$\quad GN\ bisectriz\ \angle CGB$

$T)\quad 1m\angle EFG = 1m\angle NGB + 90^{o}$

Ejercicio 5.7.- Demostrar que $PB^2=PD.HP$ en el triángulo de la figura 5.33, sabiendo que el ΔABC es rectángulo, el ΔACD es escaleno y el punto “H” es ortocentro.

Figura 5.33



$H)\quad \Delta ABC\ rectángulo$

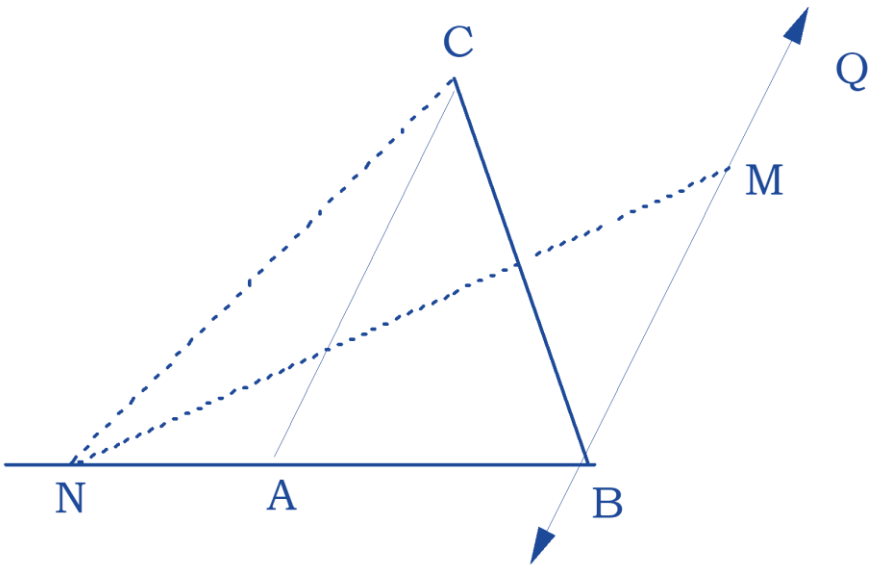
$\quad\quad \Delta ACD\ escaleno$

$\quad\quad "H"\ ortocentro$

$T)\quad PB^2 = PD.HP$

Ejercicio 5.8.- Calcular la medida del ∠ACN para la figura 5.34, conociendo que 1m∠BAC=48º, 1m∠BMN=43º, PQ es paralelo a AC y que MN es mediatriz de BC.

Figura 5.34



$H)$ $1m\angle BAC = 48^{o}$

$1m\angle BMN = 43^{o}$

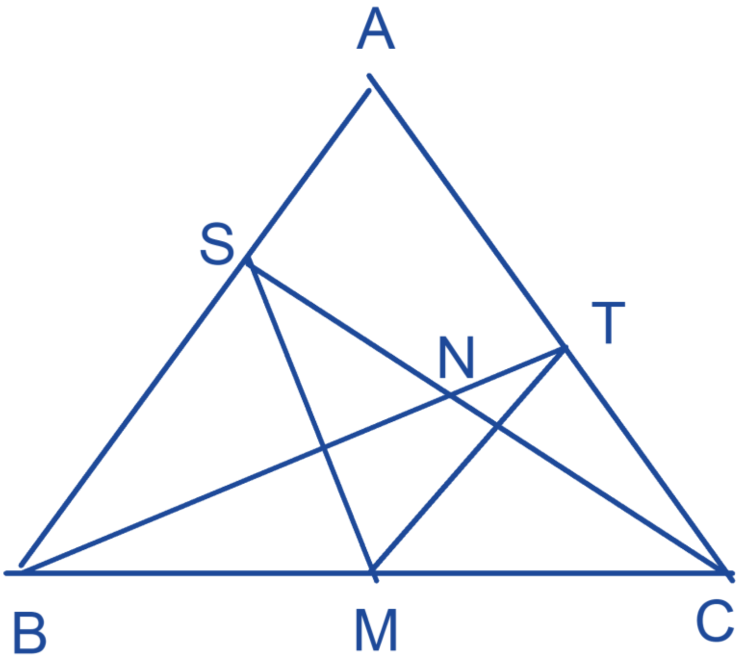
$PQ\ II\ AC$

$MN\ mediatriz\ BC$

$T)$ $1m\angle ACN =?$

Ejercicio 5.9.- Demostrar que BT=CS en el triángulo de la figura 5.35, conociendo que el ΔABC es isósceles, AB=AC, 1m∠SMB=1m∠TMC y que M es punto medio de BC.

