GEOMETRÍA PLANA PARA INGENIERÍA

Ejercicios resueltos

Víctor Hugo Vásconez Velasco
Daniela Carina Vásconez Núñez
Vanessa Alexandra Vásconez Núñez
Fernando Mauricio Tello Oquendo

CIDE EDITORIAL

GEOMETRÍA PLANA

PARA LA INGENIERÍA

Ejercicios resueltos

GEOMETRÍA PLANA

PARA LA INGENIERÍA

Ejercicios resueltos

AUTORES
Víctor Hugo Vásconez Velasco
Daniela Carina Vásconez Núñez
Vanessa Alexandra Vásconez Núñez
Fernando Mauricio Tello Oquendo

Centro de Investigación y Desarrollo Ecuador
Tel.: + (593) 04 2037524
http.:/www.cidecuador.org

ISBN: 978-9942-616-32-6

https://doi.org/10.33996/cide.ecuador.GP2616326

Dirección editorial: Lic. Pedro Misacc Naranjo, Msc.
Coordinación técnica: Lic. María J. Delgado
Diseño gráfico: Lic. Danissa Colmenares
Diagramación: Lic. Alba Gil
Fecha de publicación: abril, 2023

La presente obra fue evaluada por pares académicos experimentados en el área.

Catalogación en la Fuente

Geometría Plana para la Ingeniería. Ejercicios resueltos / Víctor Hugo Vásconez Velasco, Daniela Carina Vásconez Núñez, Vanessa Alexandra Vásconez Núñez y Fernando Mauricio Tello Oquendo.--Ecuador: Editorial CIDE, 2023.

288 p.: incluye tablas, figuras; 17,6 x 25 cm.

ISBN: 978-9942-616-32-6

Semblanza de los Autores

Víctor Hugo Vásconez Velasco

Ecuatoriano, reside en Riobamba, es Ingeniero Mecánico (1983) por la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo-Ecuador, Especialista en Computación Aplicada al Ejercicio Docente (2002) por la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo-Ecuador, Magíster en Docencia Universitaria e Investigación Educativa (2003) por la Universidad Nacional de Loja. Se desempeñó por 34 años como profesor principal en la Facultad de Mecánica de la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo en las Áreas de Ciencias Básicas, con las asignaturas de Geometría Plana y Trigonometría. Se desempeñó como Director de la Carrera de Ingeniería Mecánica y Vicedecano de la Facultad de Mecánica de la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo.

Daniela Carina Vásconez Núñez

Ecuatoriana, reside en Riobamba, es Ingeniera Mecánica (2011) por la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo-Ecuador, Máster en Tecnología Energética para el Desarrollo Sostenible (2014), Máster en Cultura Científica y de la Innovación (2021) y Doctora (Ph.D.) en Ingeniería y Producción Industrial (2019) por la Universidad Politécnica de Valencia-España. Profesora e investigadora universitaria de la Facultad de Mecánica de la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo en el área de energía y ciencias básicas. Miembro del grupo de investigación GIDENM; autora de varios artículos científicos publicados en revistas indexadas regionales y de alto impacto; ha participado en varios certámenes académicos en el área de energía a nivel nacional e internacional.

Vanessa Alexandra Vásconez Núñez

Ecuatoriana, reside en Riobamba, es Ingeniera Electrónica en Telecomunicaciones y Redes (2012) por la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo-Ecuador, Máster Universitario en Ingeniería de Computadores y Redes (2016) por la Universidad Politécnica de Valencia-España, Máster Universitario en Ingeniería Matemática y Computación (2022) por la Universidad Internacional de la Rioja - España. Fue docente universitaria en la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo y en la Universidad Nacional de Chimborazo, actualmente se desempeña como Técnico de Apoyo Académico en la Universidad Nacional de Chimborazo. Autora de artículos de investigación publicados en revistas indexadas. Ha participado en cursos, talleres, seminarios y congresos a nivel nacional e internacional.

Fernando Mauricio Tello Oquendo

Ecuatoriano, reside en Riobamba, es Ingeniero Mecánico (2011) por la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo-Ecuador, Máster en Tecnología Energética para el Desarrollo Sostenible (2014), Máster en Cultura Científica y de la Innovación (2021) y Doctor (Ph.D.) en Ingeniería y Producción Industrial (2019) por la Universidad Politécnica de Valencia-España. Profesor e investigador universitario de la Facultad de Mecánica de la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo en el área de energía. Miembro del grupo de investigación GIDENM; autor de varios artículos científicos publicados en revistas indexadas regionales y de alto impacto, ha participado en varios certámenes académicos en el área de energía a nivel nacional e internacional; miembro de comités editoriales de revistas regionales, par revisor de varias revistas indexadas internacionales.

Dedicatoria

A la memoria de mis padres Teresita y Luis, por su apoyo, amor incondicional y su ejemplo de perseverancia.

Victor Hugo Vásconez Velasco

Índice

Capítulo 1
Segmentos rectilíneos

Capítulo 2
Ángulos en el plano

Capítulo 3
Polígonos

Capítulo 4
Triángulos

Capítulo 5
Círculo y circunferencia

Capítulo 6
Áreas de regiones rayadas

Introducción

"No hay un camino real para la Geometría."

— *Euclides*

La Geometría Plana es una parte de la matemática que se encarga del estudio de las propiedades y las medidas de una figura geométrica en un plano. Para representar distintos aspectos de la realidad, la geometría plana emplea los sistemas formales o axiomáticos (compuestos por símbolos que se unen respetando reglas y que forman cadenas, las cuales también pueden vincularse entre sí) y a nociones como rectas, curvas y puntos, entre otras.

La presente obra tiene el objetivo de brindar al lector una herramienta para definir los conceptos básicos de la Geometría Plana, poniendo énfasis en las propiedades, teoremas, operaciones de segmentos, ángulos, triángulos, polígonos, circunferencia y áreas, para su eficaz aplicación en la resolución de ejercicios. Los ejercicios que se han desarrollado utilizando procedimientos sencillos, proposiciones fundamentales, ayudando de esta forma a los lectores en mejorar el aprendizaje y la enseñanza de la Geometría Plana.

En este libro se presentan ejercicios tipo que son base fundamental para el ingeniero en el desarrollo de habilidades y destrezas que contribuyen en su desenvolvimiento en el álgebra, dibujo técnico, cálculo, trigonometría, física, y demás tópicos básicos de ingeniería. En esta obra encontrarán 155 ejercicios de: segmentos rectilíneos, ángulos, triángulos, polígonos, circulo y regiones rayadas, además, cada capítulo cuenta con una introducción teórica, que permitirá recordar los fundamentos geométricos aplicados en la solución de los ejercicios.

Los logros de aprendizaje que se persiguen con la presente obra son que los lectores sean capaces de identificar las operaciones con segmentos rectilíneos, reconocer los tipos de ángulos, determinar los teoremas aplicados a polígonos, identificar los tipos de triángulos, sus teoremas, postulados, así como los puntos, segmentos y rectas notables del triángulo; aplicar los teoremas y corolarios del círculo, así como las relaciones métricas en la circunferencia y finalmente calcula áreas de diferentes figuras geométricas.

CAPÍTULO 1

Segmentos rectilíneos

Capítulo 1
Segmentos rectilíneos

1

“El Álgebra no es más que Geometría y la Geometría no es más que Álgebra abstracta”

— *Sophie Germain.*

Objetivo

Emplear de los elementos simples de la Geometría Plana, definiendo e interpretando los métodos de demostración, aplicando las operaciones básicas y proposiciones para la resolución de ejercicios de segmentos rectilíneos.

Logros de aprendizaje

El lector estará en capacidad de:

- Aplicar las operaciones aritméticas en los segmentos rectilíneos.
- Aplicar las propiedades de la proporcionalidad entre segmentos.
- Analizar los métodos de demostración.
- Realizar ejercicios de aplicación sobre segmentos rectilíneos siguiendo un proceso adecuado y sencillo.

Introducción teórica

Operaciones con segmentos rectilíneos

Suma de segmentos

La adición de dos o más segmentos consecutivos es otro segmento cuya longitud es igual a la suma de las longitudes de todos y cada uno de los segmentos parciales considerados.

Resta de segmentos

Se llama diferencia de dos segmentos, teniendo que el primer segmento es mayor que el segundo, a un tercer segmento tal que, sumando con el menor llamado SUSTRAENDO, se obtenga un segmento igual al mayor o MINUENDO.

Producto de un segmento por un número natural

Multiplicar un segmento por un número natural es hallar la suma de tantos segmentos iguales al considerado, como unidades expresan el número.

División de un segmento por un número natural

Se llama cociente de un segmento para un número natural, a otro segmento total que multiplicado por el número considerado se obtenga un segmento igual al primero. Todo segmento puede dividirse en cualquier número de partes iguales.

Razón simple

Es el número que resulta como cociente al dividir la medida de uno entre la medida del otro, estando ambas medidas expresadas en las mismas unidades, una razón se puede presentar como una fracción, quebrado o una división. La razón a la vez es una cantidad adimensional o cantidad abstracta.

Proporción

Es la proposición de que dos razones son iguales, debiendo cumplirse que el valor de la una razón debe ser igual al valor de la otra razón. En una proporción también existen lo que se puede conocer como elementos extremos, elementos medios, términos antecedentes, y términos consecuentes.

Propiedades de las proporciones y serie de razones

- En una proporción pueden invertirse las razones.
- El producto de los extremos es igual al producto de los medios.
- En una proporción a cada antecedente se le puede sumar su respectivo consecuente o, a su vez, a su consecuente sumar su respectivo antecedente.

- En una proporción a cada antecedente se le puede restar su respectivo consecuente o, a su vez, a cada consecuente se le resta su respectivo antecedente.
- En una serie de razones iguales, la suma de los antecedentes es a la suma de los consecuentes; como uno cualquiera de sus antecedentes es su respectivo consecuente.
- La resta de los antecedentes con respecto a la resta de los consecuentes es igual a cualquiera de las razones.
- En toda proporción, la suma de los términos de la primera razón es a su diferencia, como la suma de los términos de la segunda razón es a su diferencia.
- En toda proporción, la suma de los términos de la primera razón es a la suma de los términos de la segunda razón, como la diferencia entre los términos de la primera razón es a la diferencia entre los términos de la segunda.
- Si en una proporción se cambian los medios entre sí, a los extremos entre sí, se obtiene una nueva proporción.

División interna de un segmento

Consiste en ubicar un punto que se encuentre en el interior del segmento planteado como dato.

División externa de un segmento

Consiste en localizar un punto que se encuentra en el exterior del segmento.

División armónica

Consiste en encontrar simultáneamente un punto en el interior y exterior del segmento dado; es una combinación de los casos anteriores.

Ejercicios de segmentos rectilíneos

Ejercicio 1.1.

Para el segmento de la figura 1.1, determine la coordenada del punto M conociendo que $\frac{AP}{PB} = 3/4$ y que el segmento AB es igual al segmento PM.

Figura 1.1

$H)\ \dfrac{AP}{PB} = \dfrac{3}{4}$

$AB = PM$

$T)\ M = ?$

Solución:

$a)\quad \overline{AB} = \overline{PM} \quad por\ hipótesis$

$b)\quad AB = 600 + |-500| \quad suma\ de\ seg.$

$\overline{AB} = 1100\ unid. = \overline{PM}$

$c)\quad \dfrac{\overline{AP}}{PB} = \dfrac{3}{4} \quad por\ hipótesis$

$d)\quad \dfrac{AD + PB}{PB} = \dfrac{3+4}{4} \quad propiedad\ de\ las\ proporciones$

$e)\quad AP + PB = AB \quad suma\ de\ seg.$

$\dfrac{AB}{PB} = \dfrac{7}{4} \qquad \Rightarrow \qquad \dfrac{1100}{PB} = \dfrac{7}{4}$

$f)\quad PB = 628.57\ unid.$

$g)\quad PM = PB + BM\ suma\ de\ seg. \qquad BM$

$= (1100 - 628.57)\ unid.$

$BM = 471.43\ unid.$

$M = B + BM = 600 + 471.43 \qquad : \qquad \boldsymbol{M}$

$= \mathbf{1071.43\ unid.} \quad \boldsymbol{LQQD}.$

Ejercicio 1.2.

Para el segmento de la figura 1.2, determine la longitud del segmento PR conociendo que $\frac{AP}{PB} = 5/3$, la longitud del segmento AB es 40 unidades y que el segmento PB es igual al segmento BR.

Figura 1.2

$H) \quad \dfrac{AP}{PB} = \dfrac{5}{3}$

$AB = 40\ unid$

$PB = BR$

$T) PR = ?$

Solución:

$a) \quad \dfrac{AP}{PB} = \dfrac{5}{3} \quad por\ \rightleftarrows hipótesis$

$b) \quad \dfrac{AP + PB}{PB} = \dfrac{5+3}{3} \quad propiedad\ de\ las\ proporciones$

$c) \quad AP + PB = AB \quad por\ hipótesis$

$(c)\ en\ (b)$

$\dfrac{AB}{PB} = \dfrac{8}{3} \quad : \quad \dfrac{40}{PB} = \dfrac{8}{3} \quad : \quad PB = 15\ unid$

$= \ BR \quad por\ hipótesis$

$PR = 2PB = 2BR = 2(15unid) \quad . \quad : \quad \boldsymbol{PR = 30\ unid}. \quad \boldsymbol{LQQD}.$

Ejercicio 1.3.

Para el segmento de la figura 1.3, demuestre que $AE + BC - 2AC = BD$ conociendo $AC = DE$.

Figura 1.3

$H)AC = DE$

$T)AE + BC - 2AC = BD$

Solución:

$a)\quad AE = AB + BD + DE \quad por\ suma\ de\ seg.$

$b)\quad BC = BD - CD \quad por\ diferencia\ de\ seg.$

$(a) + (b)$

$c)\quad AE + BC = AB + BD + DE + BD - CD$

$d)\quad AB = AC - BC \qquad por\ diferencia\ de\ segmentos$

$e)\quad AC = DE \qquad por\ hipótesis$

$(b)\ ,\ (d) y\ (e)\ en\ (c)$

$f)\quad AE + BC = 2BD + AC + AC - BC - CD$

$\Rightarrow \qquad AE + BC = 2BD + 2AC - (BC + CD)$

$AE + BC = 2BD + 2AC - BD$

$$\boldsymbol{AE + BC - 2AC = BD \quad LQQD}$$

Ejercicio 1.4.

En la figura 1.4, el punto "Q" divide externamente al segmento AB en una razón $\frac{x}{y} = \frac{2}{9}$. Siendo M el punto medio de AB. Determinar la longitud de QM, si AM= 28 unidades.

Figura 1.4

$H)\,\dfrac{x}{y} = \dfrac{2}{9}$

$AM = 28\ unid.$

$M = Punto\ medio\ de\ AB$

$T)\,QM = ?$

Solución:

$\boldsymbol{a})\quad \dfrac{\boldsymbol{AQ}}{\boldsymbol{QB}} = \dfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{9}}$

$b)\quad \dfrac{AQ}{BQ - AQ} = \dfrac{2}{9-2} \qquad por\ propiedad\ de\ las\ proporciones$

$c)\quad BQ - AQ = AB \qquad Diferencia\ de\ segmentos$

$(c)\ en\ (b)$

$d)\quad \dfrac{AQ}{AB} = \dfrac{2}{7}$

$e)\quad AB = AM + AM \qquad por\ hipótesis.$

$f)\quad AB = 56\ unid.$

$(f)\ en\ (d)$

$g)\quad AQ = \dfrac{2AB}{7} = \dfrac{2(56\ unid.)}{7} = 16\ unid.$

$h)\quad QM = AQ + AM \qquad por\ suma\ de\ segmentos$

$$QM = (16 + 28)\ unid. \qquad : \qquad QM = 44\ unid. \quad LQQD.$$

Ejercicio 1.5.

Dado el segmento de la figura 1.5, determine la longitud del segmento CD sabiendo que la longitud del segmento DE es igual a dos veces la longitud del segmento CD; la longitud del segmento DE es igual a tres veces la longitud del segmento AB y que la longitud del segmento AE es 100 unidades.

Figura 1.5

$H)\ DE = 2CD$

$3AB = DE$

$AE = 100\ unidades$

$T)\ CD = ?$

Solución:

$a)\quad AC = 2AB = 2BC \qquad por\ hipótesis$

$b)\quad AE = 100\ unid. \qquad por\ hipótesis$

$c)\quad AB + BC + CD + DE = 100\ unid.\ por\ suma\ de\ segmentos$

$d)\quad AB + BC + CD + 3AB = 100$

$e)\quad 5AB + CD = 100\ unid.$

$$f)\quad AB = \frac{DE}{3} = \frac{2CD}{3} \qquad por\ hipótesis$$

$$(f)\ en\ (e)$$

$$h)\quad 5\left(\frac{2}{3}CD\right) + CD = 100\ unid.$$

$$\frac{10}{3}CD + CD = 100\ unid.$$

$$\frac{13}{3}CD = 100\ unid.$$

$$CD = \frac{300\ unid.}{13} \qquad : \qquad \boldsymbol{CD = 23,07\ unidades \quad LQQD}.$$

Ejercicio 1.6.

Encontrar las coordenadas de P y Q que dividen armónicamente al segmento AB de la figura 1.6, sabiendo que: X_A = 100 unidades y X_B = 800 unidades, en una razón $\frac{x}{y} = \frac{1}{4}$.

Figura 1.6

$H)\ \frac{x}{y} = \frac{1}{4}$

$T)\ P\ y\ \ Q = ?$

Solución:

$$a)\quad \frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QB} = \frac{1}{4} \qquad por\ definición\ de\ división\ armónica$$

$$b) \quad \frac{AP+PB}{PB}=\frac{1+4}{4} \qquad por\ propiedad\ de\ las\ proporciones$$

$$c) \quad \frac{AB}{PB}=\frac{5}{4}$$

$$AB=(800-100)unid.=700\ unid.$$

$$d) \ \frac{700}{PB}=\frac{5}{4} \quad \Rightarrow \qquad PB=560\ unid.$$

$$e) \quad P=B-PB \quad coordenada\ de\ P$$

$$(d)\ en\ (a)$$

$$P=800-560 \qquad : \qquad * \quad \boldsymbol{P=240\ \ LQQD.}$$

$$f) \quad \frac{AQ}{QB-AQ}=\frac{1}{4-1} \qquad por\ propiedad\ de\ las\ proporciones$$

$$\frac{AQ}{AB}=\frac{1}{3} \qquad : \qquad QA=233{,}3\ unid.$$

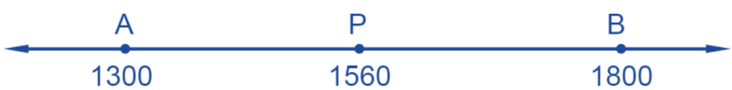
$$h) \quad Q=A-AQ \quad Coordenada\ de\ Q$$

$$Q=100-233{,}3 \qquad : \qquad * \quad \boldsymbol{Q=-133,3\ \ LQQD.}$$

Ejercicio 1.7.

El punto P divide internamente al segmento AB de la figura 1.7, teniendo las coordenadas de: A = 1300 u, B = 1800 u y P = 1560 u. Determinar la razón x/y.

Figura 1.7



T) x/y=?

Solución:

$a)\quad \dfrac{AP}{PB} = \dfrac{x}{y} \quad por\ definición\ de\ división\ interna$

$b)\quad AP = P - A \quad por\ coordenadas$

$AP = 1560 - 1300 \qquad : \qquad AP = 260\ unidades \quad (b\,*)$

$c)\quad PB = B - P \quad por\ coordenadas$

$PB = 1800 - 1560 \qquad : \qquad PB = 240\ unidades \quad (c\,*)$

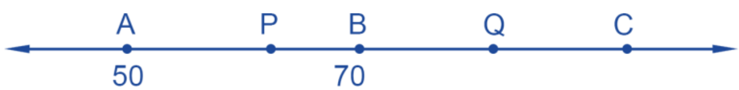
$(b\,*)\ y\ (c\,*)\ en\ (a)$

$\dfrac{260\ unid.}{240\ unid.} = \dfrac{x}{y} \qquad : \qquad \boldsymbol{\dfrac{x}{y} = 1.083 \rangle 1 \quad LQQD}$

Ejercicio 1.8.

Hallar las coordenadas de los puntos P, Q y C de la figura 1.8, sabiendo que se cumple la igualdad $\boldsymbol{\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{BQ} = \frac{7}{2} = \frac{BQ}{QC}}$.

Figura 1.8



$H)\ \frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{BQ} = \frac{7}{2} = \frac{BQ}{QC}$

$T)\quad P\ ,\ Q\ y\ C\ \ =?$

Solución:

$a)\quad AB = 70 - 50 \quad : \quad AB = 20\ unidades$

$b)\quad \dfrac{AP}{PB} = \dfrac{7}{2} \quad por\ hipótesis$

$c)\quad \dfrac{AP + PB}{PB} = \dfrac{7+2}{2} \quad propiedad\ de\ las\ proporciones$

$\dfrac{20}{PB} = \dfrac{9}{2} \quad : \quad PB = 4{,}4\ unidades$

$d)\quad PB = B - P \quad por\ coordenadas$

$P = 70 - PB \quad * \quad P = 65.6 \quad LQQD.$

$e)\quad \dfrac{AQ}{QB} = \dfrac{7}{2} \quad por\ hipótesis$

$f)\quad \dfrac{AQ - QB}{QB} = \dfrac{7-2}{2} \quad propiedad\ de\ las\ proporsiones$

$\dfrac{20}{QB} = \dfrac{5}{2} \quad : \quad QB = 8\ unidades$

$g)\quad Q = B + QB \quad \Rightarrow \quad Q = 70 + 8 \quad : \quad * \quad \boldsymbol{Q} = \mathbf{78} \quad \boldsymbol{LQQD}.$

$h)\quad \dfrac{BQ}{QC} = \dfrac{7}{2} \quad por\ hipótesis \quad \Rightarrow \quad \dfrac{8}{QC} = \dfrac{7}{2} \quad : \quad QC = 2{,}28\ unidades$

$i)\quad C = Q + QC \quad : \quad C = 78 + 2.28 \quad \Rightarrow \quad * \quad \boldsymbol{C} = \mathbf{80.28} \quad \boldsymbol{LQQD}.$

Ejercicio 1.9.

P y O dividen armónicamente al segmento AB de la figura 1.9 en una razón, siendo AB = 60 unidades. Determinar la longitud del segmento AP sabiendo que 3AO = PB.

Figura 1.9

$H)AB = 60\ unidades$

$3AO = PB$

$T)AP = ?$

Solución:

$a)\quad \frac{AP}{PB} = \frac{AO}{QB}$ $\qquad$ $por\ definición\ de\ división\ armónica$

$b)\quad AP + PB = AB$ $\qquad$ $suma\ de\ segmentos$

$c)\quad \frac{AP}{AB - AP} = \frac{AO}{OB - AO}$ $\qquad$ $propiedad\ de\ las\ proporciones$

$d)\quad AB + AO = OB$ $\qquad : \qquad$ $OB - AO = AB = 60\ unidades$

$e)\quad \frac{AP}{PB - AP} = \frac{AO}{60}$

$f)\quad 3AO = PB$ $\qquad$ $por\ hipótesis$

$h)\quad \frac{AP}{3AO - AP} = \frac{AO}{60}$

$i)\quad 3\overline{AO}^2-(AO)(AP)-60AP=0$

$(b)\ y\ (f)\ en\ (i)$

$j)\quad AO^2+20AO-600=0$

$AO_1=16.46\ unid. \quad : \quad AO_2=-36.46\ unid.$

$3(16.46)unid=PB \quad : \quad PB=49.38\ unidades$

$k)\quad AP=AB-PB$

$AP=(60-49.38)unid. \quad : \quad \boldsymbol{AP}$

$\boldsymbol{=10.62\ unidades \quad LQQD}$

Ejercicio 1.10.

Dado el segmento de la figura 2.10, si Q divide externamente al segmento AB en media y extrema razón tal que $\frac{x}{y}<1$ y AB = 80 u. Determinar QB.

Figura 1.10

$H)\ AB=80\ unidades$

$T)\ \overline{QB}=?$

Solución:

$a)\quad \overline{AQ}^2 = BQ.AB \qquad por\ definición\ de\ media\ y\ extrema\ razón$

$b)\quad AQ = BQ - AB \qquad por\ diferencia\ de\ segmentos$

$(b)\ en\ (a)$

$c)\quad (BQ - AB)^2 = BQ.AB$

$d)\quad \overline{BQ}^2 - 2BQAB + \overline{AB}^2 = BQAB$

$e)\quad \overline{BQ}^2 - 160BQ + \overline{80}^2 = 80BQ$

$f)\quad B\overline{Q}^2 - 160\overline{BQ} - 80\overline{BQ} + 6400 = 0 \quad : \quad \overline{BQ}^2 - 240BQ + 6400 = 0$

$$g)\quad BQ = \frac{240 \pm \sqrt{(240)^2 - 4(6400)}}{2} = \frac{240 \pm \sqrt{32000}}{2} = \frac{240 \pm 178.89}{2}$$

$* \quad \boldsymbol{BQ = 209.4\ unidades} \qquad \boldsymbol{LQQD}.$

Ejercicio 1.11.

Dado el segmento de la figura 1.11, si “P” divide externamente al segmento AB en media y extrema razón tal que $\frac{x}{y} < 1$, AB = 100 unidades. Determinar PB.

Figura 1.11

$H)\ \frac{x}{y} < 1$

$AB = 100\ unidades$

$T)\ PB = ?$

Solución:

$a)\quad \overline{AP}^2 = (AB)(PB) \qquad por\ definición\ de\ media\ y\ extrema\ razón$
$b) AP = AB - PB \qquad por\ diferencia\ de\ segmentos$
$\qquad (b)\ en\ (a)$
$c)\quad (AB - PB)^2 = ABPB$
$d)\quad AB^2 - 2(AB)(PB) + PB^2 = (AB)(PB)$
$e)\quad (100)^2 - 2(100)(PB) + PB^2 = (100)PB$
$f)\quad PB^2 - 300PB + 10.000 = 0$

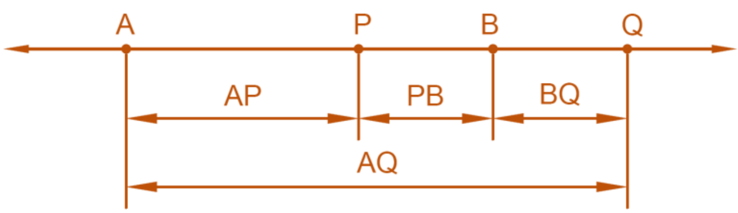
$$g)\quad PB = \frac{300 \pm \sqrt{(300)^2 - 4(10000)}}{2} = \frac{300 \pm 223.6}{2}$$

$\qquad \boldsymbol{PB = 261,8\ unidades \quad LQQD}.$

Ejercicio 1.12.

Dado el segmento de la figura 1.12, si P y Q dividen armónicamente al segmento, AB entonces la relación correcta es:

Figura 1.12



$$(a)\quad \frac{\overline{AP}}{\overline{BP}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BQ}}$$

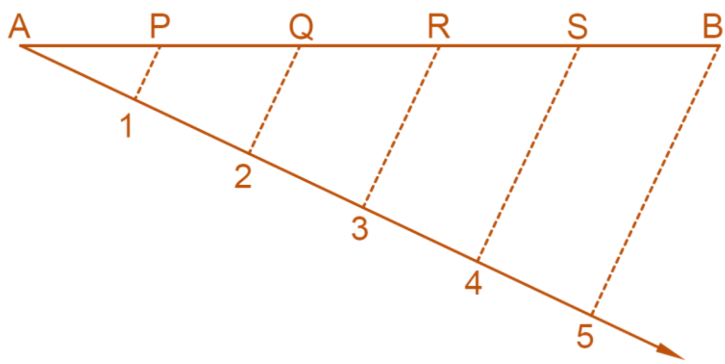
$(b)\quad \frac{\overline{AB}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{AQ}}{\overline{BQ}}$

$(c)\quad \frac{\overline{PB}}{\overline{AP}} = \frac{\overline{BQ}}{\overline{AQ}}$

$(d)\quad ninguna \qquad \Rightarrow \quad * \quad \boldsymbol{Respuesta\ \ correcta\ (d)}$

Ejercicio 1.13.

Dado un segmento AB de la figura 2.13, de coordenadas (-159; 136), encontrar las coordenadas de los puntos que dividen al segmento en cinco partes de igual medida.



Solución:

AB es el segmento dado

Trazamos una recta oblicua desde el punto A con una abertura cualquiera, esta es dividida en cinco partes iguales, desde el último punto de división (5) trazamos una perpendicular hacia el extremo del segmento planteado, y luego trazamos segmentos paralelos a esta recta por cada uno de los puntos de la recta oblicua con relación al segmento dado, determinándose de una manera práctica la división del segmento dado, en segmentos parciales iguales.

$a)\quad 5B\, II\, 4S\ \ II\, 3R\, II\, 2Q\, II\, 1P\quad Por\ construcción$

$b)\quad AP = PQ = QR = RS = SB \quad por\ hipótesis$

$c)\quad AB = |-159| + 136 \qquad \Rightarrow \qquad \rightleftarrows AB$

$$= 159\ unid. + 136\ unid. = 295\ unid.$$

$AB = 5\,AP \quad por\ hipótesis$

$$AP = \frac{AB}{5} = \frac{295\ unidades}{5} = 59\ unid.$$

Coordenadas

$P = A + AP \qquad Q = P + PQ \qquad R = P + QR \qquad S$

$$= R + RS$$

$P = -159 + 59 \qquad \Rightarrow \qquad * \quad \boldsymbol{P = 100\ \ unid.}$

$Q = -100 + 59 \qquad \Rightarrow \qquad * \quad \boldsymbol{Q = 41\ \ unid.}$

$R = -41 + 59 \qquad \Rightarrow \qquad * \quad \boldsymbol{R = 18\ \ unid.}$

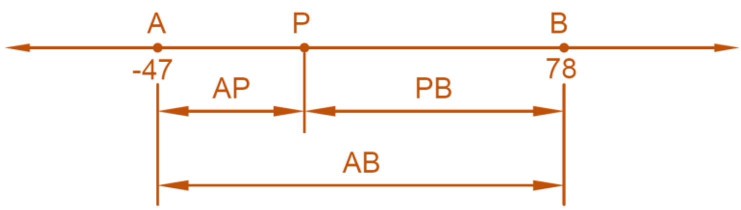
$S = 18 + 59 \qquad \Rightarrow \qquad * \quad \boldsymbol{S = 77\ \ unid.}$

$* \quad \boldsymbol{B = 136\ unid.}$

Ejercicio 1.14.

Dado un segmento AB de la figura 1.14, de coordenadas (-47 ; 78), encontrar la relación X/Y si: AP = 55, "P", divide internamente al segmento AB.

Figura 1.14



Solución:

$a)\quad Coordenada\ de\ A = -47 \quad por\ hipótesis$

$b)\quad Coordenada\ de\ B = 78$

$c)\quad AB = |-47| + 78 = 125\ unid.$

$d)\quad AB = AP + PB \quad por\ suma\ de\ segmentos$

$e)\quad \frac{AP}{PB}$

$= \frac{x}{y} \langle\ 1 \quad por\ definición\ de\ división\ interna\ de\ un\ segmento$

$f)\quad AP = 55\ unid. \qquad por\ hipótesis$

$(f)\ en\ (d)$

$g)\quad PB = 125\ unid - 55\ unid. = 70\ unid.$

$(f)\ y\ (g)\ en\ (e)$

$$\frac{55\ unid.}{70\ unid.} = \frac{x}{y} = 0.78 \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{\frac{x}{y} = 0.786\ \langle\ 1 \quad LQQD.}$$

Ejercicio 1.15.

Dado un segmento AB de coordenadas (-37;75), encontrar la relación $\frac{x}{y} > 1$, si: BQ = 152 (Q divide- externamente al segmento AB).

Figura 1.15

Solución:

$a)\quad \mathrm{AQ} = AB + BQ \quad por\ suma\ de\ segmentos$

$b)\quad \mathrm{AB} = |\ \text{-}37| + 75 = 37 + 75$

$c)\quad AB = 112\ unid.$

$(c)\ en\ (a)$

$d)\quad AQ = (112 + 152)\ unid. \qquad \Rightarrow \qquad AQ = 264\ unidades \quad (d`)$

$e)\quad \frac{AQ}{QB} = \frac{x}{y} \rangle 1 \quad por\ def.\ de\ divisi\acute{o}n\ interna\ de\ segmentos$

$f)\quad QB = 152\ unid.$

$(d`)\ y\ (f)\ en\ (e)$

$$\frac{264\ unid.}{152\ unid.} = \frac{x}{y} \qquad : \qquad \boldsymbol{\frac{x}{y} = 1.737 \rangle 1 \quad LQQD.}$$

Ejercicio 1.16.

Si P y Q dividen armónicamente al segmento AB de la figura 1.16, sabiendo que AM=ME, demuestre que $MB^2 = (MP)(MQ)$.

Figura 1.16

$H)$ $AM = MB$

$T)$ $MB^2 = (MP)(MQ)$

Solución:

$a)$ AP = AM + MP suma de segmentos

$b)$ AQ = AM + MQ

$c)$ BQ = MQ - MB

$d)$ PB = MB -MP

$e)$ $\dfrac{AP}{PB} = \dfrac{AQ}{BQ}$ $división\ armónica$

$f)$ $\dfrac{AM + MP}{MB - MP} = \dfrac{AM + MQ}{MQ - MB}$

$h)$ $MB\ .\ MQ - MB^2 + MP\ .\ MQ - MP\ .\ MB$

$$= MB^2 - MB\ .\ MP + MQ\ .\ MB - MQ\ .\ MP$$

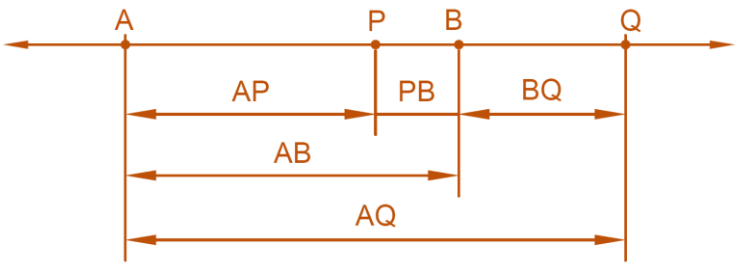
$i)$ $-2MB^2 + 2MP \bullet MQ = 0$

$$*\ \boldsymbol{MB^2} = (\boldsymbol{MP})(\boldsymbol{MQ}) \quad \boldsymbol{LQQD}.$$

Ejercicio 1.17.

Dado el segmento de la figura 1.17, si P y Q dividen armónicamente al segmento AB en relación $\frac{x}{y} > 1$, si AP=PQ; Demostrar que BQ=2PB.

Figura 1.17



Solución:

$a) \quad \frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{AQ}}{\overline{BQ}}$ $\quad$ $Por\ def.\ de\ division\ armónica$

$b) \quad \overline{AQ} = \overline{AP} + \overline{PQ}$ $\quad$ $Por\ suma\ de\ segmentos$

$c) \quad \overline{AP} = \overline{PQ}$ $\quad$ $Por\ hipótesis$

$d) \quad \frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{AP} + \overline{PQ}}{\overline{BQ}}$ $\quad$ $Por\ propiedad\ de\ las\ proporciones$

$e) \quad \frac{\overline{PQ}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{PQ} + \overline{PQ}}{\overline{BQ}} = \frac{2\overline{PQ}}{\overline{BQ}}$

$f) \quad \overline{PQ} * \overline{BQ} = \overline{PB} * 2\overline{PQ}$

$$\overline{BQ} = \frac{2\overline{PQ} * \overline{PB}}{\overline{PQ}} \qquad \Rightarrow \qquad * \quad \boldsymbol{\overline{BQ}}$$

$$= \boldsymbol{2\overline{PB}} \quad \boldsymbol{LQQD}.$$

Ejercicio 1.18.

Dado el segmento de la figura 1.18, si los puntos P y Q dividen armónicamente al segmento AB en relación $\frac{x}{y} < 1$, ¿Cuál es la relación x/y si; AB= 5640 unidades y PQ= 12654 unidades?

Figura 1.18

Solución:

$a)\quad \frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{QA}}{\overline{QB}} = \frac{x}{y} < 1 \qquad \textit{Por división} \quad \textit{armónica}$

$b)\quad AP = AB - PB \qquad \textit{por diferencia de segmentos}$

$e)\quad \overline{PB} = X = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$$\overline{PB} = \frac{-14028 \pm \sqrt{(14028)^2 - 4(2)(-71368560)}}{(2)(2)}$$

$PB = \frac{-14028 \pm 27708}{4} \qquad : \qquad \overline{PB_1} = 3420 \; unidades$

$\overline{PB_2} = 10434 \quad \textit{Valor que} \quad \textit{que no} \quad \textit{se} \quad \textit{considera}$

$b)\quad \overline{AP} = \overline{AB} - \overline{PB} \qquad : \qquad \overline{AP} = \ (5640 - 3420)\; unidades$

$\overline{AP} \quad = 2220 \; unidades$

$c)\quad \overline{QB} = \overline{QP} + \overline{PB} \qquad : \qquad \overline{QB} = \ (12654 + 3420)\; unidades$

$\overline{QB} = 16074 \; unidades$

$\overline{QA} = \overline{PQ} - \overline{AP} \qquad : \qquad \overline{QA} = \ (12654 - 2220)\; unidades$

$f)\quad \overline{QA} = 10434 \quad unidades$

$(f)\ en\ (a)$

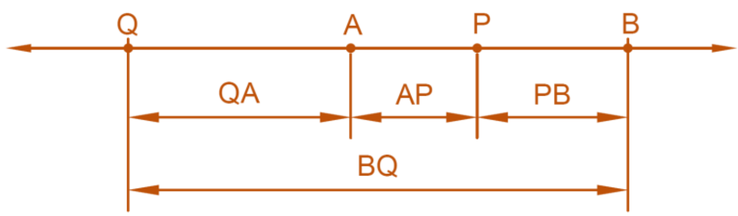
$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{QA}}{\overline{QB}} = \frac{x}{y} \angle 1 \qquad ; \qquad \frac{2220}{3420} = \frac{10434}{16074} = \frac{x}{y} \qquad \Rightarrow \qquad * \quad \boldsymbol{\frac{x}{y}}$$

$$= \mathbf{0,649} \ < \ \mathbf{1} \quad \boldsymbol{LQQD}.$$

Ejercicio 1.19.