Figura 5.35



$H)\quad \Delta ABC\ is\acute{o}sceles$

$AB = AC$

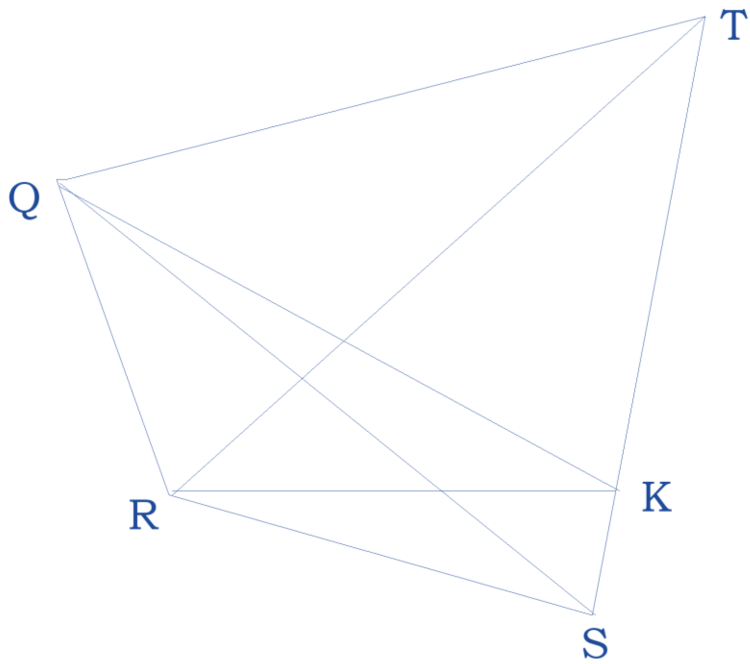
$1m\angle SMB = 1m\angle TMC$

$M\ punto\ medio\ BC$

$T)\quad BT = CS$

Ejercicio 5.10.- Demostrar que el ΔQKR es isósceles, sabiendo que el ΔRST= ΔQST en la figura 5.36.

Figura 5.36



$H) \quad \Delta RST = \Delta QST$

$T) \quad \Delta QKR \text{ es isósceles}$

Referencias

[1] Martinez, E. Aritmetica y geometría. Universidad Abierta para Adultos (UAPA), 2019.

[2] Rojas Álvarez, C J. Introduccion a la geometría. Universidad del Norte, 2015.

[3] Mu R, Carlos B, Jim R, and Mu MR. “Números separables,” XII Conf. Interam. Educación Matemática, 2011.

[4] Jurgensen RC, Donnelly AJ, and Dolciani MP. Geometría moderna: estructura y método. Publicaciones Cultural, 1968.

[5] Islas Salomon CA, Colin Uribe MP, and Morales Tellez F, Geometría y trigonometría. Grupo Editorial Éxodo, 2017.

[6] Gildardo M. “El siglo de la geometría,” Apunt. Hist. las matemáticas, vol. 1, no. 2, pp. 5–15, 2002.

[7] Albuja G, Margarita S, and V. Patricio V. Geometría básica, Sexta. 2008.

[8] Bruño GM. Geometría - Curso Superior. 2005.

[9] “Segmentos no colineales.” [Online]. Disponible: https://apuntes123.blogspot.com/2007/12/segmento-de-recta-tipos.html.

[10] “Quebrada Poligonal.” [Online]. Disponible: https://laboratoriodematematicas.weebly.com/blog/unidad-12-dibujamos-figuras-planas.

[11] “Poligonal.” [Online]. Disponible: https://www.escolares.net/matematicas/linea-poligonal/.

[12] "Línea mixta." [Online]. Available: Disponible: http://dibujoingsistemas.blogspot.com/2017/03/las-lineas-las-lineas-se-clasifican.html.

[13] "Línea Espiral."

[14] "Semi plano." [Online]. Disponible: http://detodounpoco.cl/esco23008.htm.

[15] Wikipedia, "Superficie curva." [Online]. Disponible: https://es.wikipedia.org/wiki/Curvatura_de_Gauss.

[16] "Superficies poliédrica." [Online]. Available: https://docplayer.es/41844529-Sistema-diedrico-ii-superficies-poliedricas-y-radiadas-representacion.html.

[17] "Grupo geométrico." [Online]. Disponible: https://www.pinterest.es/pin/506092076856832770/.

[18] Figueroa M. Geometría y trigonometría. Firmas Press, 2010.

[19] Calvache G, Rosero T, and Yacelga M. Geometría plana y del espacio, geometría analítica, dibujo, Primera. Quito, 2011.

[20] Gomez Lopez N, and L. Tejada Betancourt L. Álgebra y geometría. Universidad Abierta para Adultos (UAPA), 2018.

[21] Hernández R, Metodología de la investigación. Las rutas cuantitativa, cualitativa y mixta. Las rutas Cuantitativa Cualitativa y Mixta. 2018.

[22] "Parcelas egipcias." [Online]. Disponible: http://descargas.pntic.mec.es/cedec/mat3_2/contenidos/M3_U6/parcelando_el_terreno.html.

[23] "Triángulo egipcio." [Online]. Disponible: https://www.geogebra.org/m/nfkuxems.

[24] Gallegos FA. Geometría - teoría y práctica. 2015.

[25] Álvarez E. Elementos de geometría: con numerosos ejercicios y geometría del compás. Universidad de Medellín, 2003.

[26] Ubaldo L. Geometría, Primera. 2007.

[27] Ramírez Caudillo L. Geometría y trigonometría: basado en competencias. Grupo Editorial Éxodo, 2011.

[28] Carpinteyro Vigil E. Geometría y trigonometría: conceptos y aplicaciones. Grupo Editorial Patria, 2018.

Semblanza de los autores

Víctor Hugo Vásconez Velasco

Ecuatoriano, reside en Riobamba, es Ingeniero Mecánico (1983) por la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo-Ecuador, Especialista en Computación aplicada al Ejercicio Docente (2002) por la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo-Ecuador, Magíster en Docencia Universitaria e Investigación Educativa (2003) por la Universidad Nacional de Loja. Se desempeñó por 34 años como profesor principal en la Facultad de Mecánica de la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo en las Áreas de Ciencias Básicas, con las asignaturas de Geometría Plana y Trigonometría. Se desempeñó como Director de la Carrera de Ingeniería Mecánica y Vicedecano de la Facultad de Mecánica de la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo.

Daniela Carina Vásconez Núñez

Ecuatoriana, reside en Riobamba, es Ingeniera Mecánica (2011) por la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo-Ecuador, Máster en Tecnología Energética para el Desarrollo Sostenible (2014), Máster en Cultura Científica y de la Innovación (2021) y Doctora (Ph.D.) en Ingeniería y Producción Industrial (2019) por la Universidad Politécnica de Valencia-España. Profesora e investigadora universitaria de la Facultad de Mecánica de la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo en el área de energía y ciencias básicas. Miembro del grupo de investigación GIDENM. Autora de varios artículos científicos publicados en revistas indexadas regionales y de alto impacto; ha participado en varios certámenes académicos en el área de energía a nivel nacional e internacional.

Vanessa Alexandra Vásconez Núñez

Ecuatoriana, reside en Riobamba, es Ingeniera Electrónica en Telecomunicaciones y Redes (2012) por la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo-Ecuador, Máster Universitario en Ingeniería de Computadores y Redes (2016) por la Universidad Politécnica de Valencia-España, Máster Universitario en Ingeniería Matemática y Computación (2022) por la Universidad Internacional de la Rioja - España. Fue docente universitaria en la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo y en la Universidad Nacional de Chimborazo. Actualmente se desempeña como Técnico de Apoyo Académico en la Universidad Nacional de Chimborazo. Autora de artículos de investigación publicados en revistas indexadas. Ha participado en cursos, talleres, seminarios y congresos a nivel nacional e internacional.

Fernando Mauricio Tello Oquendo

Ecuatoriano, reside en Riobamba, es Ingeniero Mecánico (2011) por la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo-Ecuador, Máster en Tecnología Energética para el Desarrollo Sostenible (2014), Máster en Cultura Científica y de la Innovación (2021) y Doctor (Ph.D.) en Ingeniería y Producción Industrial (2019) por la Universidad Politécnica de Valencia-España. Profesor e investigador universitario de la Facultad de Mecánica de la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo en el área de energía. Miembro del grupo de investigación GIDENM. Autor de varios artículos científicos publicados en revistas indexadas regionales y de alto impacto; ha participado en varios certámenes académicos en el área de energía a nivel nacional e internacional; miembro de comités editoriales de revistas regionales, par revisor de varias revistas indexadas internacionales.

La presente publicación, es el primero de dos tomos, que tienen por objetivo acercar al lector al cálculo y análisis de las diferentes figuras geométricas, siendo un instrumento imprescindible para el estudio del álgebra, trigonometría, cálculo, física, dibujo técnico, entre otras ciencias de la ingeniería. El Tomo I está estructurado en cinco capítulos, el primero describe los conceptos y definiciones básicos de la Geometría Euclidiana, los demás capítulos detallan las propiedades, teoremas, postulados y operaciones con segmentos rectilíneos, ángulos en el plano, polígonos y triángulos. Cada capítulo contiene preguntas de autoevaluación, ejercicios resueltos y ejercicios propuestos, de tal manera que se optimice el tiempo de la resolución de aplicaciones de la geometría plana.

ISBN: 978-9942-636-18-8

9789942636188