Dado el segmento de la figura 1.19, si los puntos P y Q dividen armónicamente al segmento AB en relación $\frac{x}{y} < 1$. ¿Cuál es la relación x/y si; PB = 3420 y BQ = 16074?

Figura 1.19



Solución:

$a)\quad \frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \frac{QA}{QB} = \frac{x}{y} < 1 \qquad por\ def.\ división\ armónica$

$b)\quad \overline{QP} = \overline{QB} - \overline{PB} \qquad por\ suma\ de\ segmentos$

$$\overline{QP} = \ (16074 - 3420)\ unidades \qquad \Rightarrow \qquad \overline{QP}$$

$$= \ 12654\ unidades$$

$c)\quad \overline{QA} = \overline{QP} - \overline{AP} \qquad \Rightarrow \qquad \overline{QA} = 12654 - \overline{AP} \quad (c*)$

$(c\,*)\ en\ (a)$

$$\frac{\overline{AP}}{3420}=\frac{12654-\overline{AP}}{16074} \qquad : \qquad Asumimos\ que\colon\quad \overline{AP}=X$$

$$19494\ X = 43276680 \qquad \Rightarrow \qquad (d)\quad X=\overline{AP}$$

$$= 2220\ unidades$$

$(d)\ en\ (a)$

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{BP}}=\frac{\overline{QA}}{\overline{QB}}=\frac{x}{y}<1 \qquad : \qquad \frac{2220}{3420}=\frac{12654-220}{16074}$$

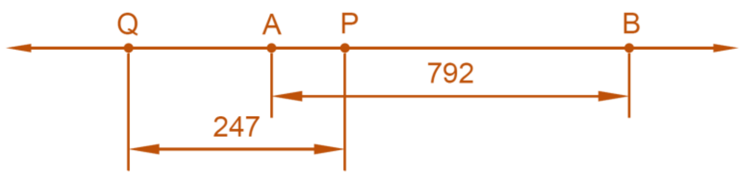
$$= 0.649 \qquad \Rightarrow \qquad * \quad \boldsymbol{\frac{x}{y}=0.649}$$

$$<\mathbf{1}\quad \boldsymbol{LQQD}$$

Ejercicio 1.20.

Para el segmento de la figura 1.20, si los puntos P y Q dividen armónicamente al segmento AB en relación $\frac{x}{y}<1$, ¿Cuál es la relación x/y sí; AB = 792 unidades y PQ igual a 247 unidades?

Figura 1.20



Solución:

$a)\quad \dfrac{\overline{AP}}{\overline{\overline{PB}}} = \dfrac{\overline{QA}}{\overline{\overline{QB}}} = \dfrac{x}{y} < 1 \qquad por\ def.\ división\quad armónica$

$b)\quad \overline{QA} = \overline{QB} - \overline{AB} \qquad por\ resta\ de\ segmentos$

$c)\quad \overline{QB} = \overline{PQ} + \overline{PB}$

$d)\quad \overline{AB} = \overline{AP} + \ \overline{PB} \qquad por\ suma\ de\ segmentos$

$(b),(c)\ y\ (d)\ en\ (a)$

$\dfrac{AB - \overline{PB}}{\overline{PB}} = \dfrac{QP + PB - AB}{QP + PB} \qquad \Rightarrow \qquad \dfrac{792 - \overline{PB}}{\overline{PB}}$

$= \dfrac{247 + \overline{PB} - 792}{247 + \overline{PB}} \qquad : \qquad Asumimos\ que: \qquad \overline{PB}$

$= X$

$2X^2 - 1090X - 195624 = 0 \qquad : \qquad \overline{PB} = 687.31\ unidades$

$\overline{AP} = \overline{AB} - \overline{PB} \qquad \Rightarrow \qquad \overline{AP}$

$= \ (792 - 687.31)\ unidades \qquad : \qquad \overline{AP}$

$= 104.69\ unidades$

$\overline{QA} = \overline{QP} - \overline{AP} \qquad \Rightarrow \qquad \overline{QA}$

$= \ (247 - 104.69)\ unidades \qquad : \qquad \overline{QA}$

$= 142.31\ unidades$

$\overline{QB} = \overline{QP} + \overline{PB}$

$QB = \ (247 + 687.31)\ unidades \qquad : \qquad \overline{QB} = 984.31\ unidades$

$a)\quad \dfrac{104.69}{687.31} = \dfrac{142.31}{984.31}$

$0.1523 = 0.1523 \qquad \therefore \qquad * \quad \boldsymbol{\dfrac{x}{y} = 0.1523\ \langle\ 1 \quad LQQD.}$

Ejercicio 1.21.

Para el segmento de la figura 1.21, determine la longitud del segmento PR conociendo que $\frac{AP}{PB} = 5/3$, la longitud del segmento AB es 20 unidades y que el segmento PB es igual al segmento BR.

Figura 1.21

Figura 1.21

$H)\quad \frac{AP}{PB} = \frac{5}{3}$

$AB = 20\ unidades$

$PB = BR$

$T) PR = ?$

Solución:

$a)\quad \frac{AP}{PB} = \frac{5}{3} \qquad por\ hipótesis$

$b)\quad \frac{AP + PB}{PB} = \frac{5+3}{3} \qquad propiedad\ de\ las\ proporciones$

$c)\quad AP + PB = AB \qquad suma\ de\ segmentos$

$(c)\ en\ (b)$

$\frac{AB}{PB} = \frac{8}{3} \qquad ; \qquad \frac{20}{PB} = \frac{8}{3} \qquad ; \qquad \overline{PB} = 7.5\ unidades$

$d)\quad PR = PB + BR \qquad suma\ de\ segmentos$

$$PB = BR \qquad por\ hipótesis \qquad \Rightarrow \qquad PR$$

$$= (7.5 + 7.5)\ unidades \qquad \Rightarrow \qquad * \quad \boldsymbol{PR}$$

$$= \mathbf{15}\ \boldsymbol{unidades} \quad \boldsymbol{LQQD}.$$

Ejercicio 1.22.

En el segmento de la figura 1.22, Q divide externamente al segmento en una razón $\frac{x}{y} = \frac{2}{9}$. Siendo M el punto medio de AB, determinar la longitud de QM si AM = 28 unidades.

Figura 1.22

Solución:

$a)\quad \frac{AQ}{QB} = \frac{2}{9} \qquad proporción\ de\ división\ externa$

$b)\quad \frac{AQ}{BQ - AQ} = \frac{2}{9-2}$ propiedad de las proporciones

$\frac{\text{AQ}}{\text{AB}} = \frac{2}{9}$

$c)\quad AB = AM + MB \qquad suma\ de\ segmentos$

$\Rightarrow \qquad AB = 56\ unidades$

$d)\quad \frac{AQ}{56} = \frac{2}{7} \qquad : \qquad AQ = 16\ unidads$

$e)\quad QM = AQ + AM$

$QM = (16+28)\ unidades \qquad : \qquad * \quad \boldsymbol{QM}$

$= \boldsymbol{44\ unidades} \quad \boldsymbol{LQQD}.$

Ejercicio 1.23.

Dado el segmento de la figura 1.23, determine la longitud del segmento AB sabiendo que $AP.BQ = PB.AQ$ y que $\frac{1}{\overline{PB}} + \frac{1}{BQ} = \frac{2}{5}$.

Figura 1.23

$H) \quad AP.BQ = PB.AQ$

$$\frac{1}{\overline{PB}} + \frac{1}{BQ} = \frac{2}{5}$$

$T) \quad AB = ?$

Solución:

$a) \quad \overline{AP}.\overline{BQ} = \overline{PB}.\overline{AQ} \qquad por\ hipótesis$

$b) \quad AP + PB = AB \qquad suma\ de\ segmentos$

$(b)\ en\ (a)$

$(AB - PB).BQ = PB(BQ - AB)$

$BQ.AB - PB.BQ = PB.BQ - PB.AB$

$BQ.AB + PB.AB = 2PB.BQ$

$AB(BQ + PB) = 2PB.BQ$

$$\frac{BQ + PB}{PB.BQ} = \frac{2}{AB}$$

$c)\quad \frac{BQ}{PB.BQ} + \frac{PB}{PB.BQ} = \frac{2}{AB}$

$d)\quad \frac{1}{PB} + \frac{1}{BQ} = \frac{2}{AB} \qquad ; \qquad \frac{1}{PB} + \frac{1}{.BQ}$

$= \frac{2}{5} \qquad (e) \quad por\ hipótesis$

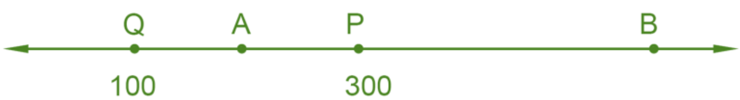
$(d) = (e)$

$* \quad \boldsymbol{\overline{AB} = 5\ unidades \quad LQQD}.$

Ejercicio 1.24.

Considere el segmento de la figura 1.24. Dadas las coordenadas X_Q =100 y X_p = 300 que dividen armónicamente al segmento AB en una razón de 1/2, determinar las coordenadas de A y B.

Figura 1.24



$H)\quad \frac{x}{y} = \frac{1}{2}$

$T)\quad X_A = ? \qquad : \qquad X_B = ?$

Solución:

$a)\quad \frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{AQ}}{\overline{QB}} = \frac{x}{y} < \ 1 \qquad\qquad por\ división\ armónica$

$b)\quad \frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \frac{1}{2} \qquad\qquad ; \qquad 2\overline{AP} = \ \overline{PB}$

$c)\quad \frac{\overline{AQ}}{\overline{QB}} = \frac{1}{2} \qquad\qquad ; \qquad 2\overline{AQ} = \ \overline{QB}$

$\frac{AP + PB}{PB} = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2} \qquad propiedad\ de\ las\ proporciones$

$d)\quad \overline{AP} + \overline{PB} = \overline{AB} \qquad por\ suma\ de\ segmentos$

$e)\quad \frac{\overline{AB}}{PB} = \frac{3}{2} \qquad \therefore \qquad \frac{\overline{AB}}{2\overline{AP}} = \frac{3}{2} \qquad \Rightarrow \qquad \overline{AB} = 3\overline{AP} \qquad (e`)$

$f)\quad \frac{AQ}{QB - AQ} = \frac{1}{2-1} = \frac{1}{1} \qquad propiedad\ de\ las\ proporciones$

$g)\quad \frac{AQ}{AB} = 1 \qquad ; \qquad \overline{AQ} = \overline{AB} \qquad (g\,*)$

$(e) = (g\,*)$

$3\overline{AP} = \overline{AQ} = \overline{AB}$

$3(P - A) = (A - Q) \qquad ; \qquad 3(300 - A) = (A - 100)$

$900 - 3A = A - 100 \qquad : \qquad * \quad \boldsymbol{A}$

$= \mathbf{250} \quad \boldsymbol{LQQD}.\ (\boldsymbol{Coordenada\ de\ A})$

Ejercicio 1.25.

Para el segmento de la figura 1.25, determine la coordenada del punto C conociendo que $\frac{AP}{PD} = \frac{AQ}{QB} = \frac{3}{2}$ y que $QB = CP$.

Figura 1.25

$$H)\quad \frac{AP}{PD} = \frac{AQ}{QB} = \frac{3}{2}$$

$$QB = CP$$

$$T)\quad Coordenada\ de\ C$$

Solución:

$$a)\quad \frac{AP}{PB} = \frac{3}{2} \qquad por\ hipótesis$$

$$b\quad \frac{AP + PB}{PB} = \frac{3 + 2}{2} \qquad propiedad\ de\ las\ proporciones$$

$$c)\quad \overline{AP} + \overline{PB} = \overline{AB}$$

$$d)\quad \frac{\overline{AB}}{\overline{PB}} = \frac{5}{2} \qquad : \qquad \overline{AB}$$

$$= 60\ unid + |-80\ unid.| \qquad ; \qquad \overline{AB}$$

$$= 140\ unidades$$

$$\frac{140\ unid.}{PB} = \frac{5}{2} \qquad : \quad \vdots \quad \overline{PB} = 56\ unidades \qquad : \qquad \overline{AP}$$

$$= 84\ unidades$$

$e)\quad \frac{\overline{AQ}}{\overline{QB}} = \frac{3}{2} \quad ; \quad \frac{AQ - QB}{QB} = \frac{3-2}{2} \quad ; \quad \frac{140}{QB}$

$= \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \overline{QB} = 280\ unidades$

$f)\quad \overline{CP} = \overline{QB} = 280\ unidades \qquad por\ hipótesis$

$h)\quad Q = B + QB \quad ; \quad Q = 60 + 280 \quad : \quad Q = 340$

$i)\quad CP = AC + AP \quad ; \quad \overline{AC} = (280 - 84)\ unidades$

$\Rightarrow \quad \overline{AC} = 196\ unidades$

$j)\quad C = A + AC \quad ; \quad C = -80 - |196| \quad :$

$* \quad \boldsymbol{C = -276 \quad LQQD \qquad Coordenada\ de\ C}$

Ejercicio 1.26.

Para el segmento de la figura 1.26, demuestre que $\overline{BE} = \frac{AD+CF}{2}$, sabiendo que $\overline{AB} = \overline{BC}$ y que $\overline{DE} = \overline{EF}$.

Figura 1.26

$H)\quad \overline{AB} = \overline{BC}$

$\overline{DE} = \overline{EF}$

$T)\quad \overline{BE} = \frac{AD + CF}{2}$

Solución:

$a)\quad AD = AB + BC + CD$

$c)\quad CF = CD + DE + EF \qquad suma\ de\ segmentos$

$b)\quad CF = CD + 2DE \qquad : \qquad CD = CF - 2DE \quad (b*)$

$c)\quad AD = CD + 2AB \qquad : \qquad CD = AD - 2AB \quad (c*)$

$(b*) = (c*)$

$f)\quad CF - 2DE = AD - 2AB$

$BE = BC + CD + DE = AB + CD + DE$

$g)\quad BE = (CF - 2DE) + AB + DE = CF - DE + AB$

$$h)\quad AB = \frac{(AD - CD)}{2}$$

$(h)\ en\ (g)$

$$j)\quad BE = CF - DE + \frac{(AD - CD)}{2}$$

$$k)\quad BE = CF - (\frac{CF - CD}{2}) + (\frac{AD - CD}{2})$$

$$2BE = 2CF - CF + CD + AD - CD = CF + AD \qquad \Rightarrow$$

$$* \quad \boldsymbol{BE = \frac{AD + CF}{2}} \qquad \boldsymbol{LQQD}.$$

Ejercicio 1.27.

Para el segmento de la figura 1.27, demuestre que $\boldsymbol{\overline{AC}^2 = \overline{AB}.\overline{AD} - \frac{\overline{BD}^2}{4}}$, sabiendo que $\overline{BC} = \overline{CD}$.

Figura 1.27

$H)\quad \overline{BC} = \overline{CD}$

$$T)\quad \overline{AC}^2 = \overline{AB}.\overline{AD} - \frac{\overline{BD}^2}{4}$$

Solución:

$a)\quad AC = AB + BC \qquad suma\ de\ segmentos$

$b)\quad AC = AD - CD$

$c)\quad BC = CD$

$d)\quad BD = 2BC = 2CD \qquad por\ hipótesis$

$(a)\ por\ (b)$

$e)\quad AC^2 = (AB + BC)(AD - CD)$

$f)\quad AC^2 = AB.AD - AB.CD + BC.AD - BC.CD$

$(c)\ en\ (f)$

$$g)\quad AC^2 = AB.AD - AB.BC + BC.AD - \frac{BD^2}{4}$$

$$h)\quad AC^2 = AB.AD - AB.\frac{BD}{2} + \frac{BD}{2}.AD - \frac{BD^2}{4} \qquad \Rightarrow$$

$$AC^2 = AB.AD + \frac{BD}{2}.(AD - AB) - \frac{BD^2}{4}$$

$$AC^2 = AB.AD - \frac{BD}{2}.(BD) - \frac{BD^2}{4} = AB.AD - \frac{BD^2}{2} - \frac{BD^2}{4}$$

$$* \quad \boldsymbol{AC^2 = AB.AD - \frac{BD^2}{4}} \qquad \boldsymbol{LQQD.}$$

Ejercicio 1.28.

Para el segmento de la figura 1.28, verifique que $m = \sqrt{ab + \frac{(b-a)^2}{4}}$, sabiendo que BC=DC, AB=a, BD=b y que AC=m.

Figura 1.28

$H)\quad BC = DC$

$AB = a$

$BD = b$

$AC = m$

$$T)\quad \sqrt{ab + \frac{(b-a)^2}{4}}$$

Solución:

$a)\quad AC = AB + BC \qquad Suma\ \ de\ segmentos$

$b)\quad (AC)^2 = (AB + BC)^2$

$$AC^2 = AB^2 + 2(AB)(BC) + BC^2 \qquad \Rightarrow \qquad AC^2$$

$$= AB(AB + 2BC) + BC^2$$

$c)\quad AC^2 = (AB)(AD) + BC$

$$AD - AB = 2BC \qquad \Rightarrow \qquad BC = \frac{AD - AB}{2}$$

$$f)\quad AC^2 = (AB)(AD) + \left[\frac{AD - AB}{2}\right]^2 \qquad : \qquad AC^2$$

$$= (AB)(AD) + \frac{(AD - AB)^2}{4}$$

$$AC = \sqrt{(AB)(AD) + \frac{(AD - AB)}{4}} \qquad \Rightarrow$$

$$* \quad \boldsymbol{m = \sqrt{a.b + \frac{(b - c)^2}{4}}} \qquad \boldsymbol{LQQD}$$

Ejercicio 1.29.

Los segmentos a, b, c son proporcionales a 7, 5 y 6 respectivamente si: a + b + c = 12 unidades. Calcular las medidas de los segmentos a, b y c.

Solución:

$$\frac{a}{7} = \frac{b}{5} = \frac{c}{6} = \frac{a + b + c}{7 + 5 + 6}$$

$$= \frac{12\ unidades}{18} \qquad propiedad\ de\ las\ series\ de\ razones$$

$$\frac{12\ unid.}{18} = \frac{a}{7} \qquad ; \qquad a = \frac{(12)(7)}{18} \qquad ; \qquad \boldsymbol{a}$$

$$\boldsymbol{= 4.66\ unid.} \qquad \boldsymbol{LQQD}.$$

$$\frac{12\ unid.}{18} = \frac{b}{5} \qquad : \qquad b = \frac{(12)(5)}{18} \qquad : \qquad \boldsymbol{b}$$

$$\boldsymbol{= 3.33\ unid.} \qquad \boldsymbol{LQQD}.$$

$$\frac{12\ unid.}{18} = \frac{c}{6} \qquad : \qquad c = \frac{(12)(6)}{18} \qquad : \qquad \boldsymbol{c}$$

$$\boldsymbol{= 4\ unid.} \qquad \boldsymbol{LQQD}.$$

Ejercicio 1.30.

Considere el segmento de la figura 1.30. Dado los puntos A y B de coordenadas (-27 ; 29), determinar BS tal que: BS^2 = AB.AS (S es un punto situado entre A y B).

Figura 1.30

Solución:

$a)\quad \overline{AB} = A + B \qquad \textit{por suma de coordenadas}$

$\overline{AB} = |-27| + 29 = 56\ unidades$

$b)\quad \overline{BS^2} = \overline{AB}..\overline{AS} \qquad \textit{por hipótesis}$

$c)\quad \overline{AS} = \overline{AB} - \overline{BS} \qquad \textit{por resta de segmentos}$

$(c)\ en\ (b)$

$d)\quad \overline{BS}^2 = \overline{AB}(AB - BS) \qquad \Rightarrow \qquad \overline{BS}^2$

$= 56(56 - BS) \qquad ; \qquad BS^2 + 56BS - 3136 = 0$

$* \quad \boldsymbol{BS = 34.6\ unidades} \qquad \boldsymbol{LQQD}.$

CAPÍTULO 2

Ángulos en el plano

Capítulo 2
Ángulos en el plano

2

"Donde hay materia hay geometría."

— Johannes Kepler

Objetivo

Desarrollar en los lectores la capacidad de analizar, pensar y resolver casos que involucren el conocimiento geométrico aplicado a los ángulos en el plano, reconociendo los tipos de ángulos y aplicando los teoremas de ángulos planos para la resolución de ejercicios.

Logros de aprendizaje

El lector estará en capacidad de:

- Utilizar los sistemas de unidades de ángulos planos.
- Reconocer los tipos de ángulos.
- Aplicar los teoremas de ángulos para resolución de ejercicios.

2.1 Introducción teórica

2.1.1 Unidades principales para ángulos

Sistema sexagesimal. - Se considera a la circunferencia dividida en 360 partes y un ángulo de un grado es el que tiene el vértice en el centro y sus lados son dos radios, cada grado se considera en 60 partes iguales llamadas minutos y cada minuto tiene 60 partes iguales llamados segundos.

Sistema centesimal. - Se considera a la circunferencia dividida en 400 partes iguales llamadas "Grados Centesimales", cada grado tiene 100 minutos centesimales y cada minuto tiene 100 segundos centesimales.

Sistema mixto o circular. - En este sistema se usa como unidad el ángulo llamado "Radián". Un “radián” es el ángulo cuyos lados son radios y comprenden un ángulo cuya longitud es igual al radio de la circunferencia.

2.1.2 Tipos de ángulos

- **Ángulo plano. -** Es una figura formada por dos rectas, semirrectas, o rayos que se cortan en un punto. Las rectas, semirrectas o rayos se llaman lados y el punto común origen.
- **Ángulos nulos. -** Son aquellos ángulos que son iguales a 0 grados.

- **Ángulos convexos. -** Son aquellos ángulos que son mayores de 0 grados, pero menores de dos ángulos rectos.
- **Ángulos agudos. -** Son aquellos ángulos que son menores de un ángulo recto.
- **Ángulos rectos. -** Son aquellos ángulos que son iguales a un ángulo recto, donde sus lados son dos rectas perpendiculares.
- **Ángulos obtusos. -** Son aquellos ángulos que son mayores de un ángulo recto, pero menores de dos ángulos rectos.
- **Ángulos llanos. -** Son ángulos iguales a dos ángulos rectos sus lados son dos rectas linealmente opuestas.
- **Ángulos cóncavos. -** Son aquellos ángulos mayores de dos ángulos rectos y menores de cuatro ángulos rectos.
- **Ángulos de una vuelta. -** Son los ángulos iguales a cuatro ángulos rectos.
- **Ángulos complementarios. -** Son una pareja de ángulos que sumados dan un ángulo recto.
- **Ángulos suplementarios. -** Son una pareja de ángulos que sumados dan dos ángulos rectos.
- **Ángulos consecutivos. -** Son aquellos ángulos que se caracterizan por tener dos elementos comunes, un lado y un vértice y sus medidas se encuentran a uno y otro lado del lado común.
- **Ángulos adyacentes. -** Son dos ángulos consecutivos cuyos lados no comunes son rayos linealmente opuestos o (alineados).

- **Ángulos opuestos por el vértice. -** Son aquellos ángulos cuyos lados de uno son las prolongaciones en sentido contrario de los lados del otro.

Rectas paralelas

Rectas paralelas son las que estando en el mismo plano y siendo equidistantes se pueden prolongar en ambos sentidos.

Teoremas de los ángulos que tienen sus lados paralelos

- Dos ángulos agudos que tienen sus lados respectivamente paralelos entre sí y dirigidos en el mismo sentido son iguales.
- Dos ángulos obtusos que tienen sus lados respectivamente paralelos entre sí, y dirigidos en sentido contrario son iguales.
- Si dos ángulos tienen sus lados respectivamente paralelos, dos de ellos dirigidos en el mismo sentido y los otros dos en sentido contrario, dichos ángulos son suplementarios.

Rectas perpendiculares

Se dice que dos rectas son perpendiculares cuando al cortarse forman cuatro ángulos iguales, cada uno es un ángulo recto.

Teoremas de los ángulos que tienen sus lados perpendiculares

- Dos ángulos agudos cuyos lados son respectivamente perpendiculares entre si son iguales.
- Dos ángulos obtusos que tienen sus lados respectivamente perpendiculares son iguales.
- Dos ángulos, uno agudo y otro obtuso, que tienen sus lados respectivamente perpendiculares son suplementarios.

Ángulos formados entre dos rectas paralelas cortadas por una secante o transversal

Los ángulos que se forman entre dos rectas paralelas presentan las siguientes características:

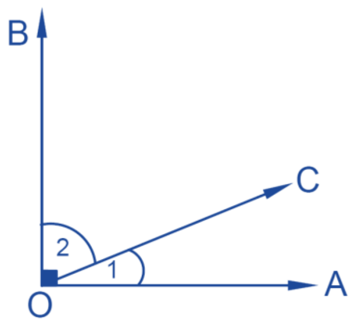
- Los ángulos alternos internos son iguales.
- Los ángulos alternos externos son iguales.
- Los ángulos correspondientes son iguales.
- Los ángulos colaterales internos son suplementarios.
- Los ángulos colaterales externos son suplementarios.

2.2 Ejercicios resueltos de ángulos en el plano

Ejercicio 2.1.

Considere la figura 2.1. Uno de los ángulos complementarios aumentado en 30º es igual al otro. ¿Cuánto mide cada ángulo?

Figura 2.1



Solución:

$a)\quad 1m\angle\ AOC + 1m\angle COB$

$= \ 1\angle\ Recto \qquad por\ ser \quad ángulos \quad complementarios$

$b)\quad 1m\angle 1 + 1m\ \angle 2 = 1m\angle\ Recto$

$c)\quad 1m\angle 1 + 30\,° = 1m\angle 2 \qquad \Rightarrow \qquad 1m\angle 1$

$= 1m\angle 2 - 30\,° \qquad (c')$

$(c)\ en\ (b)$

$1m\angle 2 - 30^0 + 1m\angle 2 = 90^0$

$2m\angle 2 = 90^0 + 30^0$

$2m\angle 2 = 120^0$

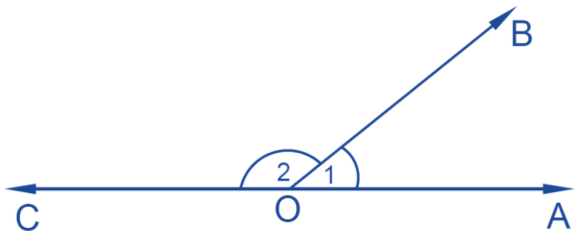
$$1m\angle 2 = \frac{120^0}{2} = 60\,°$$

$* \quad \mathbf{1m\angle 2 = 60^0} \qquad\qquad * \quad \mathbf{1m\angle 1 = 30\,°} \quad \boldsymbol{LQQD}.$

Ejercicio 2.2.

Considere la figura 2.2. ¿Cuánto mide cada uno de los ángulos suplementarios, si quitando al menor de ellos 20º y agregándole al mayor, este resulta el triple de lo que queda del menor?

Figura 2.2



Solución:

$a) \quad 1m\angle AOB + 1m\angle BOC$

$= 2\angle \ Re\,c\,tos \qquad\qquad por\ ser\ ángulos \quad sup\,l\,ementarios$

$a') \quad 1m\angle 1 + 1m\angle 2 = 180\,°$

$Consideramos\ que:$

$1m\angle 1 = ángulo \quad menor \quad ; \quad 1m\angle 2 = ángulo \quad mayor$

$b) \quad 3m\ (1m\angle 1 - 20\,°)$

$= 1m\angle 2 + 20\,° \qquad ; \qquad 3m\angle 1 - 60\,° - 20\,°$

$= 1m\angle 2$

$b') \quad 1m\angle 2 = 3m\angle\ 1 - 80\,°$

$(b') \ en \ (a')$

$1m\angle\ 1 + 3m\angle\ 1 - 80° = 180°$; $4m\angle\ 1$

$= 180° + 80°$; $1m\angle\ 1 = 65°$

$c)$ $1m\angle\ 1 = 1m\angle\ AOB = 65°$

$(c) \ en \ (b')$

$1m\angle\ 2 = 3(65°) - 80°$; $1m\angle\ 2 = 1m\angle\ BOC = 115°$

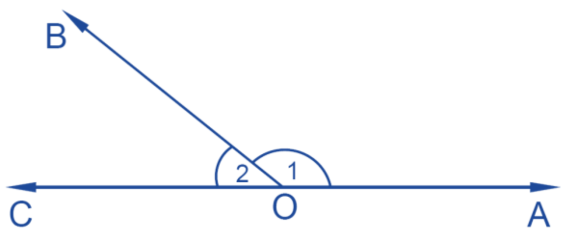
$*$ $\mathbf{1}\boldsymbol{m}\angle\ \mathbf{1 = 65°}$; $*$ $\mathbf{1}\boldsymbol{m}\angle\ \mathbf{2 = 1}\boldsymbol{m}\angle\ \boldsymbol{BOC}$

$\mathbf{= 115°}$ $\boldsymbol{LQQD}.$

Ejercicio 2.3.

Considere la figura 2.3. La medida de uno de los ángulos de un par de suplementarios es el doble de la medida del otro menos 27º. Encontrar la medida de cada ángulo.

Figura 2.3



Solución:

$a)$ $1m\angle AOB + 1m\angle BOC = 180°$ $por \ suplementarios$

$a')$ $1m\angle 1 + 1m\angle 2 = 180°$

$b)$ $1m\angle 1 = 2m\angle 2 - 27°$ $por \ hipótesis$

$(b) \ en \ (a')$

$m\angle 1 + 1m\angle 2 = 180°$; $2m\angle 2 - 27° + 1m\angle 2 = 180°$

$\boldsymbol{c})$ $\ast$ $\mathbf{1}\boldsymbol{m\angle}\mathbf{2} = \mathbf{1}\boldsymbol{mBOC} = \mathbf{69°}$ $\boldsymbol{LQQD}.$

$(c)en(b)$

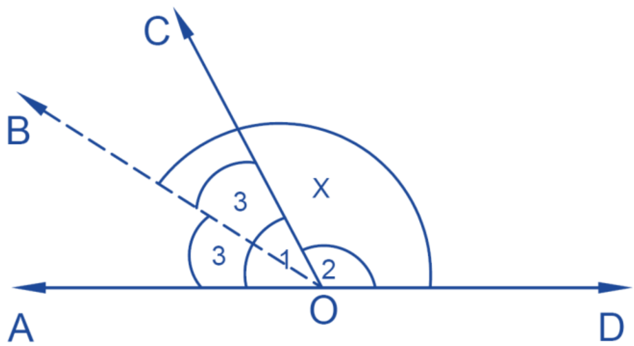
$1m\angle 1 + 69° = 180°$;

$\ast$ $\mathbf{1}\boldsymbol{m\angle}\mathbf{1} = \mathbf{1}\boldsymbol{m\angle AOB} = \mathbf{111°}$ $\boldsymbol{LQQD}.$

Ejercicio 2.4.

Considere la figura 2.4. Dos ángulos adyacentes suplementarios están en la razón de 2 a 3. Hallar el valor del ángulo formado por la bisectriz del ángulo menor con el lado no común.

Figura 2.4



Solución:

$a)$ $1m\angle AOC + 1m\angle COD$

$= 2\angle\ Rectos$ $por\ ser\ ángulos\ suplementarios$

$a')$ $1m\angle + 1m\angle 2$

$= 180^0$: $\overline{OB}\ Bisectriz\ \ del\ \ \angle AOC$

$$b) \quad \frac{1m\angle 1}{1m\angle 2} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{1m\angle\ 1 + 1m\angle\ 2}{1m\angle\ 2}$$

$$= \frac{2+3}{3} \qquad \textit{por propiedad de las proporciones}$$

$$\frac{180°}{1m\angle\ 2} = \frac{5}{3} \quad ; \quad 1m\angle 2 = \frac{(180°)(3)}{5} = 108°$$

$$c) \quad 1m\angle 2 = 1m\angle COD = 108°$$

$$(c)\ en\ (a')$$

$$1m\angle 1 = 180° - 108° \quad ; \quad 1m\angle\ 1 = 72°$$

$$d) \quad 1m\angle\ 1 = 1m\angle\ AOC = 72°$$

$$1m\angle BOA = 1m\angle\ 3$$

$$= \frac{1m\angle\ AOC}{2} \qquad \textit{por la propiedad de la bisectriz de un ángulo.}$$

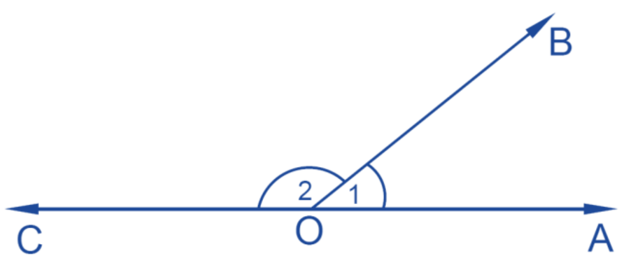
$$1m\angle\ 3 = \frac{1m\angle\ 1}{2} = \frac{72°}{2}$$

$$* \quad \mathbf{1m\angle\ 3 = 36° = 1m\angle\ BOA = 1m\angle\ BOC} \qquad \boldsymbol{LQQD}.$$

Ejercicio 2.5.

Considere la figura 2.5. Calcular el valor de dos ángulos suplementarios, de modo que, si al quíntuplo del menor se le disminuye la mitad del mayor, se obtiene el triple del menor aumentado en 10º.

Figura 2.5



Solución:

a) $1m\angle AOB + 1m\angle BOC$

$= 2\angle$ Rectos por ángulos suplementarios

a′) $1m\angle\ 1 + 1m\angle\ 2 = 180^0$

b) $5m\angle 1 - \dfrac{1m\angle\ 2}{2} = 3m\angle\ 1 + 10^0$

c) $1m\angle\ 1 = 180^0 - 1m\angle\ 2$

(c) en (b)

$$5\ (180^0 - 1m\angle\ 2) - \frac{1m\angle\ 2}{2} = 3\ (180^0 - 1m\angle\ 2) + 10^0$$

$$900^0 - 5m\angle 2 - \frac{m\angle 2}{2} = 540^0 - 3m\angle\ 2 + 10^0$$

$* \quad \mathbf{1m\angle\ 2 = 1m\angle BOC = 140\,°}$ **LQQD.**

$(1m\angle\ 2)$ en (a′)

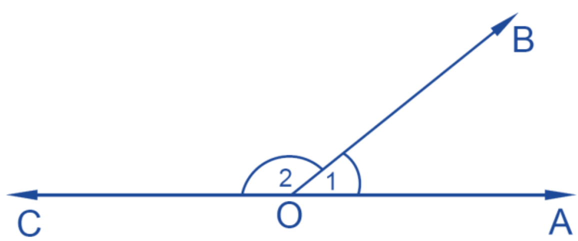
$1m\angle\ 1 = 180^0 - 1m\angle\ 2$; $1m\angle\ 1 = 180^0 - 140^0$

$* \quad \mathbf{1m\angle\ 1 = 1m\angle\ AOB = 40^0}$ **LQQD.**

Ejercicio 2.6.

Considere la figura 2.6. Uno de los ángulos suplementarios es los $\frac{3}{5}$ del otro ángulo. ¿Cuánto mide cada ángulo?

Figura 2.6



Solución:

$a) \quad 1m\angle AOB + 1m\angle BOC$

$= 2\ \angle\ Rectos \qquad por\ ángulos\ suplementarios$

$1m\angle 1 + 1m\angle 2 = 180^0 \qquad : \qquad 1m\angle 1$

$= 180^0 - 1m\angle 2 \qquad (a`)$

$b) \quad 1m\angle 1 = \frac{3}{5}m\angle 2$

$(a') = (b)$

$(180^0 - 1m\angle 2)(5) = 3m\angle 2 \qquad ; \qquad 900^0$

$= 8m\angle 2 \qquad :$

$c) \qquad * \quad \mathbf{1m\angle 2 = 1m\angle BOC = 112.5^0} \qquad \boldsymbol{LQQD}.$

$(c)\ en\ (a')$

$1m\angle 1 = 180^0 - 1m\angle 2 \qquad ; \qquad 1m\angle 1 = 180^0 - 112.5^0$

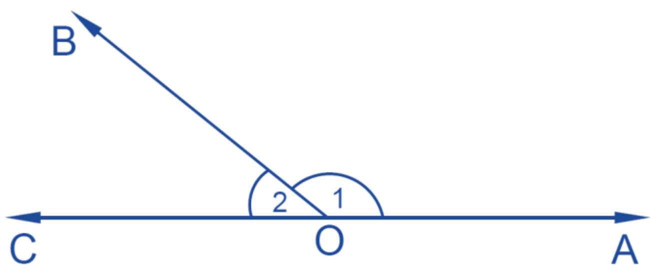
$1m\angle 1 = 1mAOB = 67.5° \qquad \Rightarrow \qquad * \quad \mathbf{1m\angle 1 = 1m\angle AOB}$

$\mathbf{= 67.5^0} \qquad \boldsymbol{LQQD}$

Ejercicio 2.7.

Considere la figura 2.7. De dos ángulos suplementarios, los $\frac{2}{3}$ de uno de ellos más la sexta parte del otro forman un ángulo recto. ¿Cuánto mide cada ángulo?

Figura 2.7



Solución:

$a)\quad 1m\angle AOB + 1m\angle BOC = \ 2\angle\ Rectos \qquad por\ ser\ suplementarios$

$1m\angle 1 + 1m\angle 2 = 180^0 \quad \Rightarrow \quad 1m\angle 1 = 180^0 - 1m\angle 2 \qquad (a')$

$b)\quad \frac{2}{3}m\angle 1 + \frac{1}{6}m\angle 2 = 90^0 \qquad por\ \ hipótesis$

$(a')\ \ en\ \ \ (b)$

$\frac{2}{3}(180° - 1m\angle 2) + \frac{1}{6}m\angle 2 = 90^0$

$\vdots \qquad 120^0 - \frac{2}{3}m\angle 2 + \frac{1}{6}m\angle 2 = 90^0$

$c) \qquad\qquad * \quad \mathbf{1m\angle 2 = 1m\angle BOC = 60°} \qquad \boldsymbol{LQQD}.$

$(c)\ \ \ en\ \ \ (a')$

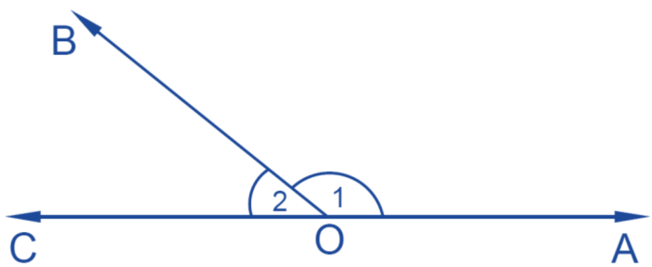
$1m\angle 1 = 180^0 - 60^0 = 120^0$

$* \quad \mathbf{1m\angle 1 = 1m\angle AOB = 120°} \qquad \boldsymbol{LQQD}.$

Ejercicio 2.8.

Considere la figura 2.8. Dos veces la medida de un ángulo es 36º menos que 5 veces la medida de su complemento. ¿Cuál es la medida del ángulo?

Figura 2.8



Solución:

$a)\quad 1m\angle AOB + 1m\angle BOC$

$= 2\angle\ Rectos \qquad\qquad por\ ser\ ángulos\ suplementarios$

$a*)\quad 1m\angle\ 1 + 1m\angle\ 2 = 180^0$

$b)\quad 1m\angle 1 = 180\,°- 1m\angle\ 2$

$c)\quad 2m\angle 1 + 36^0 = 5m\angle 2$

$(b)\quad en\quad (c)$

$2(180^0 - 1m\angle 2) + 36^0 = 5m\angle 2$

$360^0 - 2m\angle 2 + 36^0 = 5m\angle\ 2$

$360^0 + 36^0 = 7m\angle 2 \qquad ; \qquad 396^0 = 7m\angle 2$

$d)\qquad * \quad \mathbf{1m\angle 2 = 1m\angle BOC = 56.57\,°} \qquad \boldsymbol{LQQD}.$

$(d)\ en\quad (b)$

$1m\angle 1 = 180^0 - 1m\angle 2$

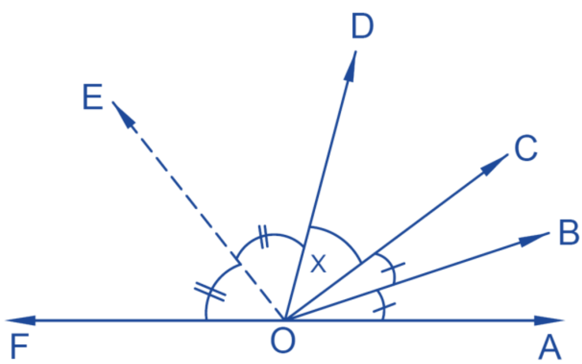
$1m\angle 1 = 180^0 - 56.57^0$

$* \quad \mathbf{1m\angle 1 = 1m\angle AOB = 123.43\,°} \qquad \boldsymbol{LQQD}.$

Ejercicio 2.9.

Dada la figura 2.9. Determine la medida del ángulo X sabiendo que $1m\angle EOB = 100^0 = 1m\angle 3$, y que $1m\angle\ FOA =$ ángulo llano.

Figura 2.9



$H)\quad 1m\angle EOB = 100^0 = 1m\angle 3$

$\quad 1m\angle\ FOA = \ \acute{a}ngulo\ \ llano$

$T)\ 1m\angle x = ?$

Solución:

$a)\quad 2m\angle 1 + 1m\angle x + 2m\angle 2$

$= 2\angle Rectos \qquad por\ suma\ de\ \acute{a}ngulos\ consecutivos$

$b)\quad 1m\angle 2 + 1m\angle x + 1m\angle 1 = 100^0 = 1m\angle 3$

$b*)\quad 1m\angle 2 = 100^0 - 1m\angle 1 - 1m\angle x$

$\quad (b')\ en\ (a)$

$c)\quad 2(100^0 - 1m\angle 1 - 1m\angle x) + 1m\angle x + 2m\angle 1 = 100^0$

$d)\quad 200^0 - 2m\angle 1 - 2m\angle x + 1m\angle x + 2m\angle 1 = 180^0$

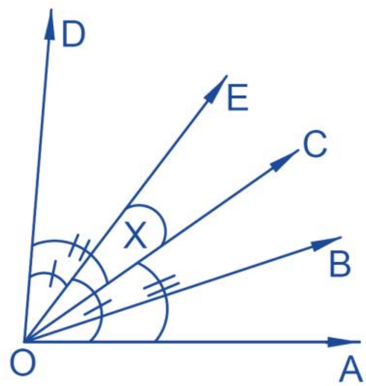
$200^0 - 180^0 = 1m\angle x \qquad\qquad * \quad \boldsymbol{1m\angle x = 1m\angle DOC}$

$= \boldsymbol{20^0} \qquad \boldsymbol{LQQD}.$

Ejercicio 2.10.

Dada la figura 2.10. Determine la medida del ángulo X sabiendo que $1m\angle EOB = 100^0 = 1m\angle 3$, y que $1m\angle\ FOA = \ \acute{a}ngulo\ \ llano$.

Figura 2.10



$H)\quad 1m\angle AOE = 1m\angle EOB = 1m\angle 2$

$1m\angle AOD = 1m\angle DOC = 1m\angle 1$

$1m\angle AOC - 1m\angle AOB = 20^0$

$T)\quad 1m\angle x = ?$

Solución:

$a)\quad 1m\angle AOC - 1m\angle AOB = 20^0 \qquad\qquad por\ hipótesis$

$b)\quad 1m\angle AOC = 1m\angle AOD + 1m\angle DOC$

$1m\angle AOC = 1m\angle 1 + 1m\angle 1$

$c)\quad 1m\angle AOC = 2m\angle 1$

$d)\quad 1m\angle AOB = 1m\angle AOE + 1m\angle EOB \qquad ; \qquad 1m\angle AOB$

$= 1m\angle 2 + 1m\angle 2$

$e)\quad 1m\angle AOB = 2m\angle 2$

$(c)\ ,(e)\ en\ (a)$

$2m\angle 1 - 2m\angle 2 = 20^0$

$f)\quad 1m\angle 1 = 1m\angle x + 1m\angle 2 = 1m\angle AOD$

$2(1m\angle X + 1m\angle 2) - 2m\angle 2 = 20^0 \qquad ; \qquad 2m\angle x + 2m\angle 2 - 2m\angle 2$

$= 20^0$

$* \quad \mathbf{1m\angle x = 1m\angle EOD = 10^0} \qquad \boldsymbol{LQQD}.$

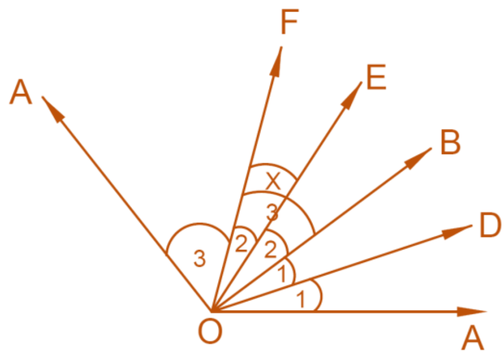
Ejercicio 2.11.

Dada la figura 2.11. Determine la medida del ángulo X sabiendo que:

$H)\quad 1m\angle FOB = 1m\angle AOF = 1m\angle 3$
$1m\angle FOD = 20^0$
$1m\angle BOC - 1m\angle AOB = 40^0$

$T)\quad 1m\angle EOF = 1m\angle x$

Figura 2.11



Solución:

$a)\quad 1m\angle BOC - 1m\angle AOB = 40^0 \qquad\qquad por \quad hipótesis$

$b)\quad 2m\angle 1 - 2m\angle 3 = 40^0$

$c)\quad 2m\angle 2 + 1m\angle 1 = 80^0 = 1m\angle FOD$

$d)\quad \rightleftarrows 1m\angle 3 = 2m\angle 2$

$e)\quad 1m\angle 2 = 1m\angle x$

$(d)\ en\ (a)$

$2m\angle 1 - 2(2m\angle 2) = 40^0$

$f)\quad 2m\angle 1 - 4m\angle 2 = 40^0$

$(e)\ en\ (f)$

$g)\quad 2m\angle 1 - 4m\angle x = 40^0$

$(e)\ en\ (c)$

$2m\angle x + 1m\angle 1 = 80\,°$

$h)\quad 1m\angle 1 = 80\,° - 2m\angle x$

$(h)\quad en\quad (g)$

$2m\angle 1 - 4m\angle X = 40^0 \qquad ; \qquad 2(80^0 - 2m\angle x) - 4m\angle x = 40^0$

$160^0 - 4m\angle x - 4m\angle x = 40^0 \quad ; \quad 120^0 = 8m\angle x$

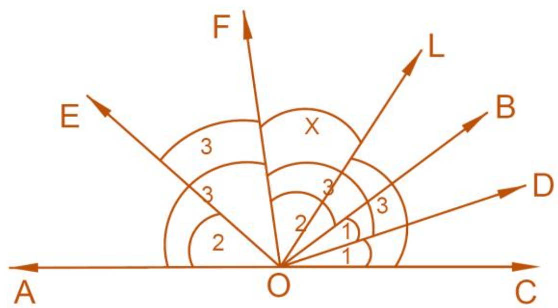
$* \quad \mathbf{1m\angle x = 1m\angle 2 = 1m\angle BOF = 15°} \quad \boldsymbol{LQQD}.$

Ejercicio 2.12.

Dada la figura 2.12. Determine la medida del ángulo X sabiendo que:

$H)$ $1m\angle DOC = 1m\angle DOB = 1m\angle 1$
$1m\angle BOE = 1m\angle EOA = 1m\angle 2$
$1m\angle AOF = 1m\angle FOD = 1m\angle 3$
$T)$ $1m\angle FOL = 1m\angle x$

Figura 2.12



Solución:

$a)$ $1m\angle 3 + 1m\angle x + 1m\angle 4$

$= 180 \quad$ *por suma de ángulos consecutivos*

$b)$ $\overrightarrow{DO}$ *Bisectriz* $\angle BOC$ *por hipótesis gráfica*

$c)$ $\overrightarrow{EO}$ *Bisectriz* $\angle AOB$ *por hipótesis gráfica*

$d)$ $1m\angle EOD = 90^0$

$= 1m\angle 1 + 1m\angle 2 \quad$ *por la bisectriz de ángulos adyacentes*

$e)\quad 1m\angle 3 + 1m\angle x + 1m\angle 4 = 180^0$

$f)\quad 1m\angle 3 = 180^0 - 1m\angle x - 1m\angle 4$

$(f)\ en\ (e)$

$1m\angle 3 - 1m\angle x + 1m\angle 4 = 90^0 = 1m\angle EOD$

$(180^0 - 1m\angle x - 1m\angle 4) - 1m\angle x + 1m\angle 4 = 90^0$

$180^0 - 2m\angle x - 1m\angle 4 + 1m\angle 4 = 90^0$

$* \quad \mathbf{1m\angle x = 1m\angle FOL = 45^0} \qquad \boldsymbol{LQQD}.$

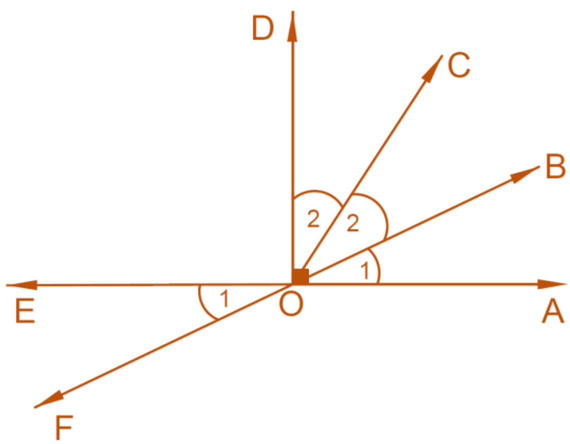
Ejercicio 2.13.

Dada la figura 2.13. Determine la medida del ángulo 1 sabiendo que:

$H)\quad \dfrac{1m\angle AOC}{1m\angle COF} = \dfrac{11}{29}$

$T)\quad 1m\angle 1 = ?$

Figura 2.13



Solución:

$a)\quad 1m\angle AOC = 1m\angle 1 + 1m\angle 2 \qquad\qquad por\ hipótesis$

$b)\quad 1m\angle COF = \quad 1m\angle 2 + 90\,° + 1m\angle 1 \qquad\quad por\ hipótesis$

$c)\quad 2m\angle 2 + 1m\angle 1 = 90^0 \qquad\qquad ; \qquad 1m\angle 1 = 90^0 - 2m\angle 2 \quad (c\,*)$

$$d)\quad \frac{1m\angle AOC}{1m\angle COF} = \frac{11}{29} \qquad por\ hipótesis$$

$(a)\ ,\ (b)\ (c\,*)\ en\ (d)$

$$\frac{1m\angle 1 + 1m\angle 2}{1m\angle 2 + 1m\angle 1 + 90^0} = \frac{11}{29}$$

$$\frac{90^0 - 2m\angle 2 + 1m\angle 2}{1m\angle 2 + 90^0 - 2m\angle 2 + 90^0} = \frac{11}{29} \qquad ; \qquad \frac{90\,° - 1m\angle 2}{180^0 - 1m\angle 2}$$

$$= \frac{11}{29}$$

$e)\quad 2610\,° - 29m\angle 2 = 1980^0 - 11m\angle 2$

$18m\angle 2 = 630^0$

$f)\quad 1m\angle 2 = 1m\angle COB = 1m\angle DOC = 35^0$

$(f)\ en\ (c\,*)$

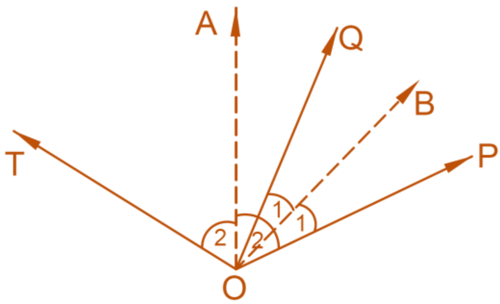
$1m\angle 1 = 90\,° + 2m\angle 2 \qquad\qquad * \quad \boldsymbol{1m\angle 1 = 1m\angle AOB}$

$\boldsymbol{= 1m\angle EOF = 20\,°} \qquad \boldsymbol{LQQD}.$

Ejercicio 2.14.

Se tiene los rayos OP, OQ y OT de la figura 3.14. El ángulo formado por las bisectrices de los ángulos POT y POQ disminuido en $\frac{3}{4}$ del suplemento de un ángulo X es igual a 44º, si la diferencia entre los ángulos POT y POQ es igual a 20º, determine la medida del ángulo X.

Figura 2.14



H) $\overrightarrow{OB}$ Bisectriz del $\angle$ POQ

$\overrightarrow{OA}$ Bisectriz del $\angle$ POT

T) $1m\angle x = ?$

Solución:

a) $1m\angle AOB - \frac{3}{4}(180^0 - 1m\angle x) = 4^0$ por hipótesis (a)

b) $1m\angle 3 - \frac{3}{4}(180^0 - 1m\angle x) = 4^0$

c) $1m\angle POT - 1m\angle POQ = 20^0$ por hipótesis(b)

c) $(\ 2m\angle 2 - 2m\angle 1 = 20^0) \div 2$ (b′)

d) $1m\angle 2 - 1m\angle 1 = 10^0$ (b′′)

e) $1m\angle AOP = 1m\angle 2 = 1m\angle 3 + 1m\angle 1$

f) $1m\angle 3 = 1m\angle 2 - 1m\angle 1$ por resta de ángulos

(d) en (f)

h) $1m\angle 3 = 1m\angle 2 - 1m\angle 1 = 10^0$; $1m\angle 3 = 10^0$ $(h *)$

$(h *)$ en (b)

$$1m\angle 3 - \frac{3}{4}(180^0 - 1m\angle x) = 4^0 \quad ; \quad 10^0 - \frac{3}{4}(180^0 - 1m\angle x) = 4^0$$

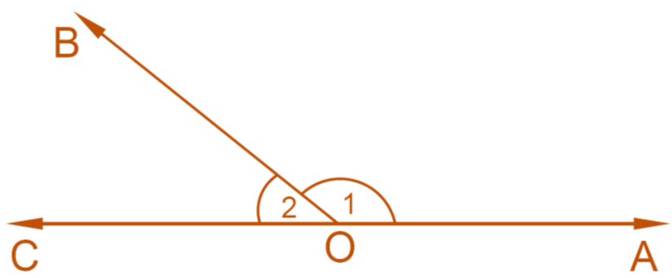
$$40\,° - 540^0 + 3m\angle x = 500^0 + 16^0$$

$$* \quad \mathbf{1m\angle x = 172^0} \qquad \textbf{LQQD}.$$

Ejercicio 2.15.

Si la medida de un ángulo es 58º menor que el triple de la medida de su suplemento, ¿Cuáles son las medidas de los ángulos? Considere la figura 2.15.

Figura 2.15



Solución:

a) $1m\angle 1 = 3\angle m2 - 58^o$ por hipótesis

b) $1m\angle 1 + 1m\angle 2 = 2\angle\,\text{Re c tos}$ suplementarios por hipótesis

(a)en(b)

c) $(3m\angle 2 - 58^o) + 1m\angle 2 = 180^o$

$4m\angle 2 - 58^o = 180^o$

$$1m\angle 2 = \frac{180^o + 58^o}{4}$$

c′) $* \ \mathbf{1m\angle 2 = 59.5^o}$ **LQQD.**

(c′)en(a)

d) $1m\angle 1 = 3(59.5^o) - 58^o$

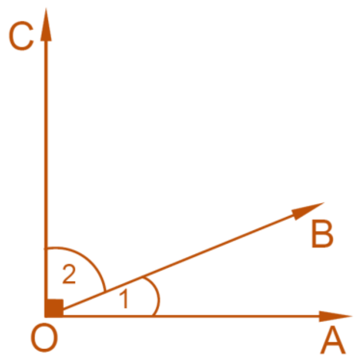
$1m\angle 1 = 178.5^o - 58^o$

$* \ \mathbf{1m\angle 1 = 120.5^o}$ **LQQD.**

Ejercicio 2.16.

Si la medida de un ángulo es $\sqrt{3}$ veces la medida de su complemento, ¿Cuáles son las medidas de los ángulos? Considere la figura 3.16.

Figura 2.16



Solución:

$a) \quad 1m\angle 1 = \sqrt{3}(1m\angle 2) \quad por\ hipótesis$

$b) \quad 1m\angle 1 + 1m\angle 2 = 1\angle \text{Recto} = 90^o por\ ángulos\ complementarios$

$(a) en (b)$

$c) \quad (\sqrt{3})(1m\angle 2) + 1m\angle 2 = 90^o$

$(1m\angle 2)(\sqrt{3} + 1) = 90^o$

$$1m\angle 2 = \frac{90^o}{\sqrt{3} + 1}$$

$d) \qquad * \quad \boldsymbol{1m\angle 2 = 32.95^o} \quad \boldsymbol{LQQD}.$

$(d) en (a)$

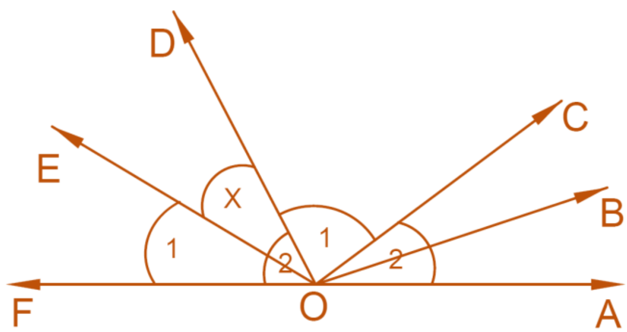
$d) \quad 1m\angle 1 = \sqrt{3}(32.95^o)$

$* \, \boldsymbol{1m\angle 1 = 57.05^o} \quad \boldsymbol{LQQD}.$

Ejercicio 2.17.

Dada la figura 3.17, calcule la medida del ángulo X sabiendo que el ángulo 2 mide 70º.

Figura 2.17



$H) \quad 1m\angle 2 = 70^o$

$T) \quad 1m\angle x = ?$

Solución:

$a)\quad 1m\angle\hat{2} = 70^o \quad por\ hipótesis$

$b)\quad 1m\angle 2 + 1m\angle 1 + 1m\angle 2 = 2\angle Re\,c\,tos$

$= 180^o por\ suma\ de\ ángulos\ consecutivos$

$1m\angle 1 + 2m\angle 2 = 180^o$

$c)\quad 1m\hat{1} = 180 - 2m\angle 2$

$(a)en(c)$

$1m\angle 1 = 180^o - 2(70^o)$

$1m\angle 1 = 180^o - 140^o \qquad : \qquad 1m\angle 1 = 40^o$

$d) 1m\angle 1 + 1m\angle x + 1m\angle 1 + 1m\angle 2 = 2\angle Re\,t\,os$

$= 180^o \ suma\ de\ ángulos\ consecutivos$

$1m\angle x + 2m\angle 1 + 1m\angle 2 = 180^o$

$e)\quad 1m\angle x = 180^o - 2m\angle 1 + 1m\angle 2$

$(c)y(a)en(e)$

$1m\angle x = 180^o - 2(40^o) - 70^o$

$1m\angle x = 180^o - 80^o - 70^o \qquad : \qquad * \boldsymbol{1m\angle x = 30^o} \quad \boldsymbol{LQQD}.$

Ejercicio 2.18.

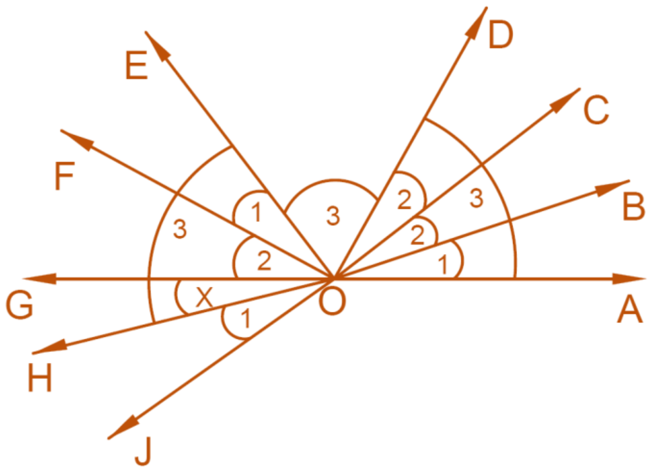
Dada la figura 2.18, calcule la medida del ángulo X sabiendo que:

$H)\quad 1m\angle 1 = 20\,°$

$1m\angle 4 = 60\,°$

$T)\quad 1m\angle x = ?$

Figura 2.18



Solución:

$a)\quad 1m\angle 3 + 1m\angle 2 + 1\angle m3 + 1\angle m1 + 1m\angle 2 = 2\angle Re\,c\,tos$

$= 180\,°\quad suma\ de\ ángulos$

$b)\quad 1m\angle 3 = 1m\angle 1 + 1m\angle 2\qquad por\ hipótesis$

$(b)\ en\ (a)$

$c)\quad 1m\angle 1 + 1m\angle 2 + 1m2 + 1m\angle 1 + 1m\angle 2 + 1m\angle 1 + 1m\angle 2$

$= 2\angle Re\,c\,tos = 180\,°$

$d)\quad 3m\angle 1 + 4m\angle 2 = 180\,°$

$3(20\,°) + 4m\angle 2 = 180\,°$

$4m\angle 2 = 120\,°$

$e)\quad 1m\angle 2 = 30\,°$

$f)\quad 1m\angle 4 = 1m\angle BOD = 2m\angle 2 = 60\,°$

$g)\quad 1m\angle EOH = 1m\angle 4 = 1m\angle 1 + 1m\angle 2 + 1m\angle x = 60\,°$

$1m\angle x = 60\,° - 20\,° - 30\,°$

$*\quad \mathbf{1m\angle x = 10\,°}\quad \boldsymbol{LQQD}.$

Ejercicio 2.19.

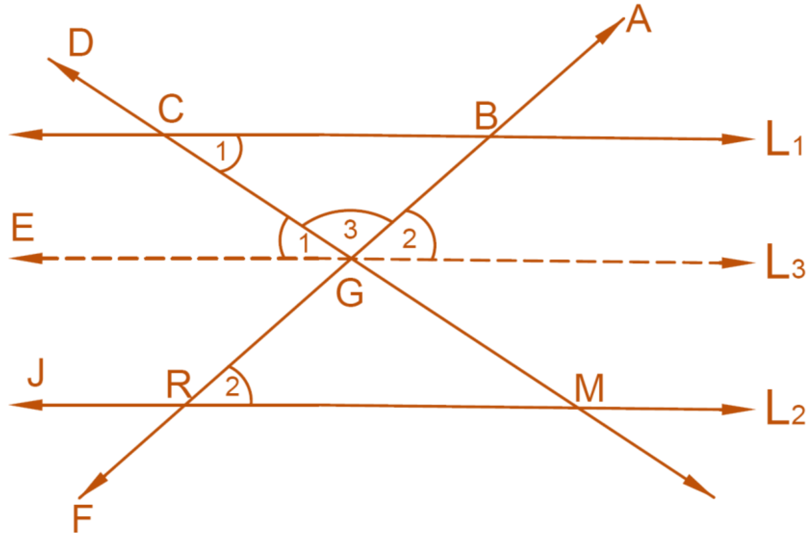
Dada la figura 2.19, calcule la medida del ángulo 3 sabiendo que:

$H)\quad 1m\angle 1 = 40^o$

$\quad\ 1m\angle 2 = 60^o$

$T)\quad 1m\angle 3 = ?$

Figura 2.19



Solución:

$a)\quad L_1\ II\ L_2$ $\quad$ *por hipótesis gráfica*

$b)\quad L_1\ II\ L_2\ II\ L_3$ $\quad$ *por construcción*

$c)\quad 1m\angle 1 = 1m\angle CGE = 40°$ $\quad$ *por ángulos alternos internos*

$d)\quad 1m\angle BGL_3 = 1m\angle 2 = 60°$ $\quad$ *por ángulos correspondientes*

$e)\quad 1m\angle CGE + 1m\angle 3 + 1m\angle BGL_3$

$= 2\angle\ Rectos$ $\quad$ *por suma de ángulos consecutivos*

$40° + 1m\angle 3 + 60° = 180°$

$f)$ $1m\angle 3 = 180^o - 100°$ $\quad * \quad$ $\boldsymbol{1m\angle 3 = 80^o}$ $\quad$ $\boldsymbol{LQQD}$.

Ejercicio 2.20.

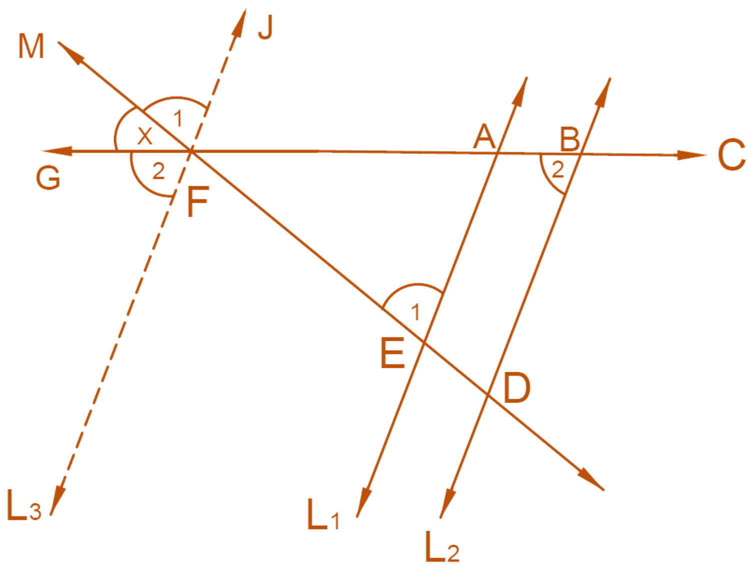
Dada la figura 3.20, calcule la medida del ángulo X sabiendo que:

$H)$ $1m\angle 1 = 60^o$

$1m\angle 1 + 1m\angle 2 = 130^o$

$T)$ $1m\angle x = ?$

Figura 2.20



Solución:

$a)\quad L_1\ II\ L_2 \qquad por\ hipótesis\ gráfica$

$b)\quad L_1\ II\ L_2\ II\ L_3 \quad por\ construcción$

$c)\quad 1m\angle MFJ = 1m\angle 1 \qquad por\ ángulos\ correspondientes$

$d)\quad 1m\angle GFL_3 = 1m\angle 2 \qquad por\ ángulos\ correspondientes$

$e)\quad 1m\angle MFJ + 1m\angle x + 1m\angle GFL_3 = 1\angle Recto$

$= 180^o suma\ de\ ángulos\ consecutivos$

$f)\quad 1m\angle 1 + 1m\angle x + 1m\angle 2 = 180°$

$g)\quad 1m\angle 1 + 1m\angle 2 = 130^o \qquad por\ \ hipótesis$

$(g)\ en\ (f)$

$h)\quad 1m\angle x = 180^o - 130° = 50° \qquad : \qquad * \quad \mathbf{1m\angle x}$

$= \mathbf{50^o} \quad \boldsymbol{LQQD}.$

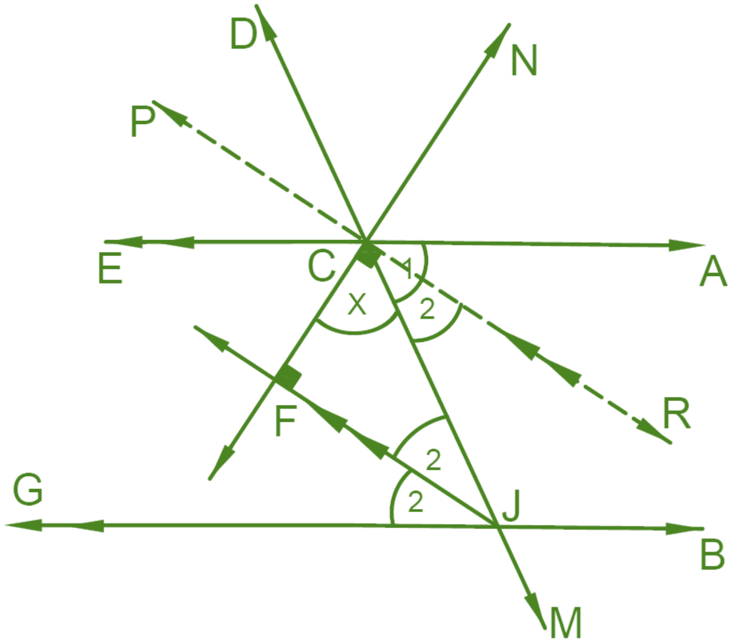
Ejercicio 2.21.

Dada la figura 2.21, calcule la medida del ángulo X sabiendo que:

$H)1m\angle 1\ = 70^o$

$T)1m\angle x\ =?$

Figura 2.21



Solución:

a) $1m\angle 1 = 70^{o}$ por Hipótesis

b) $EA \parallel GB$ por Hipótesis gráfica

c) $1m\angle ACJ = 1m\angle CJG$ por ángulos alternos internos

d) $1m\angle CJG = 2m\angle 2$

e) $1m\angle ACJ = 1m\angle 1$

(d), (e)en(c)

$2m\angle 2 = 1m\angle 1$

f) $1m\angle 2 = \dfrac{1m\angle 1}{2} = \dfrac{70°}{2}$: $1m\angle 2 = 35°$

g) $PR \parallel FJ$ porconstrucción

g′) $1m\angle FJC = 1m\angle JCR$ por ángulos anternos internos

h) $1m\angle NCR = 1\angle ecto = 90^o$ por hipótesis gráfica

i) $1m\angle RCF = 1\angle \mathrm{Re\,c\,to} = 90^o$ por construcción

j) $1m\angle 1 = 1m\angle x + 1m\angle RCM = 1m\angle x + 1m\angle 2 = 90°$

k) $1m\angle x = 90^o - 1m\angle 2 = 90° - 35° \quad \Rightarrow \quad * \, \mathbf{1m\angle x} = \mathbf{55^o} \quad \mathbf{LQQD}.$

Ejercicio 2.22.

Si el complemento del suplemento de un ángulo más el suplemento del complemento de su ángulo doble es igual al doble del suplemento del ángulo menos un ángulo llano. Encontrar la medida del ángulo.

Solución:

$a)\quad [90° - (180° - 1m\angle x)] + [180° - (90° - 2m\angle x)]$

$= [(2)(180° - 1m\angle x) - 180°] \quad por\ hipótesis$

$90° - 180° + 1m\angle x + 180° - 90° + 2m\angle x = 360° - 2m\angle x - 180°$

$5m\angle x = 360° - 180°$

$5m\angle x = 180°$

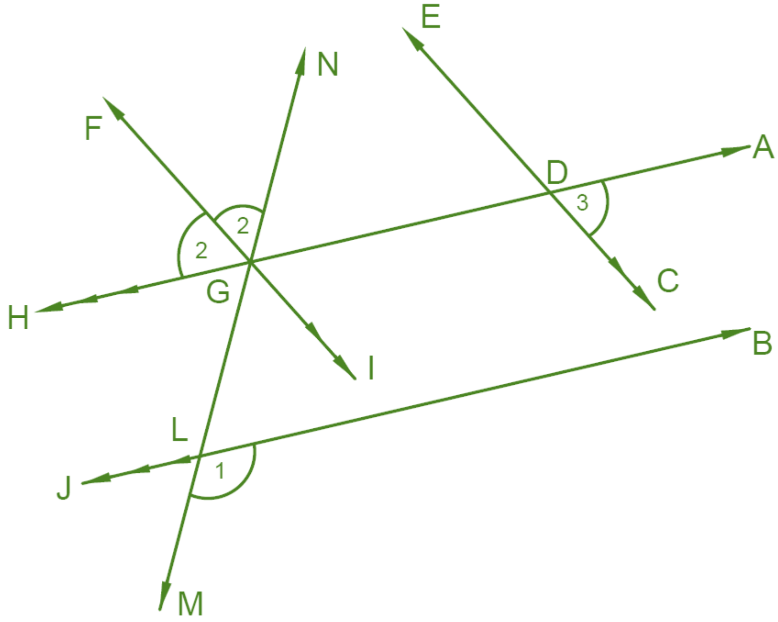
$* \quad \boldsymbol{1m\angle x = 36°} \quad \boldsymbol{LQQD}.$

Ejercicio 2.23. Considere la figura 2.22. Calcule la medida del ángulo 3 sabiendo que:

$H)\quad 1m\angle 1 = 100°$

$T)\quad 1m\angle 3 = ?$

Figura 2.22



Solución:

$a)\quad 1m\angle BLM = 1m\angle 1 \qquad por\ hipótesis$

$b)\quad JB\ II\ AH \qquad por\ hipótesis\ gráfica$

$c)\quad 1m\angle NGH = 2m\angle 2$

$d)\quad 1m\angle 1 = 1m\angle AGL \qquad por\ ángulos\ correspondientes$

$\qquad (d)\ = (c) \quad por\ ser\ opuestos\ por\ el\ vértice$

$\quad 1m\angle 1 = 2m\angle 2$

$e)\quad 1m\angle 2 = \dfrac{1m\angle 1}{2} = \dfrac{100\,°}{2} \qquad\qquad 1m\angle 2 = 50\,°$

$f)\quad IF\ II\ EC \qquad por\ hipótesis\ gráfica$

$h)\quad 1m\angle EGH = 1m\angle EDG = 1m\angle 2 \qquad por\ ángulos\ correspondientes$

$i)\quad 1m\angle EDG$

$= 1m\angle ADC$ *por ángulos opuestos por el vértice*

$1m\angle 2 = 1m\angle 3 = 50\,°$ $\quad * \quad \mathbf{1m\angle 3 = 50\,°}\quad \boldsymbol{LQQD}.$

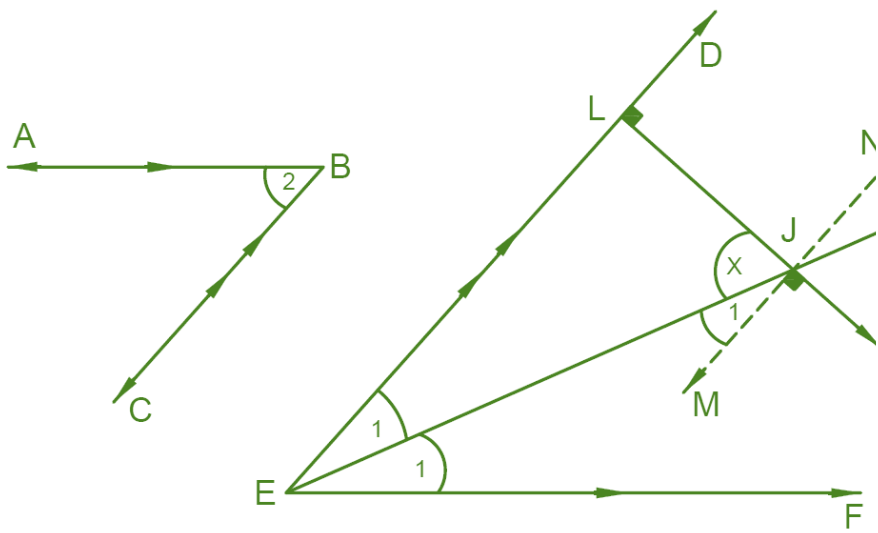
Ejercicio 2.24.

Considere la figura 2.23. Calcule la medida del ángulo 3 sabiendo que:

$H)\quad 1m\angle 2 = 50\,°$

$T)\quad 1m\angle x = ?$

Figura 2.23



Solución:

$a)\quad AB\ II\ EF$ *por hipótesis gráfica*

$b)\quad BC\ II\ ED$ *por hipótesis gráfica*

$c)\quad 1m\angle 2 = 2m\angle 1 \qquad \text{ángulos de lados paralelos entre sí}$

$d)\quad 1m\angle 1 = \dfrac{1m\angle 2}{2} = \dfrac{50}{2} \qquad\qquad 1m\angle 1 = 25°$

$e)\quad MN\ II\ ED \qquad \text{por construcción}$

$f)\quad 1m\angle LJN = 1\angle Re\,c\,to = 90°$

$h)\quad 1m\angle LEJ = 1m\angle EJM = 1m\angle 1 \qquad \text{por ángulos alternos internos}$

$i)\quad 1m\angle EJM + 1m\angle x = 90° \qquad \text{por ángulos complementarios}$

$j)\quad 25° + 1m\angle x = 90° \qquad\qquad * \quad \boldsymbol{1m\angle x = 65°} \quad \boldsymbol{LQQD}.$

Ejercicio 2.25.

Considere la figura 2.24. Calcule la medida de los ángulos 1 y 2, sabiendo que:

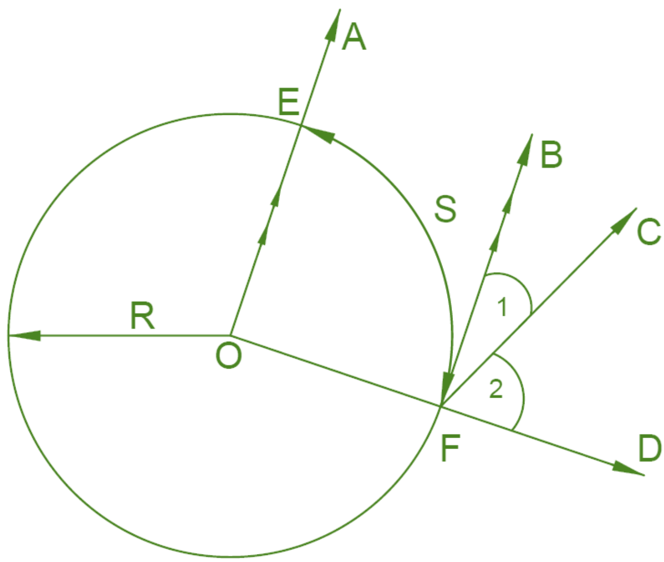
$H)\quad S = \dfrac{3}{2}R$

$\quad\quad 1m\angle 2 = 2m\angle 1$

$T)\quad 1m\angle 1 =?\,(°)$

$1m\angle 2 =?\,(°)$

Figura 2.25



Solución:

$a)$ $\quad Con\ un\ perímetro\ de\ la\ circunferencia\ (2\pi R),$

$existe\ un\ ángulo\ central(360^o),$

$por\ lo\ que,\ con\ un\ arco\ (S)\ existirá\ un\ ángulo\ central\ (1m\angle EOF)$

$2\pi R \rightarrow 360^o$

$\frac{3}{2}R \rightarrow 1m\angle EOF \qquad\qquad 1m\angle EPF = \dfrac{\frac{3}{2}Rx360^o}{2\pi R}$

$b)$ $\quad 1m\angle EOF = 85.94^o$

$c)$ $\quad OA\ II\ FB\ por\ hipótesis\ gráfica$

$d)$ $\quad 1m\angle EOF = 1m\angle BFD\ por\ ángulos\ correspondientes$

$e)$ $\quad 1m\angle 1 + 1m\angle 2 = 1m\angle BFD\ por\ suma\ de\ ángulos\ consecutivos$

$(e) = (d)$

$f)$ $\quad 1m\angle EOF = 1m\angle 1 + 1m\angle 2 = 1m\angle BFD$

$g)\quad 1m\angle EOF = 1m\angle 1 + 2m\angle 1 = 3m\angle 1 \qquad \Rightarrow \qquad 1m\angle 1$

$$= \frac{1m\angle EOF}{3} = \frac{85{,}94\,°}{3}$$

$h)\qquad * \quad \mathbf{1m\angle 1 = 28.64^{o}} \quad \boldsymbol{LQQD}.$

$(h)\ en\ (hipótesis)$

$1m\angle 2 = 2(1m\angle 1) = 2(28.64^{o}) \qquad \Rightarrow \qquad * \quad \mathbf{1m\angle 2}$

$$= \mathbf{57.28^{o}} \quad \boldsymbol{LQQD}.$$

Ejercicio 2.26.

La suma del complemento de un ángulo con el suplemento de su ángulo doble es mayor que 110º al tercio del ángulo. Hallar la medida del ángulo.

Solución:

$a)\quad (90\,° - 1m\angle x) + (180\,° - 2m\angle x)$

$$= \frac{1m\angle x}{3} + 110\,° \qquad por\ hipótesis$$

$$b)\quad 90\,° - 1m\angle x + 180\,° - 2m\angle x = \frac{1m\angle x}{3} + 110\,°$$

$$-3m\angle x - \frac{1m\angle x}{3} = 110\,° - 270\,°$$

$$\frac{-9m\angle x - 1m\angle x}{3} = -160\,°$$

$$10m\angle x = 480\,°$$

$$* \quad \mathbf{1m\angle x = 48\,°} \quad \boldsymbol{LQQD}.$$

Ejercicio 2.27.

La suma del complemento de un ángulo α con el suplemento de su ángulo doble, es igual a $\frac{3}{2}$ del complemento de un ángulo β. Calcular el complemento del ángulo α si $1m\angle\alpha - 1m\beta = \frac{3\pi}{20}$

Solución:

$a) \quad (90\,° - 1m\angle\alpha) + (180\,° - 2m\angle\alpha)$

$$= \frac{3}{2}(90\,° - 1m\angle\beta) \qquad por\ hipótesis$$

$b) \quad (2)(90 - 1m\angle\alpha + 180\,° - 2m\angle\alpha) = \ 270^{o} - 3m\angle\beta$

$c) \quad 540\,° - 6m\angle\alpha = 270\,° - 3m\angle\beta \qquad \rightarrow \quad 1m\angle\beta$

$$= 2m\angle\alpha - 90\,° \quad (c\,*)$$

$b) \quad 1m\angle\alpha - 1m\angle\beta = \dfrac{3\pi}{20} = 27\,° \qquad por\ hipótesis$

$e) \quad 1m\angle\beta = 1m\angle\alpha - 27\,°$

$$(c\,*) = (e)$$

$f) \quad 2m\angle\alpha - 90\,° = 1m\angle\alpha - 27\,° \qquad \rightarrow \quad 1m\angle\alpha = 90\,° - 27\,°$

$g) \quad * \quad 1m\angle\alpha = 63\,°$

$Para\ el\ complemento\ del\ ángulo\ \alpha$

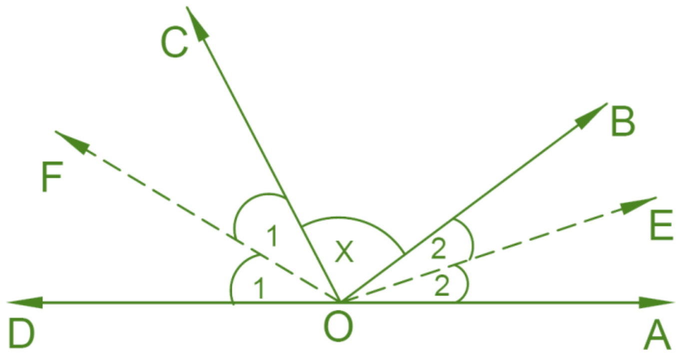
$h) \quad 1m\angle\theta + 1m\angle\alpha = 90\,°$

$1m\theta = 90\,° - 63\,° \qquad \rightarrow \qquad * \quad \mathbf{1m\angle\theta = 27\,°} \quad \boldsymbol{LQQD}.$

Ejercicio 2.28.

En un ángulo llano AOC se trazan los ángulos adyacentes AOB, BOC y COD. Si las bisectrices de los ángulos AOB y COD forman un ángulo de 130º, hallar la medida del ángulo BOC. Considere la figura 3.25.

Figura 2.28



Solución:

$a)\quad 1m\angle FOE = 130°\qquad por\ hipótesis$

$b)\quad 2m\angle 1 + 1m\angle BOC + 2m\angle 2 = 2\angle Rectos$

$= 180°\qquad suma\ de\ ángulos\ consecutivos$

$c)\quad 1m\angle FOE = 1m\angle 1 + 1m\angle BOC + 1m\angle 2 = 130°$

$d)\quad 1m\angle 1 + 1m\angle EOE + 1m\angle 2 = 180°$

$1m\angle 1 + 130° + 1m\angle 2 = 180°$

$e)\quad 1m\angle 1 + 1m\angle 2 = 50°$

$(e)\ en\ (c)$

$50° + 1m\angle BOC$

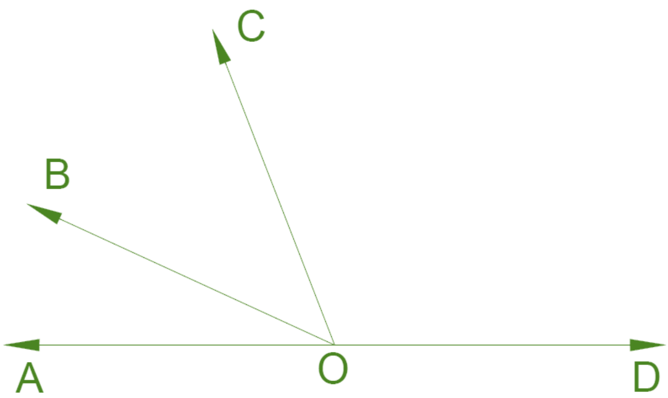
$= 130°\qquad : \qquad * \quad \boldsymbol{1m\angle BOC}$

$\boldsymbol{= 80°\quad LQQD}.$

Ejercicio 2.29.

Dos ángulos adyacentes suplementarios están en la razón de 2 a 3. Hallar el valor del ángulo formado por la bisectriz del ángulo menor con el lado no común. Considere la figura 3.26.

Figura 2.29



Solución:

$a)\quad 1m\angle 1 + 1m\angle 2 = 2\angle Rectos$

$$= 180° \qquad por\ ángulos\ suplementarios$$

$b)\quad \dfrac{1m\angle 1}{1m\angle 2} = \dfrac{2}{3} \qquad por\ hipótesis$

$c)\quad 3m\angle 1 = 2m\angle 2 \qquad \to \qquad 1m\angle 1 = \dfrac{2m\angle 2}{3} \qquad (c\ *)$

$(c\ *)\ en\ (a)$

$d)\quad \dfrac{2m\angle 2}{3} + 1m\angle 2 = 180° \qquad \to \qquad 5m\angle 2 = (180)(3)$

$e)\quad 1m\angle 2 = 108°$

(e) en $(c*)$

$f)\quad 1m\angle 1 = \dfrac{2m\angle 2}{3} = \dfrac{(2)(108°)}{3} = 72°$

$g)\quad OB$ $bisectriz$ del $ángulo$ AOC

$h)\quad 1m\angle 1 = 2m\angle 3 \qquad propiedad\ de\ la\ bisectriz$

$i)\quad 1m\angle 3 = 36°$

$j)\quad 1m\angle x = 1m\angle 2 + 1m\angle 3$

$1m\angle x = 108 + 36 \qquad * \quad \mathbf{1mx = 144°} \quad \boldsymbol{LQQD}.$

Ejercicio 2.30.

Los 4/7 de un ángulo menos la cuarta parte de su suplemento, dan su suplemento aumentado en 300 rad. ¿Cuánto mide el ángulo?

Solución:

$a)\quad 1m\angle 1 + 1m\angle 2 = 180° \qquad por\ hipótesis$

$a`)\quad 1m\angle 1 = 180° - 1m\angle 2$

$b)\quad \dfrac{4}{7}(1m\angle 1) - \dfrac{1m\angle 2}{2} = 1m\angle 2 + 30°$

$(a`)$ en (b)

$c)\quad \dfrac{720° - 4m\angle 2}{7} - \dfrac{1m\angle 2}{4} - 1m\angle 2 = 30°$

$\therefore \qquad 2880° - 16m\angle 2 - 7m\angle 2 - 28m\angle 2 = 840°$

$d)\quad 51m\angle 2 = 2040° \qquad \therefore \qquad 1m\angle 2 = 40°$

$a`)\quad 1m\angle 1 = 180° - 40° \qquad \therefore \qquad 1m\angle 1 = 180° - 40°$

$* \quad \mathbf{1m\angle 1 = 140°} \quad \boldsymbol{LQQD}.$

CAPÍTULO 3
Polígonos

Capítulo 3
Polígonos

3

"La geometría tiene dos grandes tesoros:
uno es el teorema de Pitágoras, y el otro el número áureo.
El primero puede compararse a una medida de oro,
y el segundo a una piedra preciosa."

— *Johannes Kepler*

Objetivo

Desarrollar en los lectores la capacidad de analizar, pensar y resolver casos que involucren el conocimiento geométrico aplicado a los polígonos, reconociendo los tipos de polígonos y aplicando sus teoremas para la resolución de ejercicios.

Logros de aprendizaje

El lector estará en capacidad de:

- Identificar cada uno de los polígonos con sus respectivas propiedades.
- Demostrar los teoremas relacionados sobre polígonos.
- Realizar ejercicios de aplicación sobre polígonos.

3.1 Introducción teórica

Se llama polígono a la parte del plano limitada por una línea poligonal cerrada (cuando el primer extremo del primer segmento coincide con el segundo extremo del último segmento) formada por tres o más segmentos no colineales.

Teoremas

- La suma de los ángulos internos de un triángulo es igual a dos ángulos rectos. A este teorema se le conoce como el teorema básico de los polígonos o el teorema fundamental del triángulo designado como (T. F. Δ).
- La suma de los ángulos interiores de un polígono cualquiera es igual a dos ángulos rectos multiplicado por el número de triángulos en que se descompone el polígono.
- El valor de un sólo ángulo interior de un polígono convexo regular es igual a la suma de los ángulos internos del polígono dividido para el número de vértices del mismo.
- La suma de los ángulos exteriores de todo polígono convexo es igual a cuatro ángulos rectos.
- El valor de un solo ángulo exterior de un polígono convexo regular es igual a la suma de los ángulos externos del polígono dividido para el número de vértices del mismo.
- La suma de los ángulos centrales de un polígono es igual a cuatro ángulos rectos.

- El valor de un sólo ángulo central en un polígono convexo regular es igual a un ángulo externo del mismo.
- El número de diagonales “d” que pueden trazarse desde un vértice es igual al número de vértices menos tres.
- El número de diagonales totales “D” que se pueden trazar en un polígono es igual al producto del número de vértices y el número de vértices menos tres, dividido para dos.
- Dos polígonos son iguales si pueden descomponerse en igual número de triángulos respectivamente iguales y dispuestos del mismo modo.

3.2 Ejercicios resueltos de polígonos

Ejercicio 3.1.

Hallar el número de lados de un polígono, cuyos ángulos internos suman once veces más que sus ángulos externos.

Solución:

$a)\quad S\angle i\ polígono\ = 11\ (S\angle e\ polígono)\qquad por\ hipótesis$

$2\angle R(n-2) = 11\ (4\angle R)$

$180°(n-2) = 11\ (360°)$

$180°n - 360 = 3960°$

$n = \dfrac{3960° + 360°}{180°}\qquad \Rightarrow \qquad * \quad \boldsymbol{n = 24\ lados\quad LQQD}$

Ejercicio 3.2.

La suma de los ángulos internos y externos de un polígono es 5π. ¿Cuántos lados tiene el polígono?

Solución:

$a)\quad S\angle i\ polígono + S\angle e\ polígono = 5\pi \qquad por\ hipótesis$

$2\angle R(n-2) + 4\angle R = 900°$

$180°(n-2) + 360° = 900$

$n = \frac{900°}{180°} \qquad \Rightarrow \qquad * \quad \boldsymbol{n = 5\ lados \quad LQQD}.$

Ejercicio 3.3.

¿Cuántos lados es el polígono que tiene 170 diagonales?

Solución:

$a)\quad D = \frac{n(n-3)}{2}$

$número\ de\ \ diagonales\ totales\ de\ un\ polígono$

$b)\quad D = 170\ \ diagonales \qquad por \qquad hipótesis$

$(b)\ \ en\ (\ a)$

$c)\quad 170 = \frac{n(n-3)}{2}$

$d)\quad (170)(2) = n^2 - 3n$

$e)\quad n^2 - 3n - 340 = 0$

$resolviendo\ \ (e)$

$* \qquad \boldsymbol{n = 20\ lados \qquad LQQD}.$

Ejercicio 3.4.

Si el número de lados de un polígono se aumenta en tres, el número de diagonales totales aumenta en 15. ¿Cuál es el polígono?

Solución:

$a) \quad D_0 + 15 = \quad D_1 \qquad\qquad por\ hipótesis$

$D_0 + 15 = Número\ de\ diagonales\ totales\ del\ Polígono\ original$

D_1

$= Número\ de\ diagonales\ totales\ del\ Polígono\ aumentado\ tres\ lados$

$$b) \quad \frac{n_0(n_0-3)}{2} + 15 = \frac{(n_0+3)(n_0+3-3)}{2} \qquad por\ hipótesis$$

$$\frac{n_0(n_0-3)+30}{2} = \frac{(n_0+3)(n_0+3-3)}{2}$$

$$\frac{30+n_0^2-3n_0}{2} = \frac{(n_0+3)(n_0)}{2} \qquad \Rightarrow \qquad (30+n_0^2-3n)$$

$$= (n_0^2+3n_0)$$

$Re\,s\,olviendo$:

$$* \qquad \boldsymbol{n_0 \ = \ 5\ lados \ \ LQQD}.$$

Ejercicio 3.5.

Hallar el número de diagonales de un polígono cuyos ángulos internos suman 5π.

Solución:

$a) \qquad S\angle i\ polig \quad = \quad 5\pi \qquad por \quad hipotesis$

$2\angle R(n-2) \ = \qquad 5\pi = 5(180\,°) = 900\,°$

$$180°n - 360° = 900°$$

$$n = \frac{900° + 360°}{180°} \quad \Rightarrow \quad n = 7\ lados$$

$b) \quad D = \dfrac{n(n-3)}{2} \quad diagonales\ totales. \quad \Rightarrow \quad D$

$$= \frac{7(7-3)}{2} = \frac{7(4)}{2}$$

$$* \quad \boldsymbol{D = 14\ diagonales \quad LQQD}$$

Ejercicio 3.6.

¿Cuántos lados tiene un polígono que tiene el número de diagonales totales iguales a su número de lados?

Solución:

$a) \quad Número\ de\ diagonales\ totales$

$$= \quad Número\ de\ lados \quad por \quad hipótesis$$

$$\frac{n(n-3)}{2} = n$$

$$n^2 - 3n = 2n \quad \Rightarrow \quad n^2 = 5n$$

$$* \quad \boldsymbol{n = 5\ lados \quad LQQD}.$$

Ejercicio 3.7.

Determinar el número de lados de un polígono que tiene 5 diagonales totales más que el polígono que tiene un lado menos.

Solución:

$a) \quad \dfrac{n(n-3)}{2} = 5 + \dfrac{(n-1)(n-1-3)}{2} \quad por\ hipótesis$

$$\frac{n^2-3n}{2}=\frac{10+n^2-5n+4}{2}$$

$n^2-3n=10+\quad n^2-5n+4 \qquad \Rightarrow \qquad 2n$

$=14$

$*\quad \boldsymbol{n=7\ lados\quad LQQD}.$

Ejercicio 3.8.

¿Cuántos lados tiene un polígono cuyos ángulos internos sumados, es igual a la suma de los ángulos internos y externos de otro polígono de 16 lados?

Solución:

$a)\quad S\angle i\ Polígono\ 1$

$= S\angle i\ Polígono\ 2$

$+ S\angle e\ Polígono\ 2 \qquad por\ hipótesis$

$2\angle R(n_1-2)=2\angle R(n_2-2)+4\angle R$

$b)\quad n_2=16\ lados \qquad por\ hipótesis$

$(b)\ en\ (a)$

$c)\quad 180°(n_1-2)=180°(16-2)+360°$

$180°n_1-360=2520°+360° \qquad \therefore \qquad 180°n_1$

$=3240°$

$n_1=\dfrac{3240°}{180°} \qquad \Rightarrow \qquad * \quad \boldsymbol{n_1=18\ lados\quad LQQD}.$

Ejercicio 3.9.

Los lados de un polígono miden 3, 5, 6, 8 y 10 metros, respectivamente. El perímetro de un polígono semejante es 40m. Encontrar las longitudes de los lados del segundo polígono.

Solución:

$a)\quad POLÍGONO\ 1 \qquad\qquad\qquad\qquad POLÍGONO\ 2$

$Perímetro\ 1 = 32m = P1 \qquad\qquad Perímetro\ 2 = 40m$

$= P2 \qquad por\ hipótesis$

$b)\quad Polígono\ 1$

$L_1 = 3m \qquad L_2 = 5m \qquad L_3 = 6m \qquad L_4 = 8m \qquad L_5 = 10m$

$$c)\ \frac{P_1}{P_2} = \frac{L_1}{l_1} = \frac{L_2}{l_2} = \frac{L_3}{l_3} = \frac{L_4}{l_4}$$

$$= \frac{L_5}{l_5} \qquad\qquad condición\ \ de\ \ semejanza$$

$$d)\ \frac{P_1}{P_2} = \frac{L_1}{l_1} \quad \Rightarrow \quad l_1 = \frac{(L_1)(\ P_2)}{P_1} = \frac{(3m)(40m)}{32m} \quad \Rightarrow \quad * \boldsymbol{l_1}$$

$$= \quad \boldsymbol{3.75m \quad LQQD}$$

$$e)\ \frac{P_1}{P_2} = \frac{L_2}{l_2} \quad \Rightarrow \quad l_2 = l_2 \frac{P_2}{P_1} = (5m)(1.25) \quad \Rightarrow * \quad \boldsymbol{l_2}$$

$$= \ \boldsymbol{6.25m \quad LQQD}$$

Ejercicio 3.10.

En un polígono regular, el ángulo interno es cuatro veces mayor que su ángulo externo.

Solución:

$a)\quad 1\angle i\ Polígono = \quad 4(1\angle e.\ Polígono) \qquad por \qquad hipótesis$

$$\frac{2\angle R(n-2)}{n} = \quad 4\left(\frac{4\angle R}{n}\right)$$

$$\frac{180°n - 360°}{n} \quad = \quad 4\frac{(360°)}{n}$$

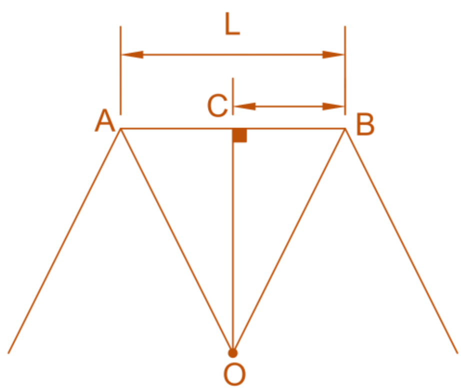
$$180°n \quad = \quad 1440° + 360°$$

$$n = \frac{1800°}{180°} \qquad \Rightarrow \quad * \qquad\qquad \boldsymbol{n \quad = \quad 10\ lados \quad LQQD}.$$

Ejercicio 3.11.

Un polígono regular tiene su apotema $5\sqrt{3}$ y su lado 10 unidades. Hallar el número de diagonales totales del polígono.

Figura 3.1



Solución:

$a)\quad OC = 5\sqrt{3} = apotema \qquad\qquad por\ definición$

$b)\quad AB = 10\,unidades = lado\ del\ polígono \qquad\qquad por\ hipótesis$

$c)\quad \Delta OCB\ rectángulo$

$$d)\quad Tag\ \angle BOC = \frac{CB}{OC} = \frac{\frac{AB}{2}}{apotema} = \frac{\frac{10\ unidades}{2}}{5\sqrt{3}\ unidades} = \frac{5}{5\sqrt{3}} = 0.57735$$

$1m\angle BOC = 30°$

$e)\quad 1m\angle AOB = 1m\angle central\ del\ polígono = 60°$

$$f)\qquad 1\angle cent. \quad = \quad \frac{4\angle R}{n} \qquad\qquad por\ definición$$

$$n \quad = \frac{360°}{60°} \qquad \Rightarrow \qquad n = \quad 6 \quad lados$$

$$g)\qquad D\ = \frac{n(\text{n-3})}{2}$$ número de diagonales totales del polígono

$$\text{D}\ = \frac{6(6\text{-}3)}{2} \qquad \Rightarrow \qquad * \quad \boldsymbol{D} =$$

9 diagonales. $\qquad\qquad$ ***LQQD.***

Ejercicio 3.12.

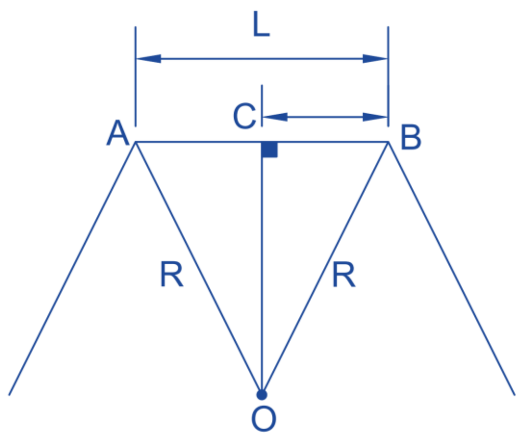
El radio de un polígono regular es de 5.54 y su apotema 5.1183 unidades.

Determinar:

a) El valor de su lado.
b) El valor de su ángulo central.
c) El valor de su ángulo interno.
d) El número total de sus diagonales.

Solución:

Figura 3.2



$a)\quad \Delta\ OCB\ rectángulo$

$b)\quad OC = apotema \qquad\qquad por\ definición$

$c)\quad R^2 = \quad OC^2 + CB^2 \qquad\qquad\qquad teorema\ de\ .Pitágoras$

$$\left(\frac{L}{2}\right)^2 = (5.54\ unid.)^2 - (5.1183\ unid.)^2$$

$$\frac{L}{2} \quad = \quad 2.12unid. \qquad \Rightarrow \qquad * \quad L = 4.24unid. \quad LQQD.$$

$d)\quad Pr\,e\,gunta\ (b)$

$$cos\ \ \angle AOB = \frac{R^2 + R^2 - L^2}{2R.R} \qquad\qquad ley \text{ de cosenos}$$

$$cos \quad \angle AOB = \frac{(5.54unid.)^2 + (5.54unid.)^2 - (4.24)^2}{2(5.54)^2}$$

$$= 0.707$$

$$* \quad 1 \quad m\angle AOB = ángulo\ central = 45° \quad LQQD.$$

$e) \quad Pr\ e\ gunta\ (c)$

$$1\angle cent. = \frac{4\angle R}{n} \quad \Rightarrow \quad n = \frac{360°}{45°} \quad \Rightarrow \quad * \quad n$$

$$= 8 \text{ lados}$$

$$1\angle \text{int.} = \frac{2\angle R(\text{n-2})}{n} = \frac{180°(8-2)}{8}$$

$$* \quad 1\angle int. = \quad 135° \quad LQQD.$$

$f) \quad Pr\ e\ gunta\ (d)$

$$D = \frac{n(n-3)}{2} = \frac{8(8-3)}{2}$$

$$* \quad \boldsymbol{D = \quad 20\ diagonales \quad LQQD.}$$

Ejercicio 3.13.

¿Cuántos lados tiene un polígono regular, si su ángulo interno es igual a su ángulo central?

Solución:

$a) \quad 1\angle int. \quad = \quad 1\angle cent. \qquad por \qquad hipótesis$

$$\frac{2\angle R(n-2)}{n} = \frac{4\angle R}{n}$$

$$180° n - 360° = \quad 360°$$

$$n = \frac{720°}{180°}$$

$$\boldsymbol{n \quad = \quad 4\ lados \quad LQQD.}$$

Ejercicio 3.14.

La diferencia del ángulo interno y del ángulo central de un polígono regular es de 36°. Hallar el número de lados del polígono.

Solución:

$$a) \quad 1\angle int. \quad - \quad 1\angle cent. \quad = \quad 36° \qquad\qquad por\ hipótesis$$

$$b) \quad \frac{2\angle R(n-2)}{n} - \frac{4\angle R}{n} \quad = \quad 36°$$

$$\therefore \qquad \frac{180°(n-2) - 360°}{n} = \quad 36°$$

$$180°n - 360° - 360° \quad = \quad 36°n$$

$$\therefore \qquad 180°n - 36°n \quad = \quad 720°$$

$$n \quad = \quad \frac{720°}{144°}$$

$$\boldsymbol{n \quad = \quad 5\ lados \qquad LQQD}.$$

Ejercicio 3.15.

La suma de los ángulos internos de un polígono Q es igual a la suma de los ángulos internos y externos de un polígono P. Calcular el número de lados de Q si P tiene 16 lados.

Solución:

$Consideramos\ dos\ polígonos$:

POLÍGONO Q POLÍGONO P $\Rightarrow$ n_p

$= 16\ lados$

$a) \quad S\angle i \ polígono \ Q$

$$= \quad S\angle i \ polígono \ P$$

$$+ \ S\angle e \ polígono \ P \qquad por \quad hipótesis$$

$$2\angle R(n_Q - 2) \quad = \quad 2\angle R(n_P - 2) + 4\angle R$$

$$180°n_Q - 360° \ = \quad 180°(16 - 2) + 360°$$

$$\mathrm{n}_Q = \quad \frac{2520° + 360° + 360°}{180°}$$

$$\mathbf{n}_{\boldsymbol{Q}} = \quad \boldsymbol{18 \ lados \quad LQQD}.$$

Ejercicio 3.16.

Si a un polígono regular se le aumenta un lado su ángulo interior aumenta en π/15. ¿Cuántos lados tiene el polígono?

Solución:

$$a) \qquad \frac{2\angle R(n-2)}{n}$$

$$= \qquad \frac{2\angle R(n-2)}{n} + \frac{\pi}{15} \qquad por \qquad hipótesis$$

$$\frac{\pi}{15} = \frac{180°}{15} = \ 12°$$

$$\frac{180°[(n+1)-2]}{(\mathrm{n+1})} \quad = \quad \frac{180°n - 360°}{n} + 12°$$

$$\therefore \quad \frac{180°(n-1)}{(\mathrm{n+1})} \quad = \quad \frac{180°n - 360° + 12°n}{n}$$

$$\mathrm{n}(180°n - 180°) = \ (\mathrm{n+1}) \ (192°n$$

$$- 360°) \qquad propiedad \ de \ las \ proporciones$$

$$180°n^2\text{-}180°n \quad = \ 192°n^2 + 192°n - 360°n - 360°$$

$$12°n^2 + 12°n - 360° \quad = 0$$

$$n^2 + n - 30° \; = 0 \qquad \text{resolviendo}$$

$$* \quad \boldsymbol{n} \quad = \quad \boldsymbol{5\ lados} \quad \boldsymbol{LQQD}.$$

Ejercicio 3.17.

El lado de un polígono regular de 12 lados mide 5 unidades. ¿Cuánto mide?:

a) El ángulo central.
b) El radio.
c) El apotema.

Solución:

$Pregunta\ .(a)$

$$1\angle central. \quad = \quad \frac{4\angle R}{n} \qquad por\ definición$$

$$1\angle central \quad = \quad \frac{360°}{12}$$

$$\Rightarrow \quad * \quad \boldsymbol{1\angle central = \quad 30°} \qquad \boldsymbol{LQQD}.$$

$$1m\angle POB = \frac{(1\angle cent.)}{2} \quad = \quad 15°$$

$Pregunta\ (b)$

$\Delta OPB\ rectángulo$

$$sen\ \ 15° \quad = \quad \frac{\left(\frac{L}{2}\right)}{R} \qquad \therefore \qquad R = \frac{2.5\ unid.}{Sen\ 15°}$$

$$= \frac{2.5\ unid.}{0.2588}$$

$$* \quad \boldsymbol{R = \quad 9.66\ unidades \quad LQQD.}$$

$Pregunta\ (c)$

$$tg\ 15° = \frac{\left(\frac{L}{2}\right)}{Apotema} \qquad \therefore \qquad Apotema = \frac{2.5unid.}{0.268}$$

$$\Rightarrow$$

$$* \quad \boldsymbol{Apotema = \quad 9.33\ unidades \quad LQQD.}$$

Ejercicio 3.18.

Si el número de lados de dos polígonos regulares difieren en dos, sus ángulos centrales difieren en 15°. ¿Cuántos lados tiene el polígono?

Solución:

$Consideramos\ dos\ polígonos:$

$POLÍGONO\ \ 1 \qquad \wedge \qquad POLÍGONO\ \ 2$

$a)\quad Número\ de\ lados\ del\ polígono\ 1 \ \rangle\ Número\ de\ lados\ del\ polígono\ 2$

$b)\quad n_1 - n_2 = 2$

$c)\quad 1\angle central\ polígono\ 2 \ \rangle\ 1\angle central\ polígono\ 1$

$d)\quad 1\angle central\ polígono\ 2 \quad - \quad 15°$

$$= 1\angle central\ polígono\ 1 \qquad por\ hipótesis$$

$$\frac{4\angle Re\,c\,tos}{n_2} - 15° = \frac{4\angle Re\,c\,tos}{n_1}$$

$$\frac{360° - (15°)(n_2)}{n_2} = \frac{360°}{n_2 + 2}$$

$d)\quad (n_2 + 2)(360° - 15°.n_2) = 360°.n_2$

$e)\quad n_2^2 + 2n_2 - 48 = 0$

$Re\,s\,olviendo\ la\ ecuación\ anterior$

$* \quad \boldsymbol{n_2 = 6\ lados \qquad LQQD}.$

$b)\quad n_{1=}n_2 + 2$

$n_1 = 6 + 2$

$\boldsymbol{n_1 = 8\ lados \quad LQQD}.$

Ejercicio 3.19.

Si el número de lados de un polígono regular aumenta en 10, cada ángulo del nuevo polígono es 3° mayor que cada ángulo del primero. ¿Cuántos lados tiene cada polígono?

Solución:

$Consideramos$:

$POLÍGONO\ 1 \qquad\qquad POLÍGONO\ 2$

$a) \quad Sea \qquad n_1 \quad \rangle \quad n_2$

$n_1\text{-}10 \quad = \quad n_2$

$b) \quad 1\angle central\ polígono\ 1\ \rangle\ 1\angle central\ polígono\ 2$

$c) \quad 1\angle central\ polígono\ 1 - 3°$

$= \quad 1\angle central\ polígono\ 2 \qquad hipótesis$

$$d) \quad \frac{4\angle R}{n_2} - 3° \quad = \quad \frac{4\angle R}{n_1}$$

$$\frac{360° - 3°n_2}{n_2} = \frac{360°}{n_2 + 10}$$

$$(n_2 + 10)(360° - 3°n_2) = 360°n_2$$

$$360°n_2 - 3°n_2^2 + 3600° - 30°n_2 - 360°n_2 = 0$$

$$3°n_2^2 + 30°n_2 - 3600° = 0$$

$Resolviendo$

$$n_2^2 + 10n_2 - 1200 = 0$$

$$n_2 = 30\ lados$$

$e) \qquad n_1 = n_2 + 2 \qquad : \qquad n_1 = (30 + 10)lados$

$$\boldsymbol{n_1 = 40 \quad lados \qquad LQQD.}$$

Ejercicio 3.20.

Si la suma de los ángulos internos de dos polígonos regulares difiere en $\pi/4$ y sus ángulos centrales difieren en $\pi/24$, calcular el número de lados de cada polígono.

Solución:

$Consideramos$:

$POLÍGONO\ 1 \qquad POLÍGONO\ 2$

$a)\quad Sea \qquad n_1 \quad \rangle \quad n_2$

$b)\quad S\angle i\ polígono\ 1 - S\angle i\ polígono\ 2 = 4\pi \qquad por\ hipótesis$

$2\angle R\,(n_1\text{-}2) - 2\angle R\,(n_2\text{-}2) = 4\pi$

$180°n_1 \text{-} 360° - 180°n_2 - 360° = 720°$

$(180°n_1 \text{-} 180°n_2 = 720°) \quad \div \quad para\ 180°$

$n_1 - n_2 = 4$

$c)\quad n_1 = 4 + n_2$

$d)\quad 1\angle central\ polígono\ 2\text{-}1\angle central\ polígono\ 1$

$$= \frac{\pi}{24} \qquad por\ hipótesis$$

$$\frac{4\angle R}{n_2} - \frac{4\angle R}{n_1} = 7.5° \qquad \Rightarrow \qquad \frac{360°}{n_2} - \frac{360°}{n_1}$$

$$= 7.5°$$

$$360°n_1 - 360n_2 = 7.5°n_1n_2$$

$$\frac{n_1 \text{-} n_2}{n_1n_2} = \frac{7.5°}{360°} = \frac{1}{48}$$

$e)\quad n_1 \text{-} n_2 = \dfrac{1}{48}n_1n_2$

(c) *en* (e)

$$(4+n_2)-n_2=\frac{1}{48}\quad(4+n_2)\,n_2$$

$n_2^2+4n_2-192=0$ *resolviendo*

$f)$ $\quad * \quad$ *Polígono* $2=12$ *lados* $\quad LQQD.$

(f) *en* (c)

$n_1 = 4+n_2 \quad : \quad n_1 = 4+12$

Polígono 1 = 16 lados LQQD.

Ejercicio 3.21.

Se tienen dos polígonos regulares P y Q, el polígono P tiene 8 lados menos que el polígono Q y, cada ángulo interno que tiene el polígono Q vale π/15 más que cada ángulo interno del polígono P. Encontrar el número de lados de cada polígono.

Solución:

POLÍGONO P $\wedge$ *POLÍGONO Q* *por hipótesis*

$a)$ *Sea*: *El número de lados del polígono P* $\rangle$ *El número de lados del polígono Q*

$b)$ $n_P-8 = n_Q$ *por hipótesis*

$c)$ $1\angle\text{interno }(polígonoP)\ \rangle\ 1\angle\text{interno }(polígonoQ)$

$d)$ $1\angle\text{interno }(polígonoP)-12°$

$= \ 1\angle\text{interno }(polígonoQ)$ por hipótesis

$$\frac{2\angle R(n_P-2)}{n_P}-12° = \frac{2\angle R(n_Q-2)}{n_Q}$$

$$\frac{180°n_P-360°-12°n_P}{n_P} = \frac{180°(n_P-8-2)}{n_P-8}$$

$$(n_P - 8)(168°n_P - 360°) \quad = \quad n_P \ (180°n_P - 1800°)$$

$$168°n_P^2 + 2880° - 1344°n_P - \ 360°n_P = \quad 180°n_P^2 - 1800°n_p$$

$$12°n_P^2 - 96°n_P - 2880° = \quad 0$$

$$n_P^2 - 8n_P - 240 = \quad 0 \qquad \text{resolviendo:} \quad n_P$$

$$= \quad 6 \ lados$$

$e)$ $\quad \boldsymbol{Pol\acute{\imath}gono P = 6 \ lados \quad LQQD}.$

$(e) \ en \ (b)$

$f)$ $\quad n_Q = n_P - 8 \qquad \Rightarrow \qquad n_Q = (20 - 8 \quad) lados$

$$\Rightarrow \qquad n_Q = 12 \ lados$$

Polígono $\boldsymbol{Q}$ **= 12 lados LQQD.**

Ejercicio 3.22.

El ángulo interno y el ángulo central de dos polígonos regulares difieren en 126º y sus ángulos internos en 18°. Calcular el número de lados de cada polígono.

Solución:

$Consideramos$:

$POL\acute{I}GONO \rightleftarrows \ 1 \qquad \wedge \qquad POL\acute{I}GONO \ 2$

$a)$ $\quad 1\angle interno \ (pol\acute{\imath}gono \ 1)$ - $1\angle interno \ (pol\acute{\imath}gono \ 2)$

$$= \quad 126° \qquad hip\acute{o}tesis$$

$$b) \quad \frac{2\angle R(n_1 - 2)}{n_1} - \frac{4\angle R}{n_2} = \quad 126°$$

$$\frac{180°n_1n_2 - 360°n_2 - 360°n_1}{n_1n_2} = \quad 126°$$

$$180°n_1n_2 - 126°n_1n_2 - 360°n_1$$

$$= \quad 360°n_2 \qquad : \quad n_1(3n_2 - 20) = \quad 20n_2$$

$c) \quad n_1 \quad = \quad \dfrac{20n_2}{3n_2\text{-}20}$

$d) \quad S\angle internos \ (polígono\ 1) - S\angle internos \ (polígono\ 2)$

$$= \quad 18° \qquad hipótesis$$

$$\frac{2\angle R(n_1\text{-}2)}{n_1} - \frac{2\angle R(n_2-2)}{n_2} \quad = \quad 18°$$

$$\frac{180°n_1n_2 - 360°n_2 - 180°n_2n_1 + 360°n_1}{n_1n_2} = \quad 18°$$

$: \ 20n_1 - 20°n_2 \quad = \quad n_1n_2$

$e) \quad n_1 \quad = \quad \dfrac{20n_2}{20\text{-}n_2}$

$(c) = (e)$

$$\frac{20n_2}{3n_2\text{-}20} \quad = \quad \frac{20n_2}{20\text{-}n_2} \qquad : \qquad 60n_2\text{-}10n_2$$

$$= \quad 400n_2 - 20n_2^2$$

$\Rightarrow \qquad n_2^2 - 10n_2 = \quad 0$

$* \quad \boldsymbol{Polígono2 = 10} \ \ lados \quad LQQD.$

$e) \quad n_1 = \dfrac{20(10)}{20-10} \qquad \Rightarrow \qquad * \quad \boldsymbol{Polígono\ 1}$

$= \mathbf{20} \ \ lados \quad LQQD.$

Ejercicio 3.23.

En un polígono regular el perímetro es de 12cm, el radio 2cm y apotema $\sqrt{3}cm$ Calcular el perímetro y el radio de otro polígono regular de igual número de lados si su apotema es 3 cm.

Solución:

$a) \quad Polígono1 \approx Polígono2 \qquad\qquad por\ hipótesis$

$b)\quad Perímetro1 = 12cm \qquad R_1 = 2cm \qquad apotema\ 1$

$= \sqrt{3}cm \qquad$ por h$ipótesis$

apotema2=3cm

$$c)\quad \frac{Perímetro\ 1}{Perímetro\ 2}$$

$$= \frac{apotema1}{apotema\ 2} \qquad por\ condición\ \ de\ \ semejanza$$

$$d)\quad Perímetro_2 = \frac{(apotema\ 2)(Perímetro\ 1)}{apotema\ 1} = \frac{(3cm)(12cm)}{\sqrt{3}cm}$$

$$*\quad Perímetro\ polígono\ 2 = \quad 20.78\ cm \quad LQQD.$$

$$e)\quad \frac{Perímetro\ 1}{Perímetro\ 2}$$

$$= \frac{Radio\ 1}{Radio\ 2}$$ por $condición\ \ de\ \ semejanza$

$$f)\quad Radio\ 2$$

$$= \frac{(Radio\ 1)(Perímetro\ 2)}{Perímetro_1} = \frac{(2\text{cm})(20.78\text{cm})}{(12cm)}$$

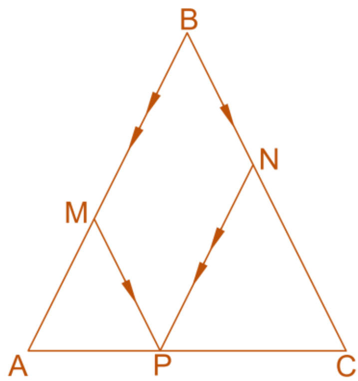
$$*\quad \boldsymbol{Radio\ polígono\ 2 = \quad 3.46\ cm \qquad LQQD.}$$

Ejercicio 3.24.

Si desde un punto cualquiera (interior) de la base de un triángulo isósceles se trazan dos rectas paralelas a los lados. Demostrar que la suma de estas paralelas es una constante.

Solución:

Figura 3.4



$a)\quad \Delta ABC \quad isósceles\ por\ hipótesis$

$AB = BC = K = constante$

$1m\angle BCA = 1m\angle CAB = 1m\angle 1 \qquad por\ teorema\ de\ \Delta\ isósceles$

$1m\angle ABC = 1m\angle 2$

$b)\quad NP\ II\ AB \quad por\ hipótesis$

$1m\angle BCA = 1m\angle CAB = 1m\angle MPA$

$= 1m\angle 1 \qquad por\ ángulos\ correspondientes$

$c)\quad MP\ II\ BC \quad por\ hipótesis$

$1m\angle BCA = 1m\angle MPA = 1m\angle BAC$

$= 1m\angle 1 \qquad por\ ángulos\ correspondientes$

$d)\quad \Delta ABC \approx \Delta MPA \approx \Delta NPC \quad por\ definición$

$e)\quad MP = BN = AM$

$f)\quad BM = NP = NC$

$g)\quad MP + NP = \ suma\ de\ segmentos\ paralelos$

$h)\quad AB = AM + BM = K \qquad \Rightarrow \qquad AB = MP + NP = K \qquad (h`)$

$i)\quad BC = BN + NC = K \qquad \Rightarrow \qquad BC = MP + NP = K \qquad (i`)$

$(h`) = (i`)$

$j)\quad \boldsymbol{AB = BC = MP + NP = K = constante \qquad LQQD}.$

Ejercicio 3.25.

El polígono regular P tiene dos lados más que el polígono regular Q y la diferencia entre sus ángulos centrales es de 6º. Calcular el número de lados de cada polígono.

Solución:

$a)\quad Polígono\ P \quad \wedge \quad Polígono\ Q$

$donde: \quad El\ número\ de\ lados\ del\ polígono\ P \rangle\ El\ número\ de\ lados\ del\ polígono\ Q$

$b)\quad n_P + 2 = n_Q \quad por\ hipótesis$

$c)\quad n_P - n_Q = 2$

$d)\quad 1\angle central\ (polígono\ Q) - 1\angle central\ (polígono\ P)$

$= 6° \quad por\ hipótesis$

$$\frac{4\angle Re\,c\,tos}{n_Q} - \frac{4\angle Re\,c\,tos}{n_P} = 6°$$

$$\frac{(360°)(n_P) - (360°)(n_Q)}{(n_P)(n_Q)} = 6°$$

$$e)\quad \frac{(n_Q)(n_P)}{n_P - n_Q} = 60 \qquad : \qquad \frac{(n_Q)(n_P)}{60} = n_P - n_Q \qquad (e`)$$

$(c) = (e`)$

$$2 = \frac{(n_Q)(n_P)}{60}$$

$$120 = (n_P + 2)(n_P)$$

$$(n_P)^2 + 2(n_P) - 120 = 0$$

$f)$ $\quad * \quad \boldsymbol{n_P = 10\ lados} \qquad \boldsymbol{LQQD}.$

$b)$ $\quad n_Q = n_P + 2 \qquad \Rightarrow \qquad * \quad \boldsymbol{n_Q = 12\ Lados} \qquad \boldsymbol{LQQD}.$

CAPÍTULO 4

Triángulos

Capítulo 4
Triángulos

4

"La geometría de Descartes es un método para dar ecuaciones algebraicas a las curvas."

— Voltaire

Objetivo

Definir, interpretar y aplicar los principios de semejanza y congruencia en los triángulos, con un enfoque descriptivo, con el empleo de las proposiciones y de las relaciones métricas, que permitan al lector resolver aplicaciones que involucren a todo tipo de triángulos.

Logros de aprendizaje

El lector estará en capacidad de:

- Reconocer los tipos de triángulos y explicar cada uno de ellos.
- Aplicar los teoremas relacionados a los triángulos, describiendo las rectas, segmentos y puntos notables que se presentan en los triángulos.

- Realizar ejercicios de aplicación sobre triángulos aplicando los postulados de semejanza y congruencia.
- Utilizar las relaciones métricas de los triángulos rectángulos, los teoremas de Ceva, Menelao, Stewart, para desarrollar aplicaciones de triángulos.
- Identificar las propiedades de las bisectrices, baricentro, ortocentro.

4.1 Introducción teórica

Triángulo es la porción de plano limitado por tres segmentos rectilíneos que tiene dos a dos un extremo común.

Teoremas principales de triángulos

- La suma de los tres ángulos internos del triángulo es igual a dos ángulos rectos.
- Un ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de los ángulos interiores no adyacentes a él.
- La suma de los ángulos exteriores de un triángulo es igual a cuatro ángulos rectos.
- En todo triángulo isósceles, a lados iguales se oponen ángulos iguales o viceversa.
- En todo triángulo, a mayor lado se opone mayor ángulo.
- En todo triángulo, un lado es menor que la suma de los otros dos, pero mayor que su diferencia.

Rectas - segmentos y puntos notables de un triángulo

Mediana

Es el segmento trazado desde un vértice hacia el punto medio del lado opuesto. El punto de intersección de las tres medianas se llama BARICENTRO, CENTRO DE GRAVEDAD o CENTROIDE. y se representa por (G). La mediana respecto a la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la mitad de la hipotenusa.

Altura

Es la perpendicular trazada desde un vértice, hacia el lado opuesto o a su prolongación. El punto donde concurren las tres alturas se llama ORTOCENTRO se representa por " O”.

Bisectriz interior de un ángulo

Es la recta que divide a un ángulo interno del triángulo en dos ángulos parciales, iguales consecuentemente en un triángulo existirán tres bisectrices internas, el punto donde concurren las tres bisectrices interiores se llama INCENTRO y se representa por " I ".

Bisectriz exterior de un ángulo

Es la recta que corresponde a la bisectriz de un ángulo exterior, hay tres bisectrices una para cada ángulo exterior. El punto de intersección de las bisectrices exteriores determina el EX-CENTRO o EX - INCENTRO, se representa con " E ". El ex - centro es el centro de la circunferencia ex - inscrita al triángulo.

Mediatriz

Es la perpendicular trazada en el punto medio de cada lado. El punto de intersección de las tres mediatrices se llama CIRCUNCENTRO y se representa por " C “, el cual equidista de los tres vértices del mismo, y constituye el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo.

Ceviana

Es el segmento rectilíneo que une un vértice con cualquier punto del lado opuesto.

Características de las rectas - segmentos y puntos notables en los triángulos equiláteros - isósceles - escálenos.

- En los triángulos equiláteros las rectas, segmentos notables, trazadas desde uno de los vértices, se confunden en una sola y pueden ser consideradas como, mediana, altura, bisectriz interna, mediatriz, o ceviana. En lo que respecta a los puntos notables, así mismo, un solo punto representa el baricentro, ortocentro, incentro, circuncentro.

- En los triángulos isósceles las rectas o segmentos trazadas desde el vértice comprendido entre los dos lados iguales tienen la misma característica que el caso anterior, no así con los puntos notables que se encuentran ubicados en distinta posición.
- En los triángulos escálenos las rectas, segmentos y puntos notables se encuentran ubicados en el interior y exterior del triángulo.

Propiedades de las rectas notables

- El ángulo formado por dos bisectrices internas de un triángulo es igual a un ángulo recto más la mitad de la medida del ángulo no considerado por las bisectrices.
- El ángulo formado por dos bisectrices externas de un triángulo es igual a un ángulo recto disminuido en la mitad del ángulo interno en el tercer vértice no considerado por las bisectrices.
- El ángulo formado por dos bisectrices, una interna y otra externa de dos vértices diferentes de un triángulo, es igual a la mitad de la medida del ángulo interno correspondiente al tercer vértice no considerado por las bisectrices señaladas.
- El ángulo formado por la bisectriz interna y la altura del mismo vértice de un triángulo es igual a la semidiferencia de las medidas de los ángulos internos en los otros vértices.

- El ángulo formado por la altura y la mediana relativas a la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la diferencia de los ángulos agudos.

Semejanza de triángulos

Se dice que dos triángulos son semejantes cuando tienen sus ángulos respectivamente iguales y sus lados homólogos proporcionales.

Postulados de semejanza de triángulos

Primer postulado. - Si dos triángulos tienen dos ángulos respectivamente iguales, son semejantes. A esta proposición se le conoce como criterio de semejanza, ÁNGULO-ÁNGULO; Para que estos triángulos sean semejantes es necesario que tengan también iguales los terceros ángulos, y que los lados homólogos sean proporcionales.

Segundo postulado. - Si dos triángulos tienen dos lados proporcionales e igual el ángulo comprendido entre estos dos lados, los triángulos son semejantes.

Tercer postulado. - Si dos triángulos tienen los tres lados proporcionales son semejantes.

Congruencia

Se denominan figuras congruentes a las que tienen la misma forma y el mismo tamaño, se puede decir que una es la copia exacta de la otra.

Triángulos congruentes

Son los que tienen la misma forma e igual tamaño. Si dos triángulos son congruentes, sus lados y sus ángulos correspondientes son iguales. Para representar la congruencia entre triángulos se emplea el símbolo “ $\cong$ ".

Postulados de congruencia de triángulos

- Si un triángulo tiene dos lados y el ángulo comprendido iguales a los correspondientes elementos de otro, entonces los dos triángulos son congruentes en una correspondencia, LADO - ÁNGULO – LADO (L. A. L).
- Si un triángulo tiene un lado y sus dos ángulos contiguos iguales, a los correspondientes elementos de otros entonces los dos triángulos son congruentes, en una correspondencia ÁNGULO - LADO – ÁNGULO (A. L. A.).
- Si los tres lados de un triángulo son iguales a los correspondientes lados de otro, entonces los dos triángulos son congruentes, en una correspondencia. LADO - LADO – LADO (L. L .L).

Teorema de Pitágoras generalizado respecto a un ángulo agudo, en un triángulo cualquiera. En todo triángulo el cuadrado del lado opuesto a un ángulo agudo es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados menos el duplo de uno de ellos por la proyección del otro sobre él.

Teorema de Pitágoras generalizado respecto a un ángulo obtuso, en un triángulo cualquiera. - En todo triángulo el cuadrado del lado opuesto a un ángulo obtuso es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados más el duplo de uno de ellos por la proyección del otro sobre él.

Propiedad de la bisectriz interna. - En todo triángulo, la bisectriz de un ángulo interno divide al lado opuesto en dos segmentos directamente proporcionales a los lados del triángulo que forman dicho ángulo.

Propiedad de la bisectriz externa. - En todo triángulo la bisectriz de un ángulo exterior divide al lado opuesto en dos segmentos directamente proporcionales a los lados que forman dicho ángulo.

Teorema de Stewart. - El cuadrado de la longitud del segmento que une al vértice de un triángulo con un punto interior cualquiera del lado opuesto, multiplicado por dicho lado es igual a la suma de los productos de las longitudes de los segmentos determinados multiplicado por el cuadrado de la longitud de los lados consecutivos, menos el producto de dichos segmentos por el lado en el que están contenidos.

Teorema de Menelao. - Si una transversal corta a los lados de un triángulo, determina seis segmentos, cumpliéndose que el producto de tres segmentos no consecutivos es igual al producto de los otros tres.

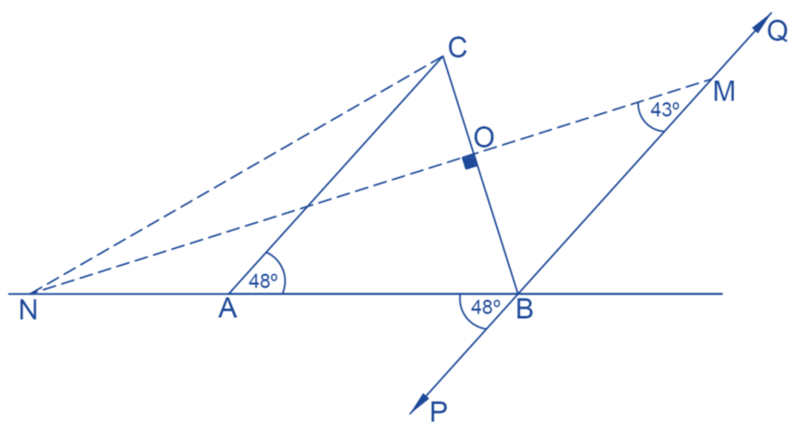
Teorema de Ceva. - Si en un triángulo se trazan rectas que unen los vértices con un mismo punto (tres ceviana); estas determinan en los lados del triángulo seis segmentos cumpliéndose que el producto de tres segmentos no consecutivos es igual al producto de los otros tres.

4.2 Ejercicios resueltos de triángulos

Ejercicio 4.1.

Dado el triángulo de la figura 4.1, hallar la medida del $\angle ACN$, sabiendo que el ángulo $\angle BAC = 48°$, el ángulo $\angle BMN = 43°$, el segmento MN es mediatriz del segmento BC y que la recta PQ es paralela al segmento AC.

Figura 4.1



$H)\quad 1m\angle BAC = 48°$

$1m\angle BMN = 43°$

$MN = Mediatriz\ BC$

$PQ\ II\ AC$

$T)\quad 1m\angle ACN = ?$

Solución:

$a)\quad 1m\angle BAC = 1m\angle ABP = 48^0 \qquad Por\ ángulos\ alternos\ internos$

$\Delta BOM \quad Re\,c\,tángulo$

$b)\quad 1m\angle OBM = 1m\angle 1 = 90^0 - 1m\angle 3 \qquad \Rightarrow \qquad 1m\angle 1 = 47^0$

$1m\angle PBM = Angulo\ llano = 180^0$

$c)\quad 1m\angle PBA + 1m\angle ABC + 1m\angle CBM = 180^0$

$48^0 + 1m\angle 2 + 1m\angle 1 = 180^0$

$\therefore \qquad 48^0 + 1m\angle 2 + 47^0 = 180^0$

$\Rightarrow \qquad 1m\angle 2 = 85^0$

$\Delta ONB \quad Re\,c\,tángulo$

$d)\quad 1m\angle ONB = 1m\angle 3 = 90^0 - 1m\angle 2 \qquad por\ diferencia\ de\ ángulos$

$1m\angle 3 = 90^0 - 85° \qquad : \qquad 1m\angle 3 = 5^0$

$e)\quad PQ\ II\ AC \qquad por\ hipótesis$

$f)\quad 1m\angle ACB = 1m\angle CBM \Rightarrow\ 1m\angle 4 = 1m\angle 1$

$= 47^0 \qquad por\ alternos\ \ internos$

ΔNCO

$g)\quad CO = OB \quad Por\ hipótesis$

ΔNOB

$1m\angle AOC \cong 1m\angle NOB = 90^0$

$ON = ON \qquad por\ lado\ común$

$\Delta NCO \cong \Delta NOB \qquad por,\ lado - ángulo - lado$

$1m\angle NCO \cong 1m\angle NBO \qquad \Rightarrow \qquad 1m\angle 2 = 85^0$

ΔNCA

$1m\angle NCO - 1m\angle ACO = 1m\angle ACN$

$\therefore \qquad 1m\angle 2 - 1m\angle 4 = 1m\angle ACN$

$85^0 - 47^0 = 1m\angle ACN \qquad \Rightarrow \qquad * \quad \boldsymbol{1m\angle ACN}$

$= \mathbf{38}\,° \quad \boldsymbol{LQQD}.$

Ejercicio 4.2.

Dado el triángulo de la figura 4.2, hallar la medida del $\angle X$, sabiendo que el ángulo $\angle ABC = 100\,°$, el segmento AL=LP y el segmento PM=MC.

Figura 4.2

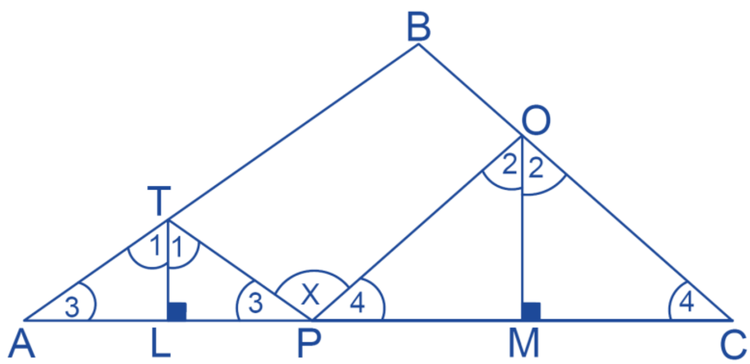


Figura 4.2

$H)\quad 1m\angle ABC = 100^0$

$AL = LP$

$PM = MC$

$T)\quad 1m\angle x = ?$

Solución:

$a)\quad \Delta\ ATP$

$AL = LP \qquad por\ hipótesis$

$TL = altura$

$\Delta TPL\ isósceles$

$AT = TP$

$b)\quad 1m\angle TPA = 1m\angle TAP = 1m\angle 3$

$1m\angle ATL = 1m\angle LTP = 1m\angle 1$

$\Delta PCN \quad Isósceles$

$\overline{PM} = \overline{MC} \qquad por\ hipótesis$

$\overline{MN} = altura$

$1m\angle NPM = 1m\angle NCP = 1m\angle 4$

$1m\angle PNM = 1m\angle MNC = 1m\angle 2$

$1m\angle LPM = 180° \qquad Ángulo\ llano$

$c)\ 1m\angle 3 + 1m\angle x + 1m\angle 4 = 180^0$

ΔABC

$d)\ \ 1m\angle 3 + 100^0 + 1m\angle 4 = 180^0 \qquad Por\ suma\ de\ ángulos$

$(c) = (d)$

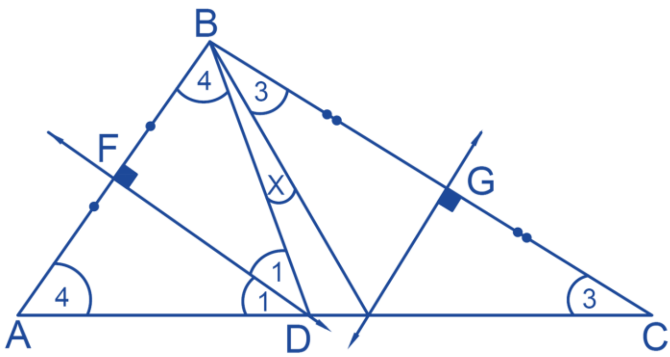
$1m\angle 3 + 1m\angle x + 1m\angle 4 = 1m\angle 3 + 1m\angle 4 + 100^0$

$* \quad \boldsymbol{1m\angle x = 100°} \quad \boldsymbol{LQQD}.$

Ejercicio 4.3.

Para el triángulo de la figura 4.3, hallar la medida del $\angle X$, sabiendo que el ángulo $\angle ABC = 122°$.

Figura 4.3



$H)$ $1m\angle ABC = 122^0$

$T)$ $1m\angle x = ?$

Solución:

ΔABC

$a)$ $1m\angle 4 + 122^0 + 1m\angle 3$

$= 2\angle\ Re\,c\,tos$ $\qquad teorema\ básico\ o\ fundamental\ del\ triángulo$

$1m\angle 4 + 1m\angle\hat{3} = 58^0$

$b)$ $1m\angle ABC = 1m\angle 4 + 1m\angle x + 1m\angle 3 = 122^0$

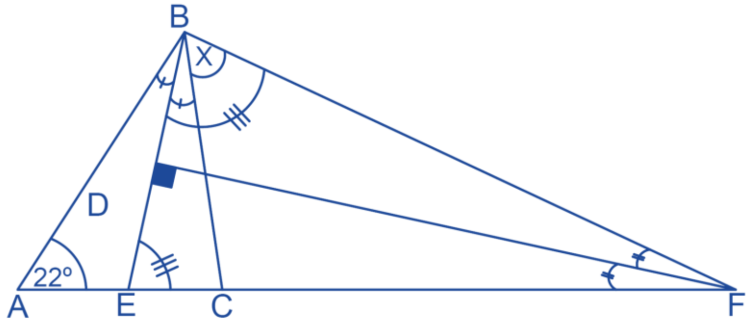
$(a)\ en\ (b)$

$58^0 + 1m\angle x = 122^0$ $\qquad *$ $\boldsymbol{1m\angle x = 64^0}$ $\boldsymbol{LQQD}.$

Ejercicio 4.4.

Con relación al triángulo de la figura 4.4 Hallar la medida del $\angle X$ sabiendo que el ángulo $\angle ABC = 100°$, el segmento AL=LP y PM=MC.

Figura 4.4



$H)\quad BD \cong DE$

$T)\quad 1m\angle x = ?$

Solución:

$a)\quad BE = Bi\sec t\,riz\ \angle ABC \quad por\ hipótesis$

$b)\quad BD = DE \quad Por\ Hipot$

ΔBEF

$c)\quad DF = Altura \quad (lado\ común)$

$d)\quad 1m\angle DFE = 1m\angle DFB = 1m\angle 2$

$e)\quad DF = \ Bi\sec t\ \angle BFE$

$f)\quad 1m\angle DBF = 1m\angle DEF = 1m\angle 3$

$g).\quad 1m\angle 3 = 1m\angle 1 + 1m\angle x$

ΔBDF

$h.) \quad 1m\angle 1 + 1m\angle x + 1m\angle 2 = 90^0 \qquad por\ T.F\ \Delta$

ΔABF

$22^0 + 2m\angle 1 + 1m\angle x + 2m\angle 2 = 180^0 \quad por\ T.F.\Delta$

$i.) \quad 2m\angle 1 + 2m\angle 2 + 1m\angle x = 158^0$

$(i) - (b)$

$d) \quad 1m\angle 1 + 1m\angle 2 = 68^0$

$(d) \quad en \quad (h)$

$1m\angle 1 + 1m\angle x + 1m\angle 2 = 90^0 \quad : \qquad 68^0 + 1m\angle x$

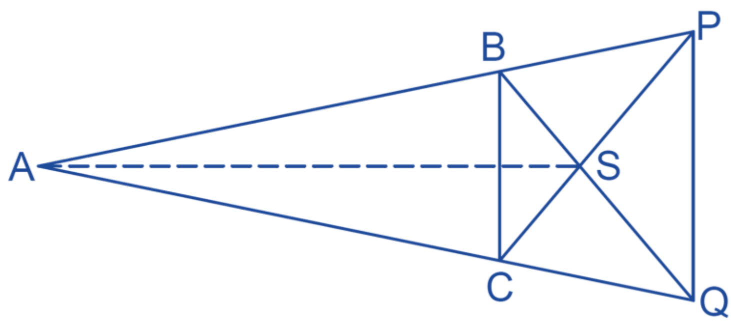
$= 90^0 \qquad \Rightarrow \qquad * \quad \mathbf{1m\angle x}$

$= \mathbf{22^0} \quad \boldsymbol{LQQD}.$

Ejercicio 4.5.

Considerando los lados de los triángulos APQ y ABC de la figura 5.5 encontrar la bisectriz del ángulo BAC.

Figura 4.5



$H) \quad \overline{AB} = \overline{AC}$

$\overline{AP} = \overline{AQ}$

$T) \quad \overline{AS} = Bi\sec t\,riz \quad \angle BAC$

Solución:

$a)\quad \overline{AP} = \overline{AQ} \qquad\qquad por\ hipótesis$

$b)\quad \overline{AP} - \overline{AB} = \overline{AQ} - \overline{AC}$

$\overline{BP} = \overline{CQ}$

$c)\quad \overline{BC}\ II\ \overline{PQ}$

$\Delta APC \wedge \Delta AQB$

$\overline{AP} = \overline{AQ} \qquad\qquad (L)$

$1m\angle PAC = 1m\angle BAQ \qquad (A)$

$\overline{AC} = \overline{AB} \qquad\qquad (L)$

$\Delta APC \cong \Delta AQB \qquad por \quad (lado, ángulo, lado)$

$d)\quad 1m\angle APC \cong 1m\angle AQB \cong 1m\angle 3$

$\Delta\ APQ\ Isósceles$

$\overline{AP} = \overline{AQ}$

$e)\quad 1m\angle APQ \cong 1m\angle AQP \qquad \therefore \qquad 1m\angle APC + 1m\angle CPQ$

$= 1m\angle BQA + 1m\angle BQP$

$f)\quad 1m\angle CPQ = 1m\angle BQP \qquad \therefore \qquad 1m\angle 2 = 1m\angle 1$

$\Delta\ BSC$

$1m\angle SBC = 1m\angle SCB \qquad \Rightarrow \qquad \Delta\ BSC \quad Isósceles \qquad \Rightarrow \qquad \overline{BS}$

$= \overline{SC}$

$\Delta ABS \ \wedge\ \Delta ACS$

$BS = SC \qquad (L)$

$AB = AC \qquad (L)$

$AS = AS \qquad (L) \quad por\ lado\ común$

$\Delta\ ABS \cong \Delta ACS \qquad por: \quad (lado, lado, lado)$

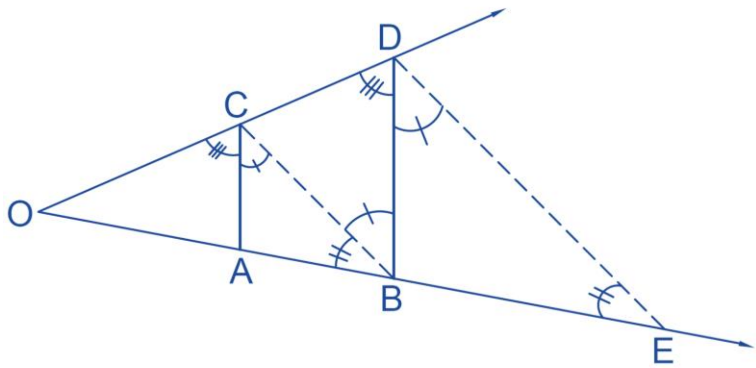
$\Rightarrow \qquad 1m\angle BAS = 1m\angle SAC$

$* \quad \boldsymbol{\overline{AS} \quad Es \quad Bi\,sec\,t\,riz\ del\ \angle BAC \quad LQQD.}$

Ejercicio 4.6.

Dado el triángulo de la figura 4.6, demostrar $\overline{OB}^2 = \overline{OA} \cdot \overline{OE}$, sabiendo que el ángulo $\overline{AC}\ II\ \overline{DB}$ y $\overline{CB}\ II\ \overline{DE}$.

Figura 4.6



$H)\quad \overline{AC}\ II\ \overline{DB}$

$\overline{CB}\ II\ \overline{DE}$

$T)\quad \overline{OB}^2 = \overline{OA} \cdot \overline{OE}$

Solución:

$a)\quad \overline{AC}\ ll \overline{DB} \qquad por\ hipótesis$

$b)\quad \overline{CB}\ ll\ \overline{DE} \qquad por\ hipótesis$

$c)\quad 1m\angle OCA = 1m\angle ODB = 1m\angle 3 \qquad por\ ángulos\ correspondientes$

$d)\quad 1m\angle ACB = 1m\angle CBD$

$= 1m\angle 1 \qquad por\ ángulos\ alternos\ int\,e\,rnos$

$e)\quad 1m\angle OCB = 1m\angle ODE = (1m\angle 3 + 1m\angle 1) \quad por\ suma\ de\ ángulos$

$\Delta OCB \quad \wedge \quad \Delta ODE$

$\overline{OC} = \overline{OA}$ (L)

$1m\angle OCB = 1m\angle ODE$ (A)

$\overline{CB} = \overline{DE}$ (L) $\Rightarrow$ ΔOCB

$\approx \Delta ODE$ $(lado, óngulo, lado)$

$f)$ $\frac{\overline{OB}}{\overline{OE}} = \frac{\overline{OC}}{OD} = \frac{\overline{CB}}{\overline{DE}}$ $proporción\ entre\ lados\ hom\ ó log\ o\ s$

$g)$ $\Delta OCA \wedge \Delta ODB$

$1m\angle OCA = 1m\angle ODB$ $por\ ánguloas\ correspondientes$

$1m\angle COA = 1m\angle DOB$ $por\ ángulo\ común$

$1m\angle COA = 1m\angle DBO$ $por\ ángulos\ correspondientes$

$\Delta OCA \cong \Delta ODB$ $(ángulo, ángulo, ángulo)$

$h)$ $\frac{\overline{OC}}{\overline{OD}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}}$ $por\ proporciones$

$(f) = (h)$

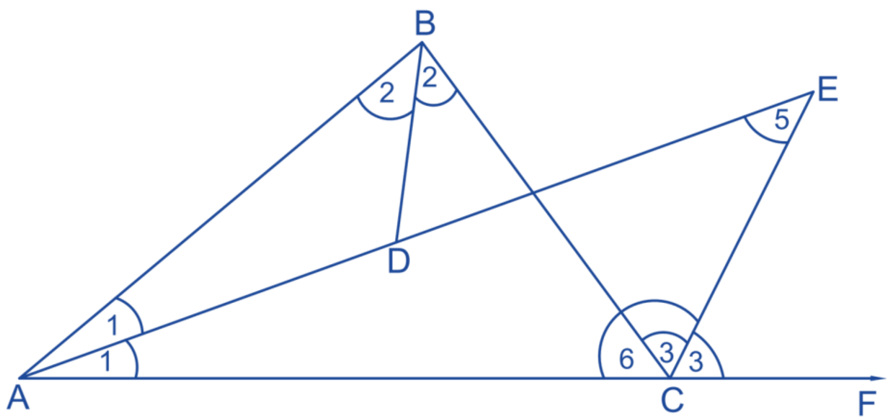
$\frac{\overline{OB}}{\overline{OE}} = \frac{\overline{OC}}{\overline{OD}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}}$ $Considerando:$ $\frac{\overline{OB}}{\overline{OE}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}}$

$*$ $\boldsymbol{\overline{OB}^2 = \overline{OA} \bullet \overline{OE}}$ $\boldsymbol{LQQD}.$

Ejercicio 4.7.

Para el triángulo de la figura 4.7, demostrar la congruencia entre los triángulos ABD y AEC

Figura 4.7



$T)\quad \Delta ABD \simeq \Delta AEC$

Solución:

$a)\quad \overline{BD} = Bi\sec t\,riz \quad \angle ABC \qquad por\ hipótesis$

$b)\quad \overline{AE} = Bi\sec t\,riz \quad \angle BAC$

$c)\quad \overline{EC} = Bi\sec t\,riz \quad \angle BCF$

$\Delta\ AEC$

$d)\quad 1m\angle 3 = 1m\angle 1$

$+ 1m\angle 5 \qquad por\ teorema\ de\ ángulo\ exterior\ al\ \Delta$

$e)\quad 2m\angle 1 + 2m\angle 2$

$= 2m\angle 3 \qquad por\ teorema\ de\ ángulo\ exterior\ al\ \Delta$

$f) \quad 1m\angle 1 + 1m\angle 2 = 1m\angle 3$

$(d) \ = \ (f)$

$1m\angle 1 + 1m\angle 5 = 1m\angle 1 + 1m\angle\hat{2} \qquad \Rightarrow \qquad 1m\angle 5 = 1m\angle 2$

ΔABD

$g) \quad 1m\angle 1 + 1m\angle 2 + 1m\angle 4$

$= 2\angle \ Re\,c\,tos \qquad por\ suma\ de\ ángulos\ internos\ del\ \Delta$

ΔAEC

$h) \quad 1m\angle 1 + 1m\angle 5 + 1m\angle 6$

$= 2\angle \ Re\,c\,tos \qquad por\ suma\ de\ ángulos\ internos\ del\ \Delta$

$(g) = (h)$

$1m\angle 1 + 1m\angle 2 + 1m\angle 4 = 1m\angle 1 + 1m\angle 5 + 1m\angle 6$

$1m\angle 4 = 1m\angle 6$

$\Delta ABD \wedge \Delta\ AEC$

$1m\angle 1 = 1m\angle 1 \qquad\qquad por\ identidad.$

$1m\angle 4 = 1m\angle 6$

$1m\angle 2 = 1m\angle 5$

$Como\ losángulos\ \ int\,e\,rnos\ del\ \Delta ABD\ son\ iguales\ a\ los\ ángulos$

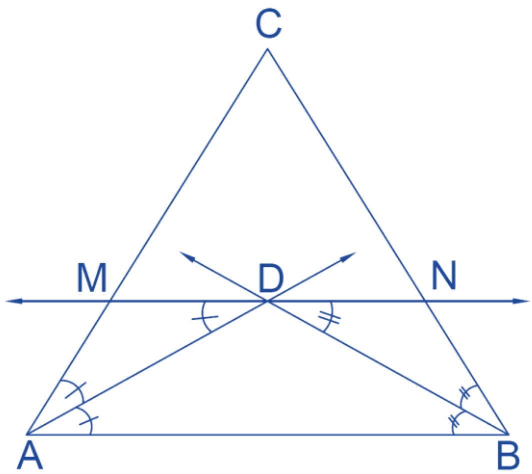
$int\,e\,rnos\ del\ \Delta AEC, \quad entonces,\ los\ dos\ triángulos\ son\ semejantes.$

$* \quad \boldsymbol{\Delta ABD \approx \Delta\ AEC \quad LQQD}. \qquad ángulos\ internos\ del\ \Delta$

Ejercicio 4.8.

Dado el triángulo de la figura 4.8, demostrar $\overline{MN} = \overline{MA} + \overline{NB}$, si $\overline{MN}\ II\ \overline{AB}$

Figura 4.8



$H)\quad \overline{MN}\ II\ \overline{AB}$

$T)\quad \overline{MN} = \overline{MA} + \overline{NB}$

Solución:

$a)\quad \overline{MN}\ ll\ \overline{AB} \qquad por\ hipótesis$

$b)\quad \overline{AD}, BD \quad rectas\ transversales$

$c)\quad \overline{AD} = Bi\sec t riz\ \ int e rna \quad \angle MAB$

$d)\quad \overline{BD} = Bi\sec t riz\ \ int e rna \quad \angle ABN$

$1m\angle DAB = 1m\angle MDA$

$= 1m\angle 1 \qquad por\ ángulos\ alternos\ \ int e rnos$

$1m\angle DBA = 1m\angle NDB$

$= 1m\angle 2 \qquad por\ ángulos\ alternos\ \ int e rnos$

$e)\quad \Delta\ MDA \quad Isósceles$

$f)\quad \overline{AM} = \overline{MD} \qquad por\ teorema\ de\ \Delta\ isósceles$

$\Delta\ DNB \quad Isosceles$

$h)\quad \overline{BN} = \overline{ND} \quad por\ teorema\ de\ \Delta\ isósceles$

$i)\quad \overline{MN} = \overline{MD} + \overline{DN} \qquad por\ suma\ de\ segmentos$

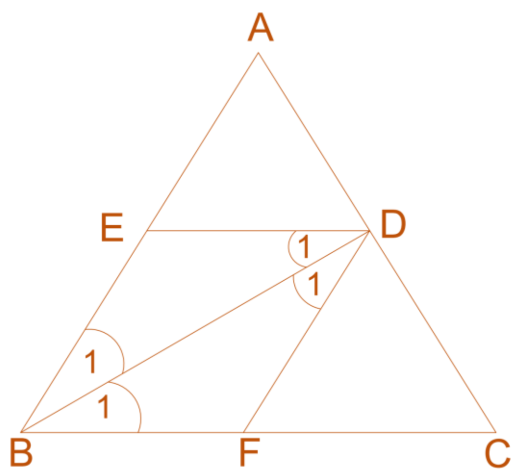
$(f)\ y\ (h)\ en\ (i)$

$* \quad \boldsymbol{\overline{MN} = \overline{MA} + \overline{NB} \quad LQQD}.$

Ejercicio 4.9.

Con relación a la figura 4.9, demostrar $T)\quad \overline{ED} \cong \overline{DF}$, sabiendo que $\overline{ED}\ II\ \overline{BC}$, $\overline{DF}\ II\ \overline{AB}$ y $\overline{BD}$ es bisectriz del $\angle ABC$

Figura 4.9



$H)\quad \overline{ED}\ II\ \overline{BC} \qquad\qquad \overline{DF}\ II\ \overline{AB}$

$\overline{BD} \quad Bi\sec triz\ del\ \angle ABC$

$T)\quad \overline{ED} \cong \overline{DF}$

Solución:

$a)\quad \overline{ED}\ II\ \overline{BC} \qquad por\ hipótesis$

$b)\quad \overline{DF}\ II\ \overline{AB} \qquad por\ hipótesis$

$1m\angle DBF \ = \ 1m\angle BDE$

$= 1m\angle 1 \qquad por\ ángulos\ alternos\ \ int\,e\,rnos$

$c)\quad 1m\angle EBD = 1m\angle BDF$

$= 1m\angle 1 \qquad por\ ángulos\ alternos\ \ int\,e\,rnos$

$\Delta BED\ isósceles$

$d)\quad \overline{BE} = \overline{ED} \qquad \Rightarrow \qquad \Delta BED \wedge \Delta BDF$

$\cdots \quad 1m\angle EBD = 1m\angle BDF = 1m\angle 1 \qquad (A)$

$\overline{BD} = \overline{BD} \qquad (L)\quad por\ lado\ común$

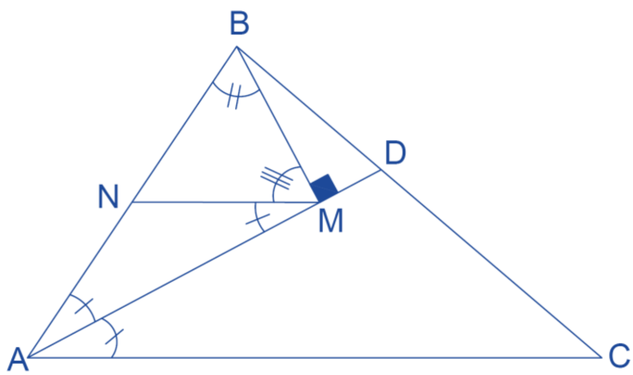
$1m\angle EDB = 1m\angle DBF \qquad (A) \qquad \Rightarrow: \quad \Delta BED$

$\cong \Delta BDF \quad (A.L.A) \qquad \Rightarrow \qquad * \qquad \boldsymbol{\overline{ED} \cong \overline{DF} \quad LQQD}.$

Ejercicio 4.10.

Dada la figura 4.10, demuestre $\overline{AN} \cong \overline{NB}$, si $\overline{MN}$ es paralelo al segmento $\overline{AC}$

Figura 4.10



$H) \quad \overline{MN}\ II\ \overline{AC}$

$T) \quad \overline{AN} \cong \overline{NB}$

Solución:

$a) \quad \overline{NM}\ ll\ \overline{AC} \qquad por\ hipótesis$

$b) \quad 1m\angle MAC = 1m\angle AMN$

$= 1m\angle 1 \qquad por\ ángulos\ alternos\ int\,e\,rnos$

$c) \quad \Delta ANM\ Isósceles$

$d) \quad \overline{AN} = \overline{NM} \qquad por\ teorema\ de\ \Delta\ isósceles \quad c\,*$

$\Delta AMB \quad Re\,c\,tángulo$

$e) \quad 1m\angle 1 + 1m\angle 2 = 1\angle\,Re\,c\,to$

$= 90^0 \qquad por\ ángulos\ complementarios$

$1m\angle AMD = Angulo\ llano = 1m\angle 1 + 1m\angle 3 + 1\angle\,Re\,c\,to$

$= 2\angle\,Re\,c\,tos = 180^0$

$f) \quad 1m\angle 1 + 1m\angle 3 = 1\angle\,Re\,c\,to$

$= 90^0 \qquad por\ ángulos\ complementarios$

$(e) = (f)$

$1m\angle 1 + 1m\angle 2 = 1m\angle 1 + 1m\angle 3 \qquad \Rightarrow \qquad 1m\angle 2 = 1m\angle 3$

$\Delta NMB \quad Isósceles$

$g) \quad \overline{NB} = \overline{NM}$

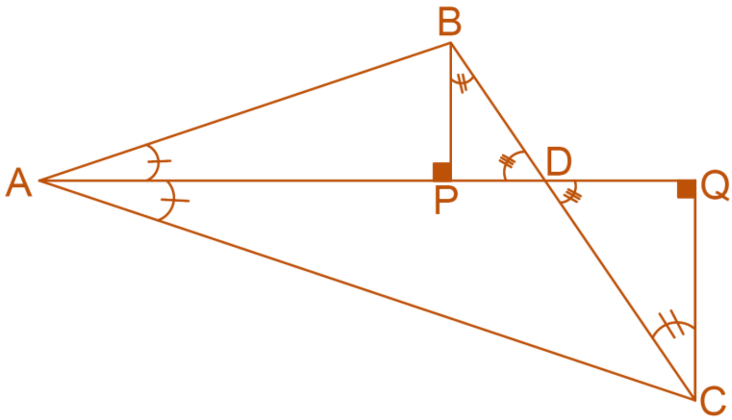
$(d) = (g)$

$* \quad \boldsymbol{\overline{AN} = \overline{NB} \quad LQQD}.$

Ejercicio 4.11.

Con los datos que se indican en la figura 4.11, demostrar $P \wedge Q$ $dividen\ arm\acute{o}nicamente\ \ \overline{AD}$

Figura 4.11



$T)\quad P \wedge Q\quad Dividen\ arm\acute{o}nicamente\quad \overline{AD}$

Solución:

$a)\quad \dfrac{\overline{AP}}{\overline{PD}} = \dfrac{\overline{AQ}}{\overline{DQ}}\qquad por\ definici\acute{o}n\ de\ divisi\acute{o}n\ arm\acute{o}nica$

$b)\quad \overline{BP}\ II\ \overline{QC}\qquad por\ hip\acute{o}tesis\ gr\acute{a}fica$

$c)\quad \overline{BP}\ \perp\ \overline{AQ}\qquad por\ hip\acute{o}tesis\ gr\acute{a}fica$

$d)\quad \overline{QC}\ \perp \overline{AQ}\qquad por\ hip\acute{o}tesis\ gr\acute{a}fica$

$\Delta PBD \wedge \Delta DQC$

$e)\quad 1m\angle BPD = 1m\angle DQC = 1\angle Recto$

$= 90°$ $\quad$ *por hipótesis gráfica*

$f)\quad 1m\angle PDB = 1m\angle QCD$ $\quad$ *por opuestos por el vertice*

$g)\quad 1m\angle PBD = 1m\angle DCQ$ $\quad$ *por ángulos alternos internos*

$\Delta PBD \approx \Delta DQC$ $\quad$ *rectángulos*

$h)\quad \dfrac{\overline{BP}}{\overline{QC}} = \dfrac{\overline{PD}}{\overline{DQ}} = \dfrac{\overline{DB}}{\overline{DC}}$ $\quad$ *proporciónes entre lados homólogos*

$\Delta ABP \wedge \Delta AQC$ $\quad$ *rectángulos*

$i)\quad 1m\angle BAP = 1m\angle QAC = 1m\angle 1$

$1m\angle APB = 1m\angle AQC = 90°$

$1m\angle ABP = 1m\angle QCA$

$\Delta ABP \approx \Delta AQC$

$j)\quad \dfrac{\overline{AB}}{AC} = \dfrac{\overline{BP}}{\overline{QC}} = \dfrac{\overline{AP}}{\overline{AQ}}$

$(h) = (j)$

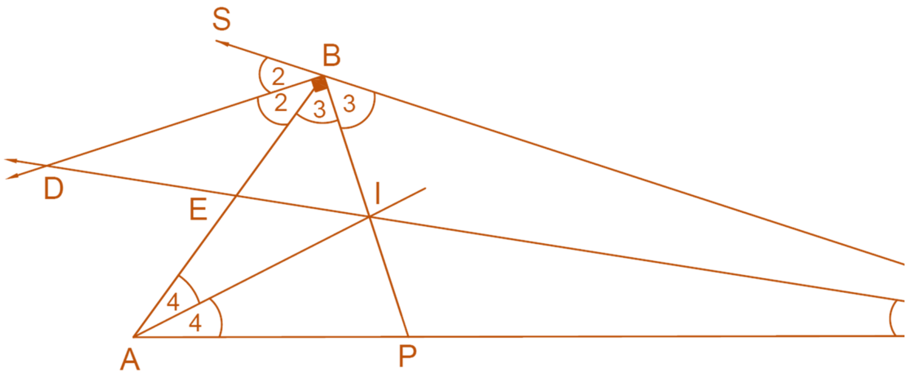
$$\frac{\overline{BP}}{QC} = \frac{\overline{PD}}{\overline{DQ}} = \frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{AQ}} = \frac{\overline{AQ}}{\overline{DQ}}$$

$*\quad \boldsymbol{\dfrac{\overline{AP}}{\overline{PD}} = \dfrac{\overline{AQ}}{\overline{DQ}}}$ $\quad$ ***LQQD.***

Ejercicio 4.12.

Con relación a la figura 4.12, demuestre $\overline{CD} \cdot \overline{AI} = \overline{AC} \cdot \overline{DB}$

Figura 4.12



T) $\overline{\text{CD}} \cdot \overline{\text{AI}} = \overline{\text{AC}} \cdot \overline{\text{DB}}$

Solución:

a) $\overline{\text{AI}}$ bisectriz $\angle\text{BAC}$ por construcción auxiliar

b) $1\text{m } \angle\text{SBC} = 1\text{Ang. Llano} = 2\angle \text{Rectos} = 180^0$

c) $2\text{m}\angle 2 + 1\text{m}\angle\text{ABI} + 1\text{m}\angle\text{IBC} = 180°$

$$\Rightarrow \quad \frac{2\text{m}\angle 2 + 1\text{m } \angle\text{ABI} + 1\text{m } \angle\text{IBC}}{2} = 90°$$

d) $\dfrac{2\text{m}\angle 2 + 1\text{m}\angle 4 + 1\text{m}\angle 3}{2} = 90°$

$1m\angle ABI = 1m\angle 4 \quad : \quad 1m\angle BAI$

$= 1m\angle 6 \quad : \quad 1m\angle IBC$

$= 1m\angle 3 \quad : \quad 1m\angle IAC = 1m\angle 5$

e) $1m\angle 2 + 1m\angle 4 = 1\angle \text{Recto} = 90°$

(d) = (e)

$$\frac{2m\angle 2 + 1m\angle 4 + 1m\angle 3}{2} = 1m\angle 2 + 1m\angle 4$$

$\therefore \quad 2m\angle 2 + 1m\angle 4 + 1m\angle 3$

$= 2m\angle 2 + 2m\angle 4 \quad \Rightarrow \quad 1m\angle 3 = 1m\angle 4$

$\overline{BP}$ bisectriz $\angle ABC$ por hipótesis

$\overline{EC}$ bisectriz $\angle ACB$ por hipótesis

I = incentro por definición

$1m5 = 1m6$ por propiedad del incentro

f) $1m\angle BDC = \dfrac{1m\angle BAC}{2} = \dfrac{1m\angle 6 + 1m\angle 5}{2}$

$\Rightarrow$ por propiedad de las bisectrices

$$1m\angle BDC = \frac{2m\angle 6}{2} = \frac{2m\angle 5}{2} = 1m\angle 5 \qquad 1m\angle BDC$$

$= 1m\angle AEI$ opuestos por el vértice

$\Delta ABC \approx \Delta AEI$

g) $\dfrac{\overline{\overline{DE}}}{\overline{\overline{AE}}} = \dfrac{\overline{EB}}{\overline{\overline{EI}}} = \dfrac{\overline{DB}}{\overline{\overline{AI}}}$

ΔABC

h) $\dfrac{\overline{BC}}{\overline{\overline{AC}}} = \dfrac{\overline{BE}}{\overline{\overline{AE}}}$ teorema de la bisectriz interna

ΔBEC

$\overline{DB}$ bisectriz externa del $\angle SBE$

i) $\dfrac{\overline{BE}}{\overline{BC}} = \dfrac{\overline{DE}}{\overline{DC}}$ teorema de la bisectriz externa

(h) = (i)

j) $\dfrac{\overline{AE}}{\overline{AC}} = \dfrac{\overline{DE}}{\overline{DC}}$; $\dfrac{\overline{DE}}{\overline{AE}} = \dfrac{\overline{DC}}{\overline{AC}}$ (k)

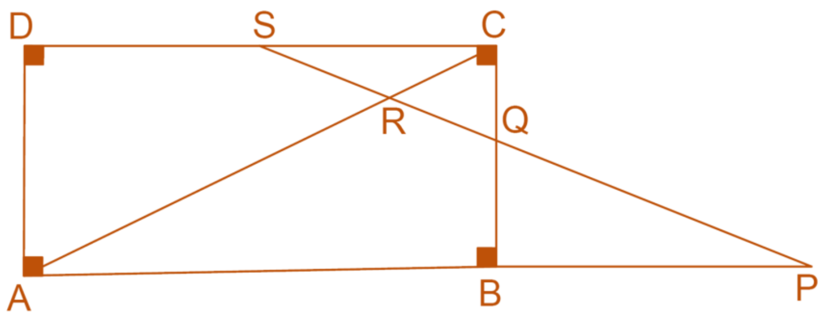
(g) = (k)

$\dfrac{\overline{DB}}{\overline{AI}} = \dfrac{\overline{DC}}{\overline{AC}}$ $*$ $\mathbf{\overline{DC} \bullet \overline{AI} = \overline{AC} \bullet \overline{DB}}$ **LQQD**

Ejercicio 4.13.

Considere la figura 4.13, determine $\overline{AB}$ =?, sabiendo que $\overline{AD} = 7\ unidades$, $\overline{BP} = 10\ unidades$, $\overline{BQ} = 4\ unidades$, y $\frac{\overline{CR}}{\overline{RA}} = \frac{2}{5}$.

Figura 4.13



H) $\overline{AD} = 7$ unidades

$\overline{BP} = 10$ unidades

$\overline{BQ} = 4$ unidades

$$\frac{\overline{CR}}{\overline{RA}} = \frac{2}{5}$$

T) $\overline{AB} = ?$

Solución:

$\Delta SCQ \wedge \Delta PBQ$ rectángulos

a) $1m\ \angle CQS = 1m\ \angle PQB$ opuestos por el vértice

b) $1m\angle\ SCQ = 1m\ \angle PBQ = 1\angle\ \text{Recto} = 90^0$ por hipótesis gráfica

c) $1m\angle\ CSQ = 1m\ \angle QPB$

$\Delta SCQ \simeq \Delta PBQ$ por (a), (b), (c)

d) $\frac{\overline{SC}}{\overline{BP}} = \frac{\overline{CQ}}{\overline{BQ}} = \frac{\overline{SQ}}{\overline{PQ}}$ Proporción entre lados homólogos

$$\frac{\overline{SC}}{10 \text{ unid.}} = \frac{\overline{CQ}}{4 \text{ unid.}} \quad \Rightarrow \quad \overline{SC} = \frac{10 \text{ unid.}}{4 \text{ unid.}} \bullet \overline{CQ}$$

e) $\overline{SC} = \frac{5}{2}\left(\overline{AD} - \overline{BQ}\right) = \frac{5}{2}(7-4) \quad \Rightarrow \quad \overline{SC} = 7.5 \text{ unid.}$

$\Delta\ SCR\ \wedge\ \Delta\ PAR$

f) $1m\ \angle SRC = 1m\angle\ ARP$ opuestos por el vértice

g) $1m\angle\ SCR = 1m\ \angle RAP$ ángulos alternos internos

h) $1m\angle\ CSR = 1m\ \angle RPA$

$\Delta\ SCR \approx \Delta\ PAR$ por (f), (g), (h)

i) $\frac{\overline{SC}}{\overline{PA}} = \frac{\overline{SR}}{\overline{PR}} = \frac{\overline{CR}}{\overline{AR}}$ proporción de lados homólogos

$\frac{\overline{CR}}{\overline{AR}} = \frac{2}{5}$ por hipótesis

$$\frac{\overline{SC}}{\overline{PA}} = \frac{2}{5} \qquad \Rightarrow \qquad \overline{PA} = \frac{7.5 \text{ unid}(5)}{2} \qquad \Rightarrow \qquad \overline{PA}$$

$$= 18.75 \text{ unidades}$$

j) $\overline{PA} = \overline{AB} + \overline{BP}$ por suma de segmentos

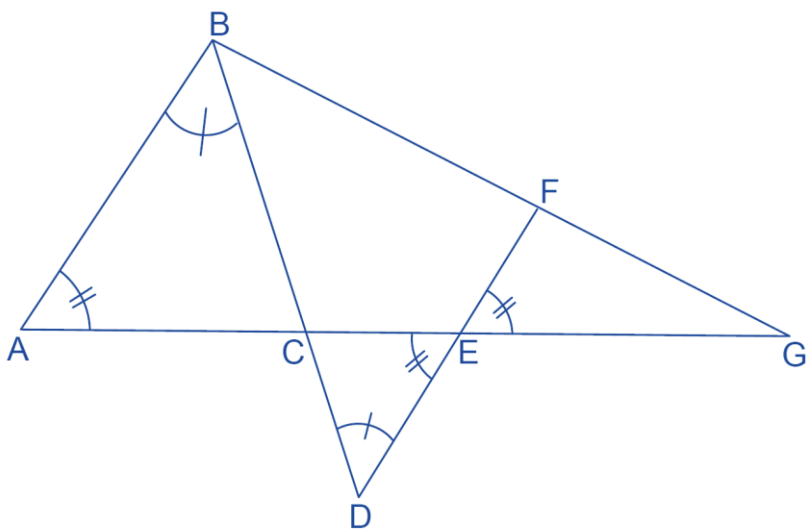
$\overline{AB} = (18.75 - 10)$ unidades $\Rightarrow \quad * \quad \overline{\mathbf{AB}}$

$= \mathbf{8.75 unidades}$ **LQQD**.

Ejercicio 4.14.

Con los datos que se presentan en la figura 4.14. Demostrar C y G dividen armónicamente a AE. Si $\Delta ABC\ escaleno$, $\overline{DF}\ II\ AB$ y $DE\ II\ EF$

Figura 4.14



$H)\quad \Delta ABC\ escaleno$

$\overline{DF}\ II\ AB$

$DE\ II\ EF$

$T)\quad C\ y\ G\ dividen\ arm\acute{o}nicamente\ a\ AE$

Solución:

$\Delta\ ABG$

$a)\quad DF\ ll\ AB \qquad por\ hipótesis$

$b)\quad 1m\angle ARC = 1m\angle BDE \qquad por\ ángulos\ int\,e\,rnos\ alternos$

$c)\quad 1m\angle BAC = 1m\angle AED \qquad "\quad "\quad "\quad "$

$d)\quad 1m\angle ACB = 1m\angle ECD$

$\Delta\ ABC \approx \Delta\ CED \quad por\ (b),(c),(d)$

$e)\quad \frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CE}} \qquad proporcionalidad\ entre\ lados\ hom\,ó\,log\,o\,s$

$f)\quad \overline{DE}\ II\ \overline{EF} \qquad por\quad hipótesis$

$\Delta\ ABG\ \wedge\ \Delta EFG$

$g)\quad 1m\angle BAG = 1m\angle FEG \qquad por\ opuestos\ por\ el\ vértice$

$h)\quad 1m\angle AGB = 1m\angle FGE \qquad por\ ángulo\ común$

$i)\quad 1m\angle ABG = 1m\angle AFG \qquad por\ ángulos\ correspondientes$

$\Delta\ ABG \simeq \Delta\ EFG \qquad por\ (h),(i),(j)$

$j)\quad \frac{\overline{AB}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{BG}}{\overline{FG}}$

$= \frac{\overline{AG}}{\overline{CE}} \qquad proporción\ de\ lados\ hom\,ó\,log\,o\,s$

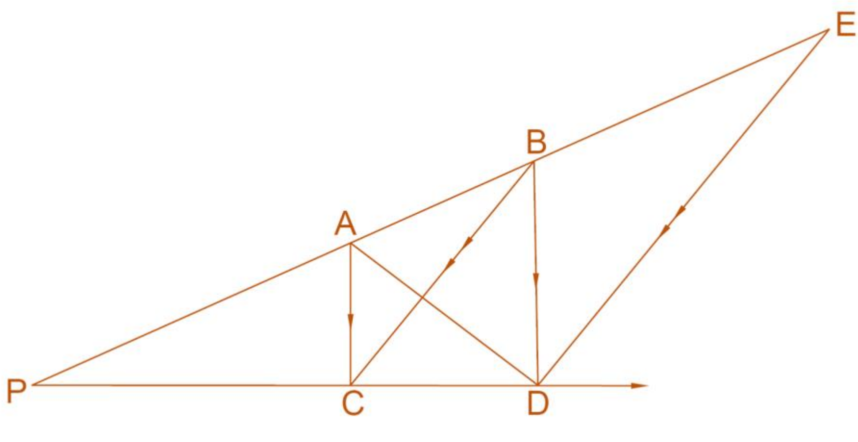
$(e) = (j) \qquad \Rightarrow \qquad * \quad \frac{\overline{AC}}{\overline{CE}}$

$= \frac{\overline{AG}}{\overline{EG}} \qquad LQQD.$

Ejercicio 4.15.

Dada la figura 4.15. Demostrar $\overline{PB}^2 = \overline{PA} \bullet \overline{PE}$

Figura 4.15



$T)\quad \overline{PB}^2 = \overline{PA} \bullet \overline{PE}$

Solución:

$a)\quad \overline{AC}\ ll\ \overline{BD}\qquad por\ hipótesis\ gráfica$

$b)\quad BC\ II\ ED$

$\Delta PAC \quad \wedge \quad \Delta PED$

$c)\quad 1m\ \angle PBC \ = \ 1m\angle PED \quad por \quad ángulos\ correspondientes$

$d)\quad 1m\angle BPC = 1m\angle EPD \qquad por\ ángulo\ común$

$e) \quad 1m\angle PCB$

$= \quad 1m\angle PDE \quad$ *por ángulos correspondientes*

$\Rightarrow \quad \Delta PBC \approx \Delta PED \quad$ *por* $(c),(d),(e)$

$$f) \quad \frac{\overline{PB}}{\overline{PE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{ED}} = \frac{\overline{PC}}{\overline{PD}} \qquad \textit{proporción entre lados homólogos}$$

$\Delta PAC \wedge \Delta PBD$

$h) \quad 1m\angle APC = 1m\angle BPD \quad$ *por ángulo común*

$i) \quad 1m\angle PAC = 1m\angle PBD \quad$ *por ángulos correspondientes*

$j) \quad 1m\angle PCA = 1m\angle PDB \quad$ *por ángulos correspondientes*

$\Delta PAC \approx \Delta PBD \quad$ *por* $(h),(i),(j)$

$$k) \quad \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{AC}}{BD} = \frac{\overline{PC}}{\overline{PA}} \qquad \textit{por lados homólogos}$$

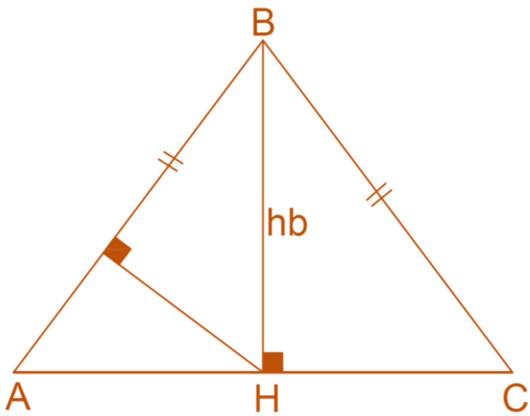
$$(f) = (k) \quad \therefore \quad \frac{\overline{PB}}{\overline{PE}} = \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} \quad \Rightarrow \quad * \quad \boldsymbol{\overline{PB}^2}$$

$$= \boldsymbol{\overline{PA} \bullet \overline{PE}} \qquad \boldsymbol{LQQD}.$$

Ejercicio 4.16.

Considere la figura 4.16, determine $\overline{HD}$, sabiendo que $\overline{AB} = \overline{BC}, \overline{AC} = 30\ unidades$ y $HB = 20\ unidades$.

Figura 4.16



H) $\overline{AB} = \overline{BC}$

$\overline{AC} = 30$ unidades

$HB = 20$ unidades

T) $\overline{HD} = ?$

Solución:

ΔABC

a) $\overline{AB} = \overline{BC}$ por hipótesis

b) $\overline{AH} = \overline{HC}$ por hipótesis

ΔABH rectángulo

c) $\overline{AB}^2 = \overline{AH}^2 + \overline{BH}^2$ por Pitágoras $\Rightarrow$ $\overline{AB}^2$

$$= \left(\frac{AC}{2}\right)^2 + (hb)^2$$

$\overline{AB}^2 = (225 + 400)$ unidades $= 625$ unidades $\Rightarrow$ $\overline{AB}$

$= 25$ unidades

$\Delta ABH \wedge \Delta ADH$ rectángulos

d) $1m\angle ABH$

$= 1m\angle DHA$ por ángulos de lados perpendiculares

e) $1m\angle AHB = 1m\angle ADH$ por ángulos rectos

f) $1m\angle BAH = 1m\angle DAH$ por ángulo común

$\Delta\ ABH \approx \Delta ADH$ por (d), (e) y (f)

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AH}} = \frac{\overline{BH}}{\overline{DH}} = \frac{\overline{AH}}{\overline{AD}}$$ por lados homólogos

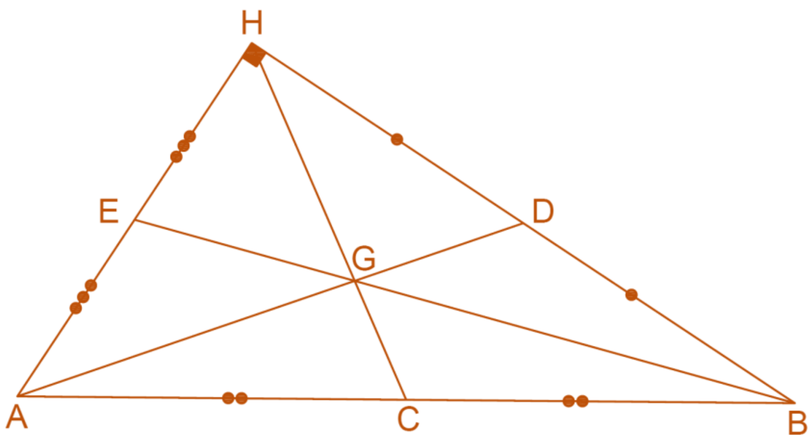
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AH}} = \frac{\overline{BH}}{\overline{DH}} \Rightarrow \overline{DH} = \frac{\overline{AH} \bullet \overline{BH}}{\overline{AB}} = \frac{(15)(20)}{(25)}$$

$*$ $\mathbf{\overline{DH} = 12}$ **unidades LQQD.**

Ejercicio 4.17.

Dada la figura 4.17 determine $\overline{AB}$, conociendo que la distancia del ortocentro al baricentro en un triángulo rectángulo mide $\frac{23}{3}$ m. Calcular el valor de la hipotenusa.

Figura 4.17



$H)\quad H = \ ortocentro$ $\qquad\qquad G \ = baricentro$

$$\overline{HG} = \frac{25}{3}$$

$T)\quad \overline{AB} = ?$

Solución:

$a)\quad c = \ Punto\ Medio\ \overline{AB} \qquad (hipotenusa\ del\ \Delta ABC)$

$b)\quad \overline{AC} = \overline{CB}$

$= \overline{HC} \qquad propiedad\ de\ la\ mediana\ en\ los\ triángulos\ rectángulos$

$c)\quad \overline{HG} = \frac{2}{3}\overline{HC}$

$d)\quad \overline{HC} = \frac{3}{2}\overline{HG} \qquad \Rightarrow \qquad \overline{HC} = \frac{3}{2} \bullet \frac{25}{3}$

$\overline{HC} = 12.5\ unidades$

$\overline{AB} = 2\overline{H \rightleftarrows C}$

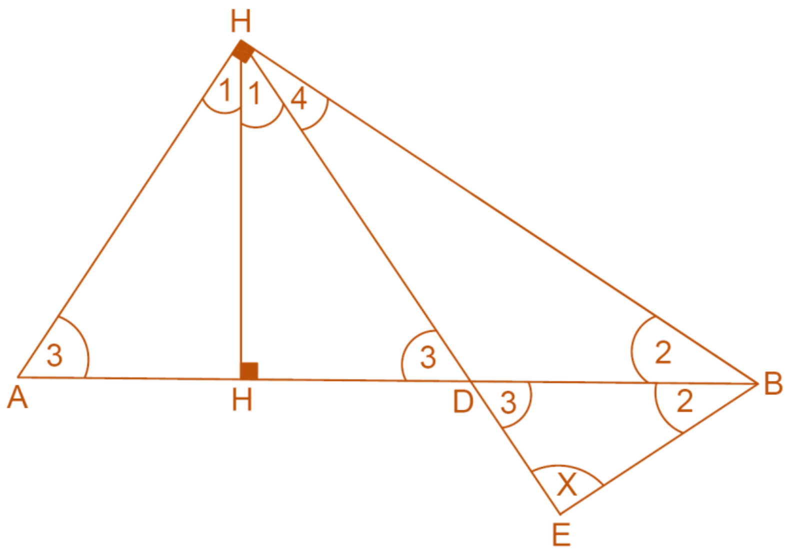
$\overline{AB} = (2)(12.5\ unidades) \qquad \Rightarrow \qquad * \quad \boldsymbol{\overline{AB}}$

$= \boldsymbol{25\ unidades \quad LQQD}$

Ejercicio 4.18.

Considerando los datos de la figura 4.18 encuentre la medida del ángulo **X**

Figura 4.18



$H)\quad \overline{BH} \cong \overline{HD} \qquad\qquad T)\quad 1m\angle DEC = ?$

$1m\angle ACD \cong 1m\angle ECD$

Solución:

$a)\quad \overline{BH} = \overline{HD}\quad por\ hipótesis$

$b)\quad AH = altura\ del\ \Delta BAD\qquad \therefore\qquad \Delta ABD\quad es\quad isósceles$

$c)\quad \overline{AB} = \overline{AD}$

$d)\quad 1m\angle ABH = 1m\angle HDA = 1m\angle 3\qquad por\ teorema\ de\ \Delta\ isósceles$

$e)\quad 1m\angle BAH = 1m\angle HAD$

$= 1m\angle 1\qquad propiedad\ de\ los\ seg.\ notables\ en\ los\ triángulos$

$f)\quad 1m\angle ECA = 2m\angle 2\qquad por\ hipótesis$

$g)\quad \Delta ABC\quad \therefore\quad 2m\angle 1 + 1m\angle 4 = 1\angle\ Recto$

$= 90°\qquad por\ el\ teorema\ básico\ del\ \Delta\quad (TB\Delta)$

$h)\quad \Delta ADC\quad \therefore\quad 1m\angle 3$

$= 1m\angle 2$

$+ 1m\angle 4\qquad por\ el\ teorema\ de\ ángulo\ exterior\ a\ un\ \Delta$

$i)\quad \Delta ADH\quad \therefore\quad 1m\angle 1 + 1m\angle 3 = 1\angle\ Recto = 90°\quad (TB\Delta)$

$(h)\ en\ (i)$

$j)\quad 1m\angle 2 + 1m\angle 4 + 1m\angle 1 = 90°$

$\therefore\qquad 1m\angle 2 + 1m\angle 4 + 1m\angle 1$

$= 2m\angle 1 + 1m\angle 4\qquad \Rightarrow\qquad 1m\angle 2 = 1m\angle 1$

$k)\quad \Delta DEC\quad \therefore\quad 1m\angle 2 + 1m\angle 3 + 1m\angle DEC$

$= 2\angle\ Rectos\qquad (TB\Delta)\quad ó\quad (TF\Delta)$

$l)\quad 1m\angle 3 = 90° - 1m\angle 1$

$(l)\ en\ (k)$

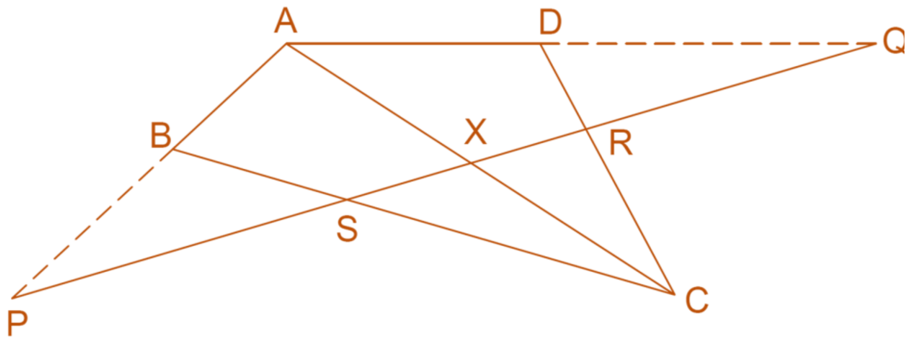
$1m\angle 2 + 90° - 1m\angle 1 + 1m\angle DEC = 180°$

$\Rightarrow\qquad *\quad \mathbf{1m\angle DEC = 90°}\quad \boldsymbol{LQQD}.$

Ejercicio 4.19.

Dada la figura 4.19 demuestre $\frac{\overline{BP}\bullet\overline{AQ}\bullet\overline{DR}\bullet\overline{CS}}{\overline{AP}\bullet\overline{QD}\bullet\overline{RC}\bullet\overline{SB}} = 1$, conociendo que ABCD es un cuadrilátero y $\overline{PQ}$ es secante.

Figura 4.19



$H)\quad ABCD \quad cuadrilátero$

$\quad\quad \overline{PQ} \quad secante$

$$T)\quad \frac{\overline{BP}\bullet\overline{AQ}\bullet\overline{DR}\bullet\overline{CS}}{\overline{AP}\bullet\overline{QD}\bullet\overline{RC}\bullet\overline{SB}} = 1$$

Solución:

ΔABC

$a)\quad \overline{BP} \quad recta\ auxiliar\ por\ construcción$

$b)\quad \overline{AX}\bullet\overline{SC}\bullet\overline{BP} = \overline{XC}\bullet\overline{BS}\bullet\overline{AP} \quad\quad por\ teorema\ de\ Menelao$

$c)\quad \frac{AX}{XC} = \frac{BS\bullet AP}{SC\bullet BP}$

$\Delta\ ADC$

$d)\quad \overline{DQ} \quad recta\ auxiliar\ por\ construcción$

$e) \quad \overline{AX} \bullet \overline{CR} \bullet \overline{DQ} = \overline{XC} \bullet \overline{DR} \bullet \overline{AQ} \qquad por\ teorema\ de\ Menelao$

$$f) \quad \frac{AX}{XC} = \frac{DR \bullet AQ}{CR \bullet DQ}$$

$(c) \ = (f)$

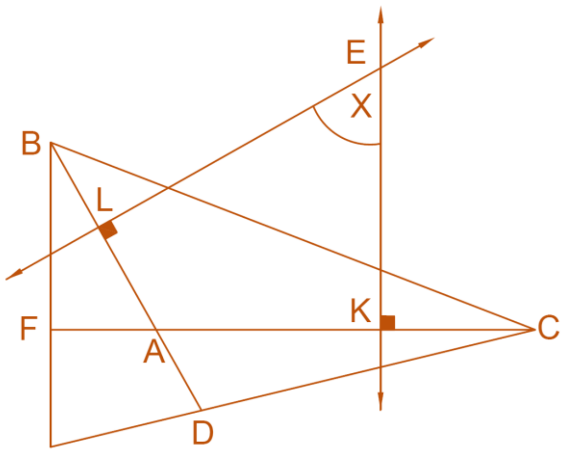
$$\frac{\overline{BS} \bullet \overline{AP}}{\overline{SC} \bullet \overline{BP}} = \frac{\overline{DR} \bullet \overline{AQ}}{\overline{CR} \bullet \overline{QD}} \qquad \Rightarrow \qquad \bullet \quad \frac{\overline{\boldsymbol{DR}} \bullet \overline{\boldsymbol{AQ}} \bullet \overline{\boldsymbol{CS}} \bullet \overline{\boldsymbol{BP}}}{\overline{\boldsymbol{SB}} \bullet \overline{\boldsymbol{AP}} \bullet \overline{\boldsymbol{RC}} \bullet \overline{\boldsymbol{QD}}}$$

$$= \mathbf{1} \qquad \boldsymbol{LQQD}.$$

Ejercicio 4.20.

Para la figura 4.20, demuestre $1m\angle x \equiv 1m\angle FHD$, sabiendo que H es ortocentro del ΔABC.

Figura 4.20



$H) \quad H = ortocentro\ del\ \Delta ABC$

$T) \quad 1m\angle x \equiv 1m\angle FHD$

Solución:

$a)\quad FC \perp BH \quad por\ definición\ de\ altura\ del\ triángulo$

$b)\quad BD \perp HC \quad por\ definición\ de\ altura\ del\ triángulo$

$En\ el\ cuadrilátero\ ALEK$

$c)\quad 1m\angle LAK + 1\angle R + 1m\angle x + 1\angle R$

$= 4\angle R \quad suma\ de\ ángulos\ internos$

$d)\quad 1m\angle LAK = 1m\angle FAD = 1m\angle 1 \quad opuestos\ por\ el\ vértice$

$En\ el\ cuadrilátero\ AFHD$

$e)\quad 1m\angle FAD + 1\angle R + 1m\angle FHD + 1\angle R$

$= 4\angle R \quad suma\ de\ ángulos\ internos$

$(c) = (e)$

$1m\angle LAK + 1\angle R + 1m\angle x + 1\angle R$

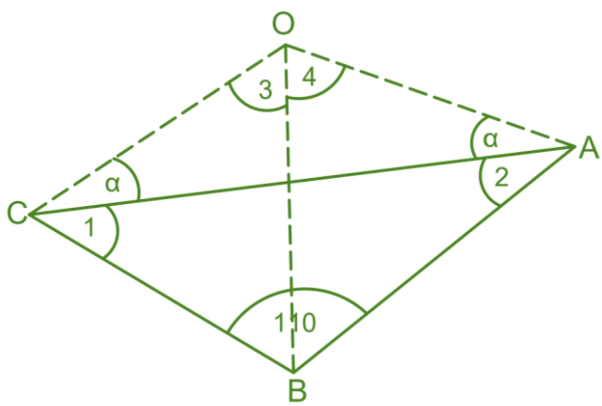
$= 1m\angle FAD + 1\angle R + 1m\angle FHD + 1\angle R$

$* \quad \mathbf{1m\angle x = 1m\angle FHD} \quad \boldsymbol{LQQD}$

Ejercicio 4.21.

El triángulo escaleno ABC, de la figura 4.21 si el ángulo mide ABC mide 110 y "O" es el circuncentro. ¿Cuánto mide el ángulo AOC?

Figura 4.21



Solución:

$a)\quad OA = OB = OC \quad por\ propiedad\ del\ circuncentro$

$b)\quad 1m\angle 3 + 2m\angle 1 + 2m\angle\alpha = 2\angle R \qquad T.F.\Delta COB \quad Isósceles$

$c)\quad 1m\angle 4 + 2m\angle 2 + 2m\angle\alpha = 2\angle R \qquad T.F.\Delta BOA \quad Isósceles$

$d)\quad 1m\angle 3 + 1m\angle 4 + 2m\angle\alpha = 2\angle R \qquad T.F.\Delta AOC$

$e)\quad 1m\angle 1 + 1m\angle 2 + 110° = 2\angle R \qquad \Delta ABC \quad escaleno$

$f)\quad 1m\angle 1 + 1m\angle 2 = 70°$

$(b) + (c)$

$g)\quad 1m\angle 3 + 1m\angle 4 + 2m\angle 1 + 2m\angle 2 + 4m\angle\alpha = 4\angle R$

$(f)\ en\ (g)$

$1m\angle 3 + 1m\angle 4 + 140 + 4m\angle\alpha = 360°$

$h)\quad 1m\angle 3 + 1m\angle 4 + 4m\angle\alpha = 220°$

$(h)\ en\ (d)$

$4m\angle\alpha - 2m\angle\alpha = 220° - 180° \qquad \Rightarrow \qquad 2m\angle\alpha$

$= 40° \qquad (i)$

$j)\quad 1m\angle 3 + 1m\angle 4 = 1mAOC$

$(i)\ en\ (h)$

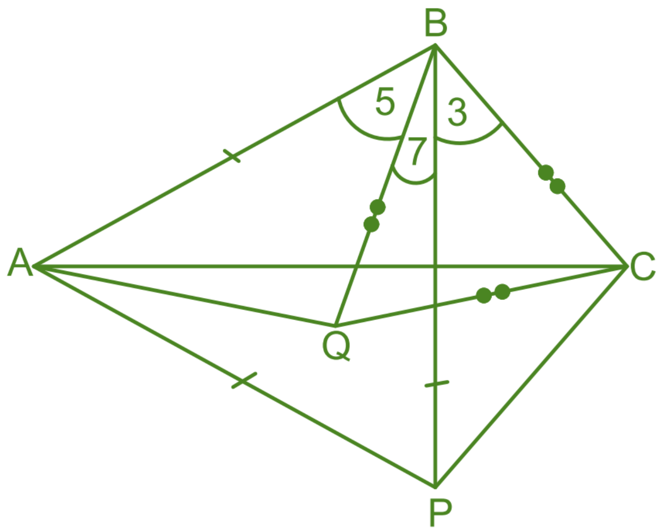
$1m\angle 3 + 1m\angle 4 + 2(40°) = 220° \qquad \Rightarrow \quad * \quad \mathbf{1m\angle AOC}$

$\mathbf{= 140°} \qquad \boldsymbol{LQQD}.$

Ejercicio 4.22.

Dada la figura 4.22, demuestre $AQ = CP$, conociendo que los triángulos ABP y BCQ son equiláteros.

Figura 4.22



$H)\quad \Delta ABP \quad \wedge \quad \Delta BCQ \quad equiláteros$

$T)\quad AQ = CP$

Solución:

$\Delta BQC \quad equilatero \quad por \quad hipótesis$

$a)\quad 1m\angle QBC = 1m.\angle 3 + 1m\angle 7$

$= 60^\circ \qquad suma\ de\ ángulos\ con\sec u\, tivos$

$\Delta ABQ \quad equilatero \quad por \quad hipótesis$

$b)\quad 1m\angle ABP = 1m\angle 5 + 1m\angle 7$

$= 60^\circ \qquad suma\ de\ ángulos\ con\sec u\, tivos$

$(a) = (b)$

$1m\angle.3 + 1m\angle 7 = 1m\angle 5 + 1m\angle 7$

$1m\angle 3 = 1m\angle 5$

$\Delta ABQ \quad \wedge \quad \Delta BPC$

AB	$=$	PB	(L)
$1m\angle ABQ$	$=$	$1m\angle PBC$	(A)
QB	$=$	CB	(L)

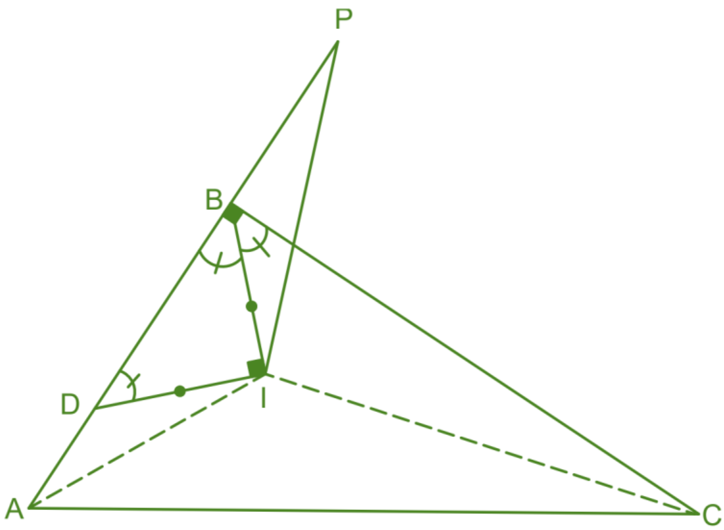
$\Delta ABQ \cong \Delta BPC \qquad (L, A, L)$

$* \quad \boldsymbol{AQ = PC} \qquad \boldsymbol{LQQD}.$

Ejercicio 4.23.

Utilice los datos que se indican en la figura 4.23 para demostrar $IP^2 = (AC)(AD)$

Figura 5.23



$H)\quad I = Incentro\ del\ \Delta ABC$

$BI = DI$

$BP = AD$

$T)\quad IP^2 = (AC)(AD)$

Solución:

ΔABC

$a)\quad 1m\angle.ABC = 2m\angle 1 = 1\angle R$ $\quad por\ Incentro$

$b)\quad BI = DI \quad por\ hipótesis$

$AI = bi\,sec\,t\,riz\ del\ \angle BAC$ $\quad por\ construcción$

$CI = \quad bi\,sec\,t\,riz\ del\ \angle ACB$ $\quad por\ construcción$

$\Delta BDI \quad isósceles$

$c)\quad 1m\angle.ADI = 1\angle R + 1m\angle 1$ $\quad por\ T.\ ángulo\ exterior$

$d)\quad 1m\angle.PBI = 1\angle R + 1m\angle 1$ $\quad por\ T.\ ángulo\ exterior$

$(c) = (d)$

$e)\quad 1m\angle.ADI \cong 1m\angle PBI$

$\Delta ADI \approx \Delta PBI \qquad (L, A, L)$

$f)\quad 1m\angle.AIC = 1\angle R + \dfrac{1m\angle ABC}{2}$

$= 90\,° + 1m\angle 1$ $\quad por\ propiedad\ de\ las\ bisctrices\ \ int\,e\,rnas$

$\Delta ADI \approx \Delta AIC \qquad \therefore \qquad \dfrac{AD}{AI} = \dfrac{DI}{IC} = \dfrac{AI}{AC}$

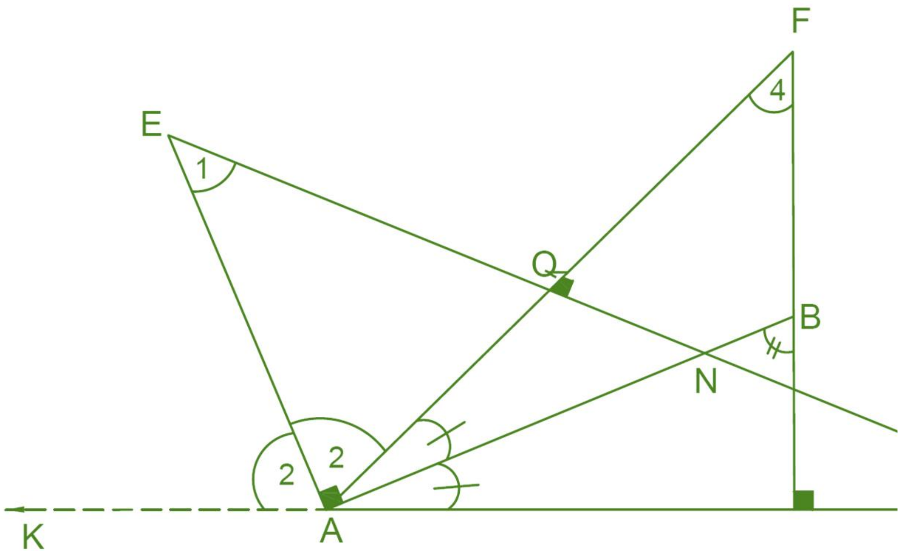
$g)\quad AI = IP$

$h)\quad \dfrac{AD}{IP} = \dfrac{IP}{AC} \qquad * \quad IP^2 = (AC)(AD) \qquad LQQD.$

Ejercicio 4.24.

Dada la figura 4.24 demostrar $\Delta ABF \cong \Delta AEC$, sabiendo que $AB = AE$

Figura 4.24



$H)\quad AB = AE$

$T)\quad \Delta ABF \cong \Delta AEC$

Solución:

$a)\quad \Delta B = AE \qquad por\ hipótesis$

$\Delta AEQ\ ,\ \Delta AFD\ ,\ \Delta ABD\ ,\Delta AQN \quad rectángulos$

$b)\quad 1m\angle 1 + 1m\angle 2 = 1\angle R \qquad T.F.\Delta EAQ$

$c)\quad 1m\angle 1 + 1m\angle ABD = 1\angle R \qquad T.F.\Delta ABD$

$d)\quad 1m\angle 1 + 1m\angle ANQ = 1\angle R \qquad T.F.\Delta AQN$

$(c) = (d)$

$e)\quad 1m\angle 1 + 1m\angle ABD = 1m\angle 1 + 1m\angle ANQ \qquad \Rightarrow \qquad 1m\angle ABD$

$= 1m\angle ANQ = 1m\angle 2$

ΔEAN

$f)\quad 1m\angle AEN + 1m\angle ANQ = 1m\angle R$

$(d) = (f)$

$g)\quad 1m\angle AEN + 1m\angle ANQ = 1m\angle 1 + 1m\angle ANQ$

$\Rightarrow \qquad 1m\angle AEN = 1m\angle 1$

$h)\quad 2m\angle 1 + 1m\angle 4 = 1\angle R \qquad T.F.\Delta AQC$

$i)\quad 2m\angle 1 + 1m\angle AFD = 1\angle R \qquad T.F.\Delta AFD$

$(h) = (i)$

$j)\quad 2m\angle 1 + 1m\angle 4 = 2m\angle 1 + 1m\angle AAFD \qquad \Rightarrow \qquad 1m\angle 4$

$= 1m\angle AFD$

$k)\quad 1m\angle 1 + 1m\angle 4 + 1m\angle ABF = 2\angle R \qquad T.F.\Delta ABF$

$1m\angle 1ABF = 2m\angle 1 + 1m\angle 2$

$\Delta EAC \qquad \wedge \qquad \Delta ABF$

$EA \qquad = \qquad AB \qquad (L)$

$1m\angle EAB \qquad = \qquad 1m\angle ABF \qquad (A)$

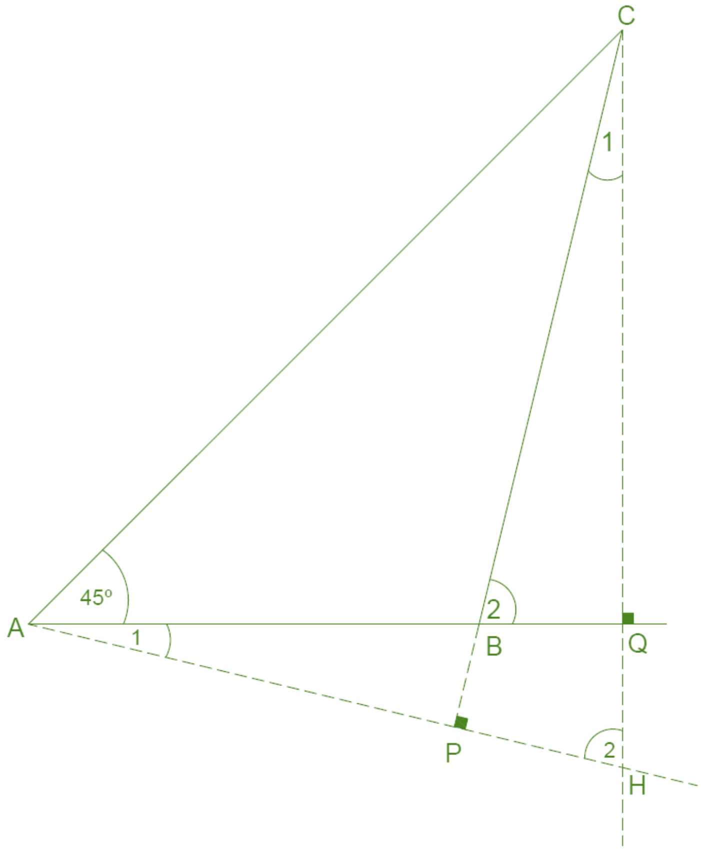
$AB \qquad = \qquad FB \qquad (L) \qquad \Rightarrow \qquad * \quad \boldsymbol{\Delta EAC}$

$\cong \boldsymbol{\Delta ABF} \qquad \boldsymbol{LQQD}.$

Ejercicio 4.25.

En un triángulo obtusángulo ABC, el ángulo CAB mide 45 º y se trazan las alturas AP y CQ cortándose en el ortocentro H. Demostrar que los triángulos AQH y CQB son congruentes. En la figura 4.25

Figura 4.25



Solución:

$a)$ $1m\angle COQ = 1m\angle ABP = 1m\angle 2$ *opuestos por el vértice*

ΔCBQ *rectángulo*

$b)\quad 1m\angle 1 + 1m\angle 2 = 1\angle R \qquad T.F.\Delta$

$\Delta ACP \qquad rectángulo$

$c)\quad 1m\angle PAB + 1m\angle 2 = 1\angle R \qquad T.F.\Delta$

$(b) = (c)$

$1m\angle 1 + 1m\angle 2 = 1m\angle PAB + 1m\angle 2 \qquad \Rightarrow \qquad 1m\angle 1 = 1m\angle PAB$

$\Delta AQH \quad rectángulo$

$d)\quad 1m\angle 1 + 1m\angle AHQ = 1m\angle R \qquad \Rightarrow \qquad 1m\angle AHQ = 1m\angle 2$

$\Delta AQH \qquad \wedge \qquad \Delta BQC$

$AH \qquad = \qquad CB \qquad (L)$

$1m\angle AHQ \qquad = \qquad 1m\angle QCB \qquad (A)$

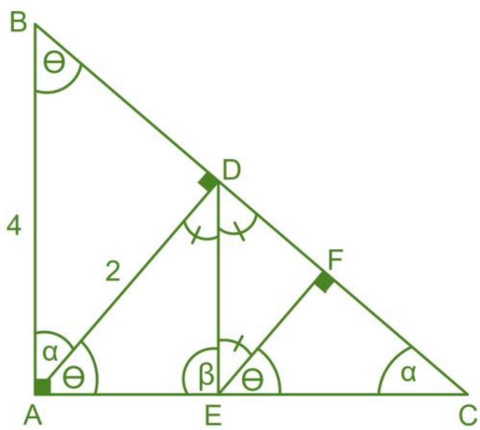
$HQ \qquad = \qquad BQ \qquad (L) \qquad \Rightarrow$

$*\quad \mathbf{\Delta AQH \cong \Delta BQC} \quad (\boldsymbol{L, A, L}) \qquad \boldsymbol{LQQD}.$

Ejercicio 4.26.

En la figura 4.26 considere los datos que se presentan y calcule la medida de EF.

Figura 4.26



$T)\quad EF = ?$

Solución:

$\Delta ABC \quad rectángulo \qquad por\ hipótesis$

$a) \quad DE \ = \ bi\sec triz\ del\ \angle ADF \qquad por\ hipótesis$

$b) \quad 1m\angle DAE = 1m\angle FEC$

$= 1m\angle\theta \qquad por\ ángulos\ correspondientes$

$c) \quad 1m\angle ADE = 1m\angle DEF$

$= 1m\angle 1 \qquad por\ ángulos\ alternos\ \ int\,e\,rnos$

$\Delta ABD \quad rectángulo$

$d) \quad Sen\ \theta = \dfrac{AD}{AB} = \dfrac{2}{4} = 0.5 \qquad \therefore \qquad 1m\angle\theta = 30^0$

$\Rightarrow \qquad 1m\angle\alpha = 60^0$

ΔABC

$e) \quad Sen\ 60^0 = \dfrac{AD}{AC} \qquad \therefore \qquad AC = \dfrac{2}{Sen\ 60^0} \qquad \Rightarrow \qquad AC$

$= 2.3\ u$

ΔADE

$f) \quad 1m\angle\beta = 180^0 - 1m\angle\theta - 1m\angle 1 = 180^0 - 30^0 - 45^0$

$\Rightarrow \qquad 1m\angle\beta = 105^0$

$\dfrac{Sen\ 45^0}{AE} = \dfrac{Sen\ 105^0}{2} \qquad \Rightarrow \qquad AE = 1.47\ u$

$g) \quad EC = AC - AE = 2.3\ u - 1.47\ u \qquad \Rightarrow \qquad EC = 0.83\ u$

$\Delta EFC \quad rectángulo$

$h) \quad Sen\ 60^0 = \dfrac{EF}{EC} \qquad \therefore \qquad EF$

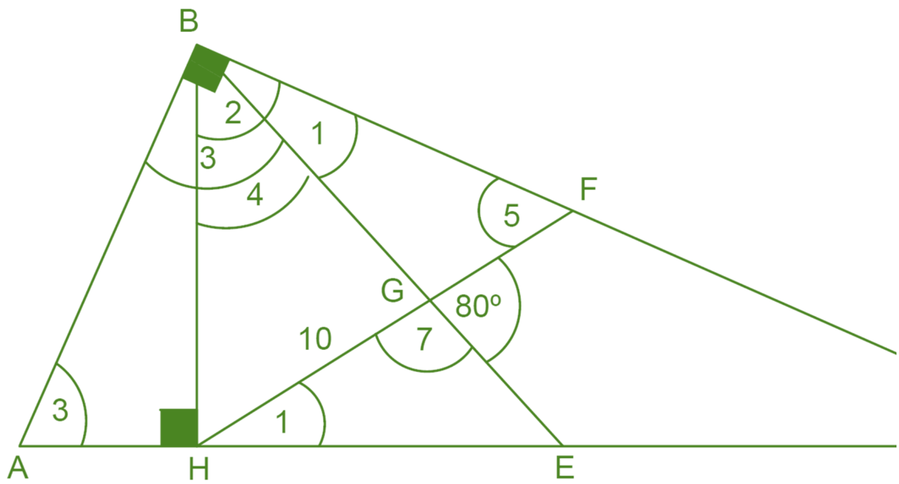
$= (Sen\ 60^0)(0.83\ u) \qquad \Rightarrow \qquad * \quad EF$

$= 0.72\ u \qquad LQQD.$

Ejercicio 4.27.

Considere la figura 4.27 para determinar la medida de GE, conociendo $AE = EC$

Figura 4.27



$H) \quad AE = EC$

$T) \quad GE = ?$

Solución:

$\Delta BHC \quad rectángulo \qquad por\ hipótesis$

$a) \quad HE = mediana$

$b) \quad HE = EB = EC \qquad propiedad\ de\ la\ mediana\ de\ un\ \Delta$

$\Delta HEC \quad \wedge \quad \Delta HBE \quad son\ isósceles$

$\Delta ABC \quad rectángulo \qquad por\ hipótesis$

$c) \quad BE = mediana$

$d) \quad AE = EC = BE \qquad propiedad\ de\ la\ mediana\ de\ un\ \Delta$

$\Delta ABE \quad \wedge \quad \Delta BEC \quad son\ isósceles$

$e) \quad 1m\angle 1 + 1m\angle 3 = 1\angle R \qquad T.F.\Delta\ ABC$

$f) \quad 1m\angle 1 + 1m\angle 2 = 1\angle R \qquad T.F.\ \Delta\ BHC$

$1m\angle 3 = 1m\angle 2$

$\Delta BEC \quad \cong \quad \Delta HEC \qquad (A, L, A)$

$g) \quad 1m\angle 1 + 1m\angle 5 = 80^0 \qquad T.\angle\ exterior\ al\ \Delta HGE$

$h) \quad 1m\angle 2 + 1m\angle 4 = 100^0 \qquad T.F.\Delta HGB$

$1m\angle 5 = 2m\angle 1 \qquad T.\angle\ exterior\ al\ \Delta HEC$

$1m\angle 1 + 1m\angle 5 = 80^0 \qquad T.\angle\ exterior\ al\ \Delta HGE$

$i) \quad 80^0 = 3m\angle 1 \qquad \Rightarrow \qquad 1m1 = 26.66^0$

$1m\angle 3 = 1m\angle 2 = 63.34^0$

$1m\angle 5 = 53.32^0$

$1m\angle 4 = 36.68^0$

ΔHGE

$1m7 = 180^0 - 26.66^0 - 53.32^0 \qquad \Rightarrow \qquad 1m\angle 7$

$= 100..20^0$

$j) \quad \frac{Sen\ \angle 5}{HG} = \frac{Sen\ \angle 1}{GE} \qquad \therefore \qquad GE$

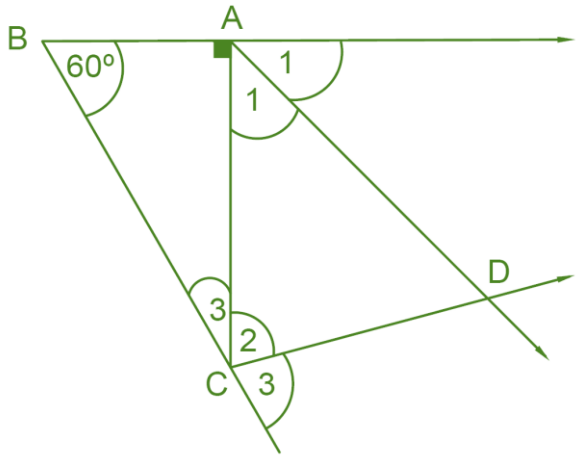
$= \frac{(Sen\ 26.66^0)(10u)}{Sen\ 53.32} \qquad \Rightarrow \qquad * \quad \boldsymbol{GE}$

$= \mathbf{5.59u} \qquad \boldsymbol{LQQD}.$

Ejercicio 4.28.

Dada la figura 4.28, determinar la medida de AD.

Figura 4.28



$T) \quad AD = ?$

Solución:

$a) \quad \Delta ABC \quad rectángulo \quad por\ hipótesis$

$b) \quad 1m\angle 3 = 30^0$

$c) \quad 1m\angle 1 = 45^0$

$d) \quad 2m\angle 1 + 1m\angle 3 = 1m\angle BCK$

$= 2\angle R \quad suma\ de\ ángulos\ con\sec u\,tivos$

$e) \quad 1m\angle 2 = \dfrac{180^0 - 30^0}{2} \quad \Rightarrow \quad 1m\angle 2 = 75^0$

ΔCAD

$f) \quad 1m\angle 1 + 1m\angle 2 = 1m\angle 4 = 2\angle R \quad T.F.\ \Delta$

$1m\angle 4 = 180^0 - 456^0 - 75^0 \quad \Rightarrow \quad 1m\angle 4 = 60^0$

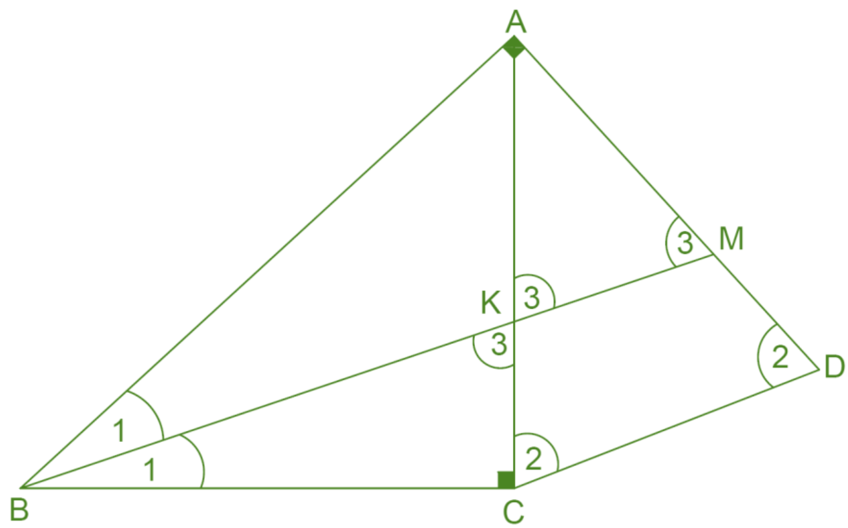
$h)\quad \dfrac{Sen\ \angle 2}{AD} = \dfrac{Sen\ \angle 4}{AC} \qquad \Rightarrow \qquad AD = \dfrac{(Sen\ 75^0)(8.6u)}{Sen\ 60^0}$

$* \quad \boldsymbol{AD = 9.59u} \qquad \boldsymbol{LQQD}.$

Ejercicio 4.29.

Demostrar que $(AB)(MD) = (BC)(AM)$, considere los datos de la figura 4.29

Figura 4.29



$H)\quad AC = AD$

$T)\quad (AB)(MD) = (BC)(AM)$

Solución:

$a)\quad AC = AD \qquad por\ hipótesis$

$\quad \Delta ACD \quad isósceles \qquad por\ hipótesis$

$b)\quad 1m\angle ACD = 1m\angle CDA = 1m\angle 2 \qquad T.\ \Delta.\ isósceles$

$\quad \Delta BAM \quad rectángulo \qquad por\ hipótesis\ gráfica$

$c)\quad 1m\angle 1 + 1m\angle 3 = 1\angle R \qquad T.\ F.\ \Delta$

$\Delta BCK \quad rectángulo \quad por\ hipótesis\ gráfica$

$d)\quad 1m\angle 1\ + 1m\angle BKC = 1\angle R$

$(c) = (d)$

$1m\angle 1 + 1m\angle 3 = 1m\angle 1 + 1m\angle BKC \qquad \Rightarrow \qquad 1m\angle 3 = 1m$

$\perp BKC$

$e)\quad 1m\angle BCK = 1m\angle AKM$

$= 1m\angle 3 \qquad ángulos\ opuestos\ por\ el\ vértice$

$\Delta AKM \quad isósceles$

$f)\quad AK = AM \qquad T.\ \Delta\ isósceles$

$g)\quad AK = AM = MD$

$M = punto\ medio\ de\ AD$

$AC = AK + KC$

$AC - AK = KC \qquad \Rightarrow \qquad MD = KC$

$h)\quad \Delta AMB \cong \Delta BKC$

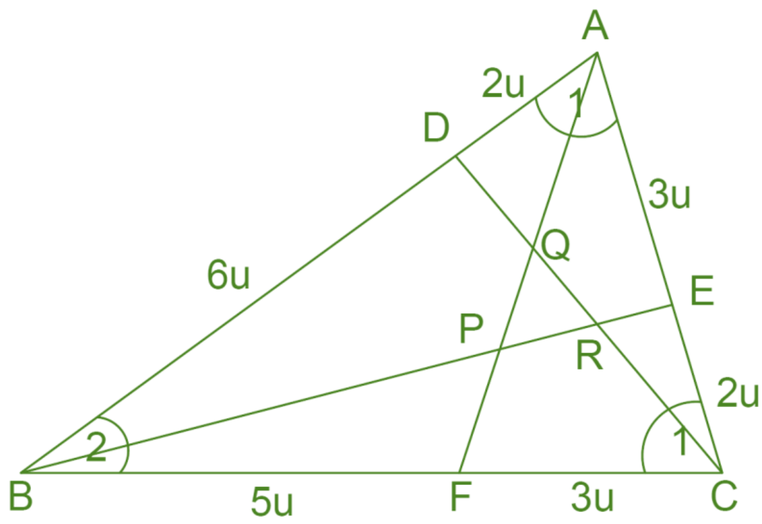
$i)\quad \frac{AB}{BC} = \frac{AM}{KC} = \frac{BM}{BK} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{AB}{BC} = \frac{AM}{MD}$

$* \quad (\boldsymbol{AB})(\boldsymbol{MD}) = (\boldsymbol{AM})(\boldsymbol{BC}) \qquad \boldsymbol{LQQD}.$

Ejercicio 4.30.

Con los datos que se presentan en la figura 4.30, calcular las medidas de los segmentos RQ, PQ y PR.

Figura 4.30



$H)\quad AD = 2u \qquad\qquad BD$

$= 6u$

$AE = 3u \qquad\qquad EC = 2u$

$CF = 3u \qquad\qquad BF = 5u$

$T)\quad RQ = ?$

$PQ = ?$

$PR = ?$

Solución:

ΔABC

$a)\quad Cos\ \angle 1 = \dfrac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{(2)(AB)(AC)}$

$= \dfrac{(8u)^2 + (5u)^2 - (8u)^2}{(2)(8u)(5)} \qquad ley\ del\ coseno$

$1m\angle 1 = 71.8\,°$

$b)\quad AB = BC \qquad por\ hipótesis$

$\Delta ABC \quad isásceles$

$c)\quad 1m\angle BCA = 1m\angle 1 = 71.8\,° \qquad por\ T.\ \Delta.\ isásceles$

$d)\quad 1m\angle ABC = 1m\angle 2 = 36.7\,°$

ΔADC

$DC = \sqrt{AD^2 + AC^2 - (2)(AD)(AC)\cos\ \angle 1} \qquad ley\ del\ coseno$

$e)\quad DC = \sqrt{(2u)^2 + (5u)^2 - (2)(2u)(5u)\cos 71.8\,°} \qquad \Rightarrow \qquad DC$

$= 4.77u$

ΔAFC

$AF = \sqrt{FC^2 + AC^2 - (2)(FC)(AC)\cos\ \angle 1} \qquad ley\ del\ coseno$

$f)\quad AF = \sqrt{(3u)^2 + (5u)^2 - (2)(3u)(5u)\cos\ 71.8\,°}$

$\Rightarrow \qquad AF = 4.96u$

ΔABE

$BE = \sqrt{AE^2 + AB^2 - (2)(AE)(AB)\cos\ \angle 1}$

$g)\quad BE = \sqrt{(3u)^2 + (8u)^2 - (2)(3u)(8u)\cos\ 71.8\,°}$

$\Rightarrow \qquad BE = 7.62u$

$Utilizando\ el\ teorema\ de\ Menelao\ en\ el\ \Delta AFC$

$BE = \ transversal$

$h)\quad (EC)(AP)(BF) = (AE)(PF)(BC) \quad\Rightarrow\quad (2u)(AP)(5u)$

$= (3u)(PF)(8u)$

$(10u)(4.96 - PF) = (24u)PF \quad\Rightarrow\quad PF = 1.46u$

Utilizando el teorema de Menelao en el ΔABF

$CD =$ *transversal*

$i)\quad (BD)(AQ)(FC) = (DA)(QF)(BC) \quad\Rightarrow\quad (6u)(AQ)(3u)$

$= (2u)(QF)(8u)$

$(18u)(4.96u - QF) = (16u)(QF) \quad\Rightarrow\quad QF = 2.63u$

$j)\quad PQ = QF - PF = 2.63u - 1.46u \quad\Rightarrow\quad * \quad \boldsymbol{PQ}$

$= \mathbf{1.17\ u} \quad \boldsymbol{LQQD}.$

Utilizando el teorema de Menelao en el ΔABE

$CD =$ *transversal*

$k)\quad (BD)(RE)(AC) = (DA)(BR)(EC) \quad\Rightarrow\quad (6u)(RE)(5u)$

$= (2u)(BR)(2u)$

$(30u)(BE - BR) = (4u)(BR) \quad\Rightarrow\quad 30u)(7.62 - BR)$

$= (4u)(BR) \quad\Rightarrow\quad BR = 6.72u$

Utilizando el teorema de Menelao en el ΔBEC

$AF =$ *transversal*

$l)\quad (BP)(AE)(FC) = (AC)(PE)(AC) \quad\Rightarrow\quad (BP)(3u)(3u)$

$= (5u)(PE)(5u) \quad\Rightarrow\quad (9u)(BP) = 25(PE)$

$(9u)(BP) = (25u)(BE - BP) \quad\Rightarrow\quad (9u)(BP)$

$= (25u)(7.62 - BP) \quad\Rightarrow\quad BP = 5.6u)$

$m)\quad PR = BR - BP = 6.72u - 5.6u \quad\Rightarrow\quad * \quad \boldsymbol{PR}$

$= \mathbf{1.12\ u} \quad \boldsymbol{LQQD}$

Utilizando el teorema de Menelao en el ΔABE

$DC =$ *transversal*

$n) \quad (AB)(DR)(EC) = (BD)(AE)(RC) \quad \Rightarrow \quad (8u)(DR)(2u)$

$= (6u)(3u)(RC) \quad \Rightarrow \quad (16u)(DR)$

$= (18u)(RC)$

$(16u)(DC - RC) = (18u)(RC) \quad \Rightarrow \quad (16u)(4.77u - RC)$

$= (18u)(RC) \quad \Rightarrow \quad RC = 2.24u$

Por el teorema de Menelao en el ΔADC

$AF = \ transversal$

$n) \quad (AB)(DQ)(FC) = (DA)(QC)(BF) \quad \Rightarrow \quad (8u)(DQ)(3u)$

$= (2u)(QC)(5u) \quad \Rightarrow \quad (24u)(DQ)$

$= (10u)(QC)$

$(24u)(DC - QC) = (10u)(QC)$

$\Rightarrow \quad (24u)(4.77u - QC) = (10u)(QC)$

$\Rightarrow \quad QC = 3.36u$

$o) \quad QR = QC - RC = 3.36u - 2.24u \quad \Rightarrow \quad * \quad \boldsymbol{QR}$

$= \mathbf{1.12}\boldsymbol{u}$

CAPÍTULO 5

Círculo y circunferencia

Capítulo 5
Círculo y circunferencia

5

Las ciencias matemáticas exhiben
particularmente orden, simetría y límites;
y esas son las más grandes formas de belleza.

- *Aristóteles.*

Objetivo

Definir, interpretar y analizar la relación de las líneas con la circunferencia, establecer las características de los ángulos que se ubican en la circunferencia, permitir que el lector sea capaz de diferenciar y aplicar las propiedades del círculo con la circunferencia.

Logros de aprendizaje

El lector estará en capacidad de:

- Diferenciar entre circulo y circunferencia.
- Definir los elementos de la circunferencia.
- Identificar los tipos de ángulos en la circunferencia.
- Demostrar las proposiciones que relacionen a la circunferencia.
- Realizar ejercicios de aplicación sobre circunferencias.

5.1 Introducción teórica

Propiedades de las tangentes a una circunferencia

- Toda tangente a una circunferencia es perpendicular al radio en su punto de contacto.
- Primera propiedad. - Las tangentes trazadas desde un punto exterior a una circunferencia son iguales.
- Segunda propiedad. - Las tangentes interiores comunes a dos circunferencias son iguales.
- Tercera propiedad. - Las tangentes exteriores comunes a dos circunferencias son iguales.

Ángulo inscrito. - Es el ángulo que tiene su vértice sobre la circunferencia y sus lados son dos cuerdas, su medida es igual a la mitad del arco comprendido entre sus lados.

Ángulo semi-inscrito. - Es el ángulo que tiene su vértice sobre la circunferencia y sus lados son una cuerda y una tangente; su medida es igual a la mitad del ángulo central correspondiente al arco comprendido entre sus lados.

Ángulo ex-inscrito. - Es el ángulo que tiene su vértice sobre la circunferencia y sus lados son una cuerda y una secante; su medida es igual a la semi - suma de los arcos comprendidos entre los lados del ángulo y entre los lados del ángulo opuesto por el vértice.

Ángulo central. - Es el ángulo que tiene como vértice el centro de la circunferencia y como lados dos radios de la misma, su medida es igual directamente al arco comprendido entre sus lados.

Ángulo interior. - Es el ángulo que tiene su vértice dentro de la circunferencia y sus lados son dos cuerdas que cortan, su medida es igual a la semi - suma de las medidas de los arcos comprendidos por sus lados y por sus prolongaciones.

Ángulo exterior. - Es el ángulo que tiene su vértice fuera de la circunferencia y sus lados pueden ser:

- Formados por dos tangentes.
- Formados por dos secantes.
- Formados por una secante y una tangente.

Su medida es igual a la semi - diferencia de los arcos comprendidos entre sus lados, es decir es igual a la semi - diferencia entre el arco mayor y el arco menor.

Arco capaz de un ángulo. - Es el lugar geométrico de todos los puntos que al unirlos con otros dos puntos fijos forman ángulos inscritos iguales.

Teoremas y corolarios del círculo

- En un mismo círculo o en círculos iguales, ángulos centrales iguales interceptan arcos iguales, y el mayor de dos ángulos centrales desiguales intercepta mayor arco.
- En un mismo círculo o en círculos iguales, arcos iguales son sub - tendidos por cuerdas iguales y el mayor de dos arcos desiguales es sub - tendido por la mayor cuerda.
- La perpendicular trazada por el centro de un círculo a una cuerda biseca la cuerda y los arcos sub - tendidos.
- Toda tangente a un círculo es perpendicular al radio que pasa por el punto de tangencia.
- En todo círculo, dos paralelas interceptan arcos iguales:
  a.- Cuando las rectas paralelas son secantes.
  b.- Una de las dos paralelas es secante y la otra tangente.
  c.- Las dos rectas son tangentes.
- La línea de los centros de dos circunferencias que se cortan es la perpendicular bisectriz de la cuerda común.

Relaciones métricas en la circunferencia

- **Relaciones entre las cuerdas.** - Si dos cuerdas de una circunferencia se cortan, el producto de los dos segmentos en una cuerda es igual al producto de dos segmentos determinados en la otra.

- **Relaciones entre secantes.** - Si por un punto exterior de una circunferencia se trazan dos secantes, el producto de una secante por su segmento exterior, es igual al producto de la otra secante por su segmento exterior.

- **Relación métrica entre la tangente y la secante trazada desde un punto exterior a una circunferencia.**

  - Si por un punto exterior de una circunferencia se trazan una tangente y una secante es medida proporcional entre la secante y su segmento exterior.

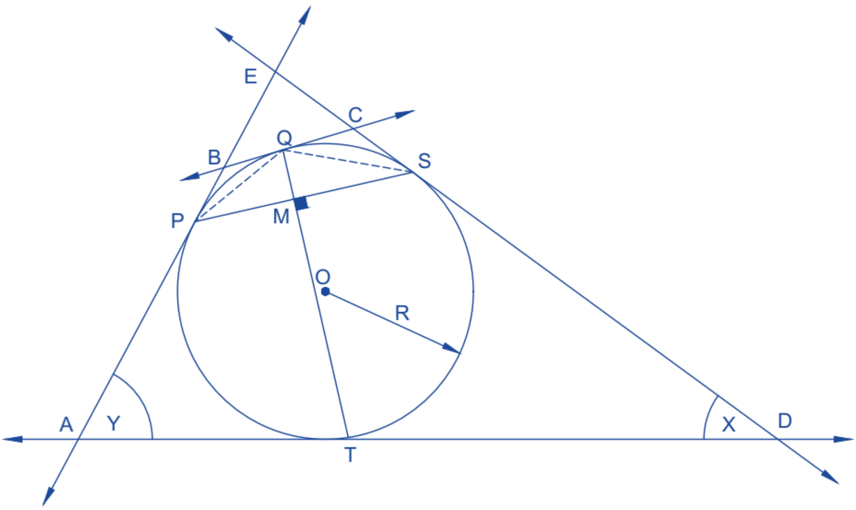
  - El producto de los lados de un triángulo es igual al producto de la altura correspondiente al tercer lado por el diámetro de la circunferencia circunscrita al triángulo.

5.2 Ejercicios resueltos de círculo y circunferencia

Ejercicio 5.1.

Hallar la medida del ángulo $\angle x$ y $\angle y$. Sabiendo que las rectas $\overleftrightarrow{BC}$, $\overline{CD}$, $\overleftrightarrow{AD}$, $\overleftrightarrow{AB}$ son tangentes a la circunferencia de radio R, la medida del $\angle BCS = 100^0$ y $\angle BEC = 70^0$

Figura 5.1



$H)$ $\overleftrightarrow{BC}$, $\overline{CD}$, $\overleftrightarrow{AD}$, $\overleftrightarrow{AB}$, $Tangs\Theta(O, R)$

$1m\angle BCS = 100^0$

$1m\angle BEC = 70^0$

$T)$ $1m\angle x = ?$

$1m\angle y = ?$

Solución:

$a)\quad \overline{PQ}\ y\ \overline{QS}\qquad cuerdas\ por\ construcción$

$b)\quad 1m\angle EBC + 1m\angle BEC + 1m\angle ECB = 2\angle\ Rectos$

$= 180^0 \qquad T.F.\ \Delta\Delta BEC$

$1m\angle EBC = 180^0 - 1m\angle BEC + 1m\angle ECB$

$\therefore \qquad 1m\angle EBC = 180^0 - 70^0 - (180^0 - 1m\angle BCS)$

$c)\quad 1m\angle EBC = 30^0$

$d)\quad 1m\angle ABC = 180^0 - 1m\angle EBC \qquad por\ ángulo\ llano$

$\Rightarrow \qquad 1m\angle ABC = 150°$

$\Delta BPQ \quad Isosceles \qquad : \qquad \overline{BP} = \overline{PQ} \qquad \Rightarrow \quad 1m\angle ABC$

$= 1m\angle PBQ$

$$f)\quad 1m\angle BPQ = \frac{180^0 - 1m\angle ABC}{2} = \frac{180° - 150°}{2} \qquad \Rightarrow \quad 1mBPQ$$

$= 15°$

$$g)\quad 1m\angle BPQ = \ ángulo\ semi - inscrito = \frac{arcoPQ}{2} \qquad \Rightarrow \quad arco\ PQ$$

$= 30^0$

$h)\quad 1m\angle SMT = 90^0$

$$= \frac{\overset{\frown}{PQ} + \overset{\frown}{ST}}{2} \qquad por\ ángulo\ interior \qquad : \qquad 180^0$$

$- \overset{\frown}{PQ} = \overset{\frown}{ST} \qquad \Rightarrow \qquad \overset{\frown}{ST} = 150°$

$\Delta QCS \qquad Isósceles \qquad : \qquad \overline{QC}$

$= \overline{CS} \qquad : \qquad 1m\angle QCS = 180^0 - 2m\angle CQS$

$$1m\angle CQS = \frac{180^0 - 1m\angle\ QCS}{2} = \frac{180^0 - 100^0}{2} = 40^0$$

$\therefore \qquad 1m\angle CQS = 40^0 = 1m\angle CSQ$

$$1m\angle CQS = \frac{\overset{\frown}{QS}}{2} \qquad \Rightarrow \qquad \overset{\frown}{QS} = 80^0$$

$i)\quad \overset{\frown}{PQ} + \overset{\frown}{QS} + \overset{\frown}{ST} + \overset{\frown}{TP}$

$= 360° \qquad por\ suma\ de\ ar\cos\ \ en\ el\ círculo$

$\therefore \qquad \overset{\frown}{TP} = 100^0$

$$j)\quad 1m\angle x = \frac{\left(SQ + \overset{\frown}{\overset{\frown}{PQ}} + \overset{\frown}{TP}\right) - \overset{\frown}{ST}}{2} = \frac{(80^0 + 30^0 + 100^0) - 150^0}{2}$$

$: \qquad * \quad 1m\angle x = 30^0 \quad LQQD.$

ΔAED

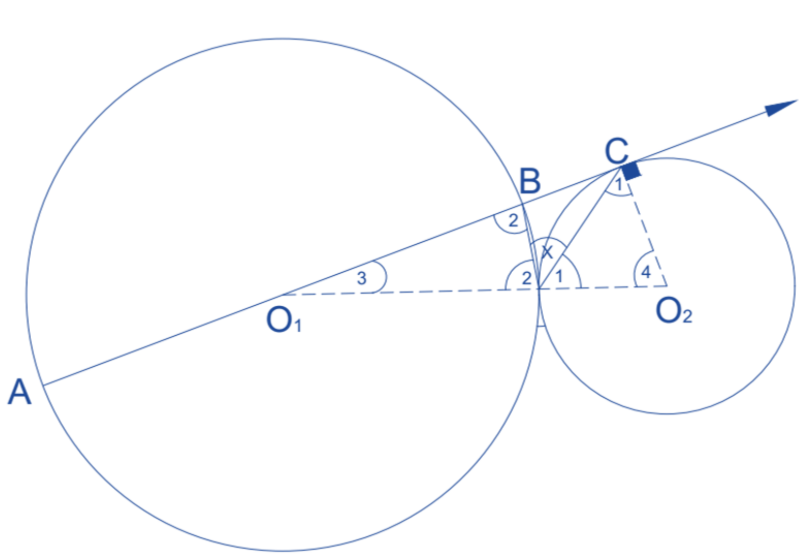
$h)\quad 1m\ \angle AED + 1m\angle y + 1m\ \angle x = 180^0 \qquad : \qquad 1m\angle y$
$= 180^0 - 100\,°$

$\mathbf{1m\angle y = 80^0}\quad \boldsymbol{LQQD}.$

Ejercicio 5.2.

Dada la figura 5.2. Determinar la medida del ángulo $\angle x$. Conociendo $\Theta\ (O_1, R_1)\ Tang.\ \Theta\ (O_2, R_2)$ y la recta $\overrightarrow{AC}$ es tangente a la circunferencia (O_2, R_2)

Figura 5.2



$H)\quad \Theta\ (O_1, R_1)\ Tang.\ \Theta\ (O_2, R_2)$

$\overrightarrow{AC}\ \ Tang.\ \Theta\ (O_2, R_2)$

$T)\quad 1m\angle BDC = 45^0$

Solución:

$a)\quad \overline{O_iD} = R_i \qquad por\ construcción$

$b)\quad \overline{O_2D} = R_2 \qquad por\ construcción$

$c)\quad \overline{O_2C} = R_2 \quad \Rightarrow \quad R_2\ \perp\ \overline{AC}$

$\Delta O_1O_2C\ \ Re\,c\,tángulo$

$d)\quad \overrightarrow{AC}\ Tang\ \Theta(O_2,R_2) \qquad por\ hipótesis$

$\overrightarrow{AC}$

$\perp\ CO_2 \quad por\ propiedad\ de\ las\ tangentes\ a\ una\ circunferencia$

$\overline{O_1O_2}$

$= R_1 + R_2 \quad por\ propiedad\ de\ las\ circunferencias\ tangentes$

$\Delta O_1BD \quad Isósceles$

$\overline{O_1B} = \overline{O_1D} = R_1 \qquad \therefore \qquad 1m\angle O_1BD = 1m\angle O_1DB$

$= 1m\angle 2 \qquad \Rightarrow \qquad 1m\angle BDC = 1m\angle x$

$e)\quad 1m\angle 1 + 1m\angle x$

$= 1m\angle 3$

$+ 1m\angle 2 \qquad por\ teorema\ de\ ángulo\ exterior$

$f)\quad 1m\angle 2 + 1m\angle x$

$= 1m\angle 1 + 1m\angle 4 \qquad por\ teorema\ de\ ángulo\ exterior\ al\ \Delta CDO_2$

$(e)\ +\ (f)$

$1m\angle 1 + 1m\angle 2 + 2m\angle x = 1m\angle 1 + 1m\angle 2 + 1m\angle 3 + 1m\angle 4$

$g)\quad 2m\angle x = 1m\angle 3 + 1m\angle 4$

$\Delta O_1CO_2 \quad rectángulo$

$h)\quad 1m\angle 3 + 1m\angle 4 = 90°$

$(h)\ en\ (g)$

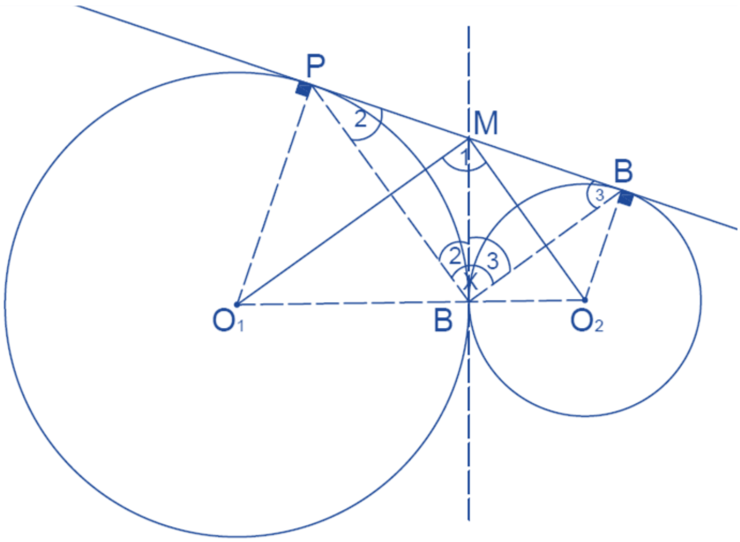
$2m\angle x = 90°$

$\boldsymbol{1m\angle BDC = 1m\angle x = 45°} \quad \boldsymbol{LQQD}.$

Ejercicio 5.3.

Con relación a la figura 5.3. Hallar la medida del ángulo $\angle 1$. Sabiendo que la recta $\overleftrightarrow{PQ}$ es tangente a la circunferencia de R1 y R2 y los segmentos $\overline{PM} \cong \overline{MQ}$

Figura 5.3



$H)\quad \overleftrightarrow{PQ}\ Tang\ \Theta(O_1, R_1)\ y\ \Theta(O_2, R_2)$

$\overline{PM} \cong \overline{MQ}$

$T)\quad 1m\angle 1 = ?$

Solución:

$a)\quad \overline{PM} = \overline{MQ} \qquad por\ hipótesis$

$\overline{PO_1} = R_1 \qquad por\ construcción.$

$\overline{QO_2} = R_2 \qquad por\ construcción.$

$b)\quad \overline{O_1O_2} = \ R_2 + R_1 \qquad por\ construcción.$

$\overline{PB}, \overline{QB} \quad cuerdas\ auxiliares\ por\ const.$

$c)\quad \overline{MB} = \ TANG.\ \Theta\ (O_1, R_1)\ \wedge\ \Theta\ (O_2, R_2) \quad por \quad construcción$

$d)\quad \Delta\ PO_1M\ y\ \Delta MQO_2 \rightarrow rectángulos\ por\ teorema.\}$

$1m\angle O_1PM = 90°$

$e)\quad 1m\angle MPB = 1m\angle 2$

$f)\quad 1m\angle O_1PB = 90° - 1m\angle 2$

$\Delta\ O_1PB \quad Isósceles \qquad \Rightarrow \qquad \overline{PO_1} = \overline{O_1B} = R_1$

$g)\quad 1m\angle\ PBO_1 = 90° - 1m\angle 2$

$1m\angle MQO_2 = 90° \qquad \Rightarrow \qquad 1m\angle MQB = 1m\angle 3$

$\Delta\ BQO_2 \rightarrow isósceles \qquad \Rightarrow \qquad 1m\angle BQO_2 = 1m\angle QBO_2$

$h)\quad 1m\angle QBO_2 = 90° - 1m\angle 3$

$1m\angle\ PQB = \ 1m\angle\ x$

$i)\quad 1m\angle x = 180° - (90° - 1m\angle 2 + 90° - 1m\angle 3)$

$1m\angle x = 1m\angle QBM + 1m\angle MBP \qquad suma\ de\ ángulos\ consecutivos$

$j)\quad \overline{PM} = \overline{MB} = \overline{MQ} \qquad por\ propiedad\ de\ las\ tangentes$

$\Delta\ BMQ\ y\ \Delta PMB\ son\ isósceles$

$1m\angle QBM = 1m\angle 3$

$k)\quad 1m\angle MBP = 1m\angle 2$

$l)\quad 1m\angle x = 180° - (1m\angle 3 + 1m\angle 2) \qquad TF\Delta\ PQB$

$(k)\ en\ (l)$

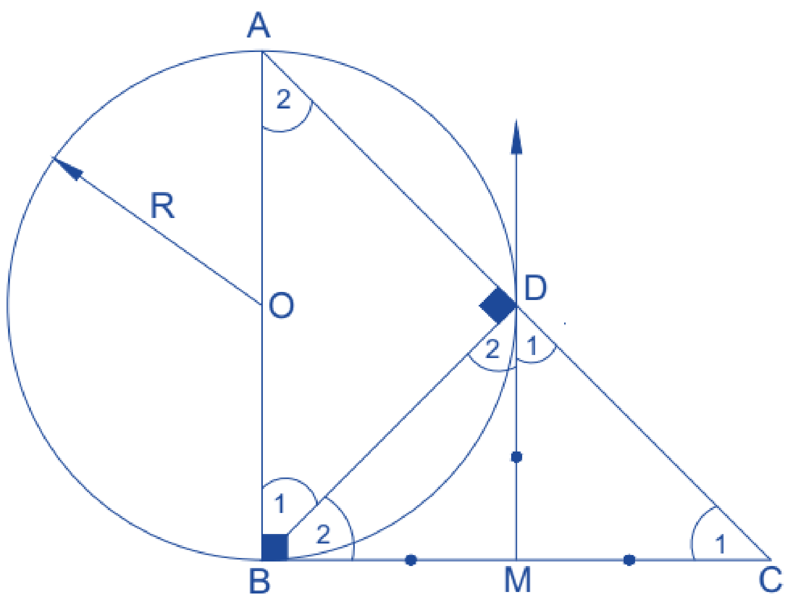
$ll)\quad m\angle x = 180° - 1m\angle x$

$1mx = 90°$

Ejercicio 5.4.

Dada la figura 5.4. Demostrar $\overline{BM} \cong \overline{MC}$. Conociendo que $\overline{DM}\ tangente\ \Theta\ (O,R)\ en\ "D"$.

Figura 5.4



$H)\quad \overline{DM}\ tangente\ \Theta\ (O,R)\ en\ "D"$

$T)\quad \overline{BM}\ \cong\ \overline{MC}$

Solución:

$a)\quad \overline{MD}\ tang.\ \Theta\ (OR)\quad por\ hipótesis.$

$b)\quad \overline{BM} = \overline{MD}\quad por\ propiedad\ de\ \ las\ \ tangentes$

$c) \quad 1m\angle ADM = \text{ ángulo semi} - \text{inscrito} = \dfrac{\overset{\frown}{AB}}{2} + \dfrac{\overset{\frown}{BD}}{2}$

$d) \quad 1m\angle ACB = \text{ángulo exterior} = \dfrac{\overset{\frown}{AB}}{2} - \dfrac{\overset{\frown}{BD}}{2}$

$(b) \; + \; (c)$

$$\left(\frac{\overset{\frown}{AB}}{2} + \frac{\overset{\frown}{BD}}{2}\right) + \left(\frac{\overset{\frown}{AB}}{2} - \frac{\overset{\frown}{BD}}{2}\right) = 1m\angle ADM + 1m\angle ACB$$

$$= \overset{\frown}{AB} \qquad\qquad \therefore \quad \overset{\frown}{AB}$$

$$= 2\text{ángulos rectos} = 180\,°$$

$e) \quad 1m\angle ADM + 1m\angle ACB = 180\,°$

$f) \quad 1m\angle ADC = \text{ángulo llano} = 180\,° = 1m\angle ADM + 1m\angle MDC$

$(e) = (f)$

$$1m\angle\ ADM + 1m\angle ACB = 1m\ \angle ADM + 1m\angle\ MDC$$

$$\therefore \quad 1m\angle ACB = 1m\angle MDC$$

$$\Rightarrow \quad \Delta\ MDC \text{ es isósceles}$$

$g) \quad \overline{DM} = \overline{MC}$

$(b) \; = \; (g)$

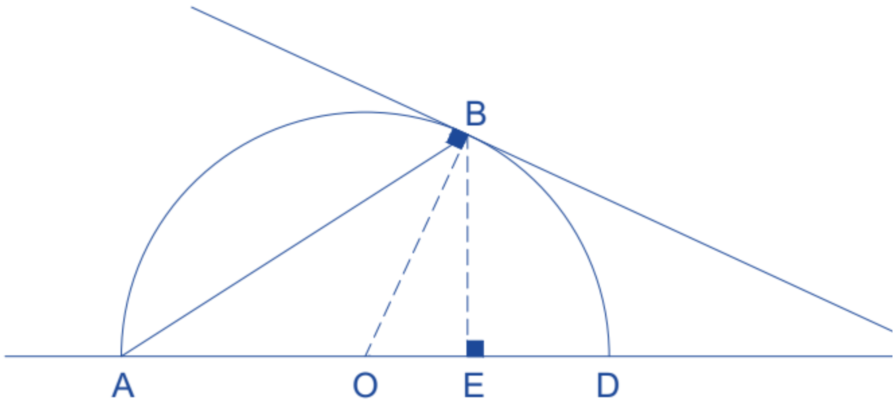
$$\overline{BM} = \overline{DM} = \overline{MC}$$

$\boldsymbol{\overline{BM} \cong \overline{MC} \quad LQQD.}$

Ejercicio 5.5.

Considere la figura 5.5. Determinar la medida del segmento $\overline{BC}$. Sabiendo que $\overline{BC}$ $es\ tangente\ \Theta(O,R)$, $\overline{AB}$ $= 4m$ l y $\overline{AO} = 2.5m$.

Figura 5.5



$H)$ $\overline{BC}$ $tangente\ \Theta(O,R)$

$\overline{AB}$ $= 4m$

$\overline{AO} = 2.5m$

$T)$ $\overline{BC} = ?$

Solución:

$\overline{BD} = cuerda\ \ por\ \ construcción$

$$a)\quad 1m\angle\ ABD = Ángulo\ inscrito = \frac{\overset{\frown}{AD}}{2} = \frac{180^0}{2}$$

$$\Rightarrow \qquad 1m\angle\ ABD = 90^0$$

$\overline{BE} = Altura\ \ de\ \ los\ \ triángulos\ \ \ ABD\ \wedge ABC$

$b)\quad \overline{AD} = 2\overline{AO} = 2\overline{OD} = 2R = 5m$

$c) \quad \overline{BC}^2$

$= (\overline{AC})(\overline{DC}) \quad por\ relación\ métrica\ de\ la\ \ sec\,a\,nte\ con\ la\ tangente$

$\Delta\ ABD \quad rectángulo$

$d) \quad \overline{BD}^2 = \overline{AD}^2 - \overline{AB}^2 \quad por\ \ Pitágoras$

$\overline{BD}^2 = \overline{AD}^2 - \overline{AB}^2 = [(5)^2 - (4)^2]m2 \quad = \sqrt{9m^2}$

$\Rightarrow \qquad \overline{BD} = 3m$

$e) \quad \dfrac{\overline{AD}}{\overline{\overline{AB}}} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{\overline{AE}}} \qquad propiedad\ de\ los\ triángulos\ rectángulos$

$\overline{AE} = \dfrac{\overline{AB}^2}{\overline{\overline{AD}}} = \dfrac{16m^2}{3m} \qquad \Rightarrow \qquad \overline{AE} = 3.2\ m$

$f) \quad \overline{ED} = \overline{AD} - \overline{AE} = (5 - 3.2)m \qquad \Rightarrow \qquad \overline{ED} = 1.8m$

$g) \quad \dfrac{\overline{AE}}{\overline{\overline{BE}}} = \dfrac{\overline{\overline{BE}}}{\overline{\overline{ED}}} \qquad por\ propiedad\ de\ los\ \Delta\ rectángulo$

$\overline{BE}^2 = (\overline{AE}).(\overline{ED}) = (3.2m)(1.8m) \qquad \Rightarrow \qquad \overline{BE} = 2.4m$

$h) \quad \overline{OE} = \overline{OD} - \overline{ED} = (2.5m - 1.8m) \qquad \Rightarrow \qquad \overline{OE} = 0.7m$

$i) \quad \dfrac{\overline{OE}}{\overline{\overline{BE}}} = \dfrac{\overline{BE}}{\overline{\overline{EC}}} \qquad \Rightarrow \qquad \overline{EC} = \dfrac{\overline{BE^2}}{\overline{\overline{OE}}} = \dfrac{(2.4m)^2}{0.7m} \qquad \Rightarrow \qquad \overline{EC}$

$= 8.2m$

$\Delta\ EBC\ rectángulo$

$\overline{BC}^2 = \overline{BE}^2 + \overline{EC}^2 \qquad : \qquad \overline{BC}^2 = (2.4m)^2 + (8.2m)^2$

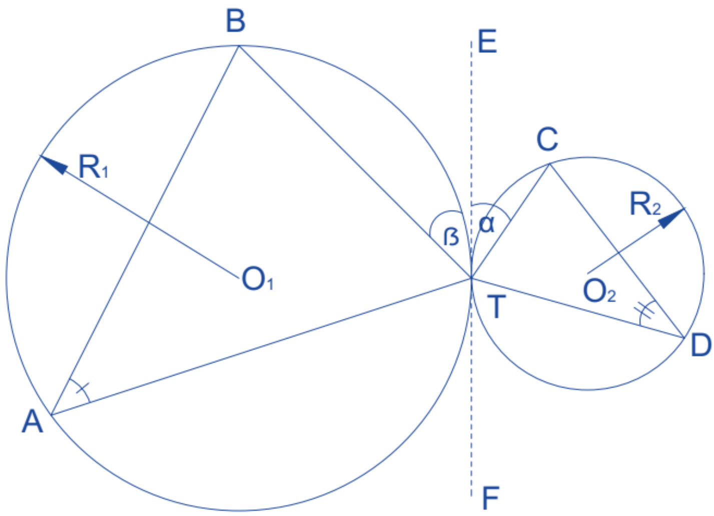
$= 73m^2$

$\boldsymbol{\overline{BC} = 8.54m \quad LQQD}.$

Ejercicio 5.6.

Dada la figura 5.6. Determinar la medida del ángulo $\angle 1$ y $\angle 2$. Sabiendo $1m\angle 2 - 1m\angle 1 = 20\,°$ y la medida del ángulo $\angle BTC = 100\,°$

Figura 5.6



H) $1\text{m}\angle 2 - 1\text{m}\angle 1 = 20°$

$1\text{m}\angle \text{BTC} = 100°$

T) $1\text{m}\angle 1 = ?$

$1\text{m}\angle 2 = ?$

Solución:

$a)\quad \overrightarrow{ETF}\ \ tag\ \Theta(O_1; R)\ \wedge\ (O_2: r)$ $\qquad$ *por construcción*

$b)\quad 1m\angle 1 = \frac{\overset{\frown}{BT}}{2}$ $\qquad$ *por ángulo inscrito*

$c)\quad 1m2 = \dfrac{\overset{\frown}{CT}}{2}$ $\quad$ *por ángulo inscrito*

$d)\quad 1m\angle 2 - 1m\angle 1 = 20°$ $\quad$ *por hipótesis*

(b) *y* (c) *en* (d)

$$\frac{\overset{\frown}{CT}}{2} - \frac{\overset{\frown}{BT}}{2} = 20°$$

$e)\quad \overset{\frown}{CT} - \overset{\frown}{BT} = 40°$

$f)\quad 1m\angle\alpha \quad \wedge \quad 1m\angle\beta$ $\quad$ *por construcción*

$g)\quad 1m\angle\alpha = \dfrac{\overset{\frown}{CT}}{2}$ $\quad$ *por ángulo semi − inscrito*

$h)\quad 1m\angle\beta = \dfrac{\overset{\frown}{BT}}{2}$ $\quad$ *por ángulo semi − inscrito*

$i)\quad 1m\angle\alpha + 1m\angle\beta = \dfrac{\overset{\frown}{CT}}{2} + \dfrac{\overset{\frown}{BT}}{2}$

$j)\quad 1m\angle BTC = \dfrac{\overset{\frown}{CT} + \overset{\frown}{BT}}{2}$

$k)\quad 2(100°) = \overset{\frown}{CT} + \overset{\frown}{BT} = 200°$

(e) = (k)

$$2\overset{\frown}{CT} = 240° \quad \Rightarrow \quad \overset{\frown}{CT} = 120° \quad \wedge \quad \overset{\frown}{BT} = 80°$$

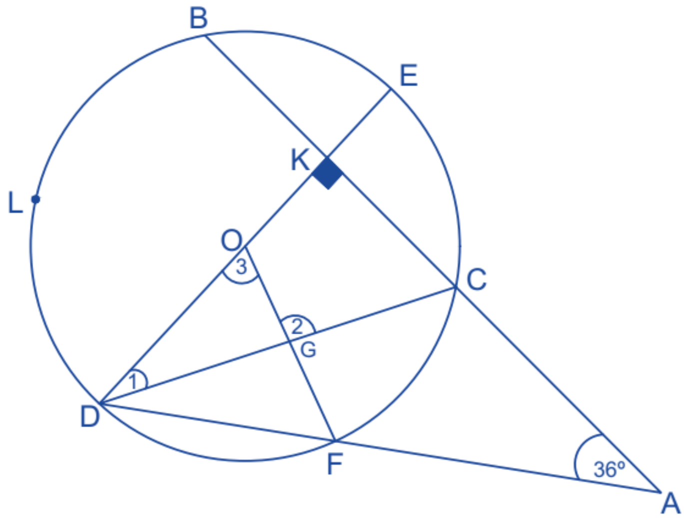
$\boldsymbol{b)}\quad \mathbf{1}\boldsymbol{m}\angle\mathbf{1} = \dfrac{\mathbf{80°}}{\mathbf{2}} \quad \Rightarrow \quad * \quad \mathbf{1}\boldsymbol{m}\angle\mathbf{1} = \mathbf{40°}$ ***LQQD.***

$\boldsymbol{c)}\quad \mathbf{1}\boldsymbol{m}\angle\mathbf{2} = \dfrac{\mathbf{120°}}{\mathbf{2}} \quad \Rightarrow \quad * \quad \mathbf{1}\boldsymbol{m}\angle\mathbf{2} = \mathbf{60°}$ ***LQQD.***

Ejercicio 5.7.

Dada la figura 5.7. Determinar la medida del ángulo $\angle 1$ y $\angle 2$. Conociendo la medida del ángulo $\angle BLD = 128°$

Figura 5.7



$H)\quad 1m\angle BLD = 128°$

$T)\quad 1m\angle 1 = ?$

$\quad\quad 1m\angle 2 = ?$

Solución:

$$a)\quad 1m\angle BAD = \frac{\overset{\frown}{BLD} - \overset{\frown}{CF}}{2} \qquad por\ ángulo\ exterior$$

$$36° = \frac{128° - \overset{\frown}{CF}}{2} \quad \Rightarrow \quad \overset{\frown}{CF} = 56°$$

$b)$ $\quad 1m\angle DKA = 90° = \dfrac{\overset{\frown}{CFD} + \overset{\frown}{BE}}{2}$ $\quad$ *por ángulo int e rior*

$c)$ $\quad \overset{\frown}{CFD} + \overset{\frown}{BE} = 180°$

$d)$ $\quad \overset{\frown}{EC} = 360° - (\overset{\frown}{BLD} + \overset{\frown}{CFD} + \overset{\frown}{BE})$ $\quad$ *por suma de arcos*

$$\overset{\frown}{EC} = 360° - (128° + 180°) \quad \Rightarrow \quad \overset{\frown}{EC} = 52°$$

$e)$ $\quad 1m\angle 1 = \dfrac{\overset{\frown}{EC}}{2}$ $\quad$ *por ángulo inscrito* $\quad$: $\quad$ $1m\angle 1$

$$= \frac{52°}{2} \quad \Rightarrow \quad * \quad 1m\angle 1 = 26° \quad LQQD.$$

Toda perpendicular a una cuerda divide al arco y a la cuerda en partes iguales

$f)$ $\quad \overset{\frown}{BE} = \overset{\frown}{EC} = 52°$

$g)$ $\quad \overset{\frown}{CFD} = 180° + \overset{\frown}{BE} = \overset{\frown}{CF} + \overset{\frown}{FD}$ $\quad$: $\quad$ $\overset{\frown}{FD}$

$$= 180° - (52° + 56°) \quad \Rightarrow \quad \overset{\frown}{FD} = 72°$$

$h)$ $\quad 1m\angle 3 = \overset{\frown}{FD}$ $\quad$ *por ángulo central*

ΔODG

$i)$ $\quad 1m\angle OGC = 1m\angle 2$

$= 1m\angle 1 + 1m\angle 3$ $\quad$ *por teorema de ángulo exterior al triángulo*

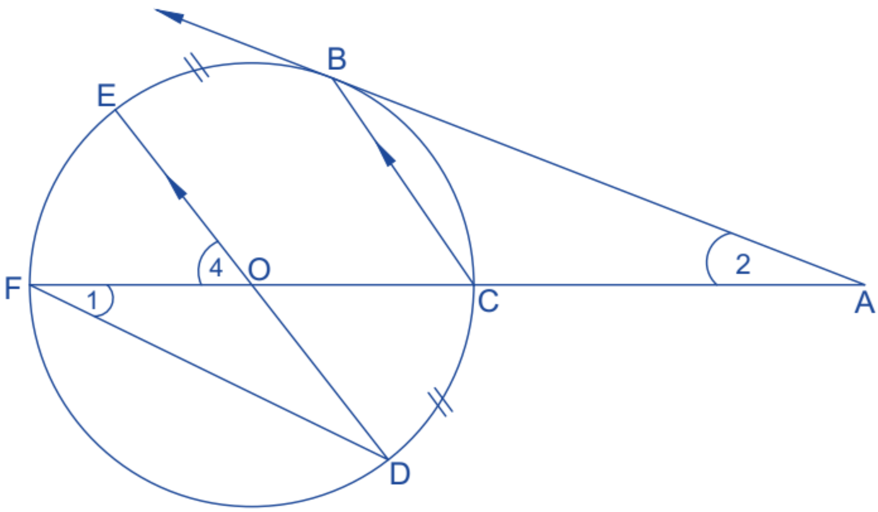
$1m\angle 2 = 72° + 26°$

$\mathbf{1m\angle 2 = 98°} \quad \boldsymbol{LQQD}.$

Ejercicio 5.8.

Dada la figura 5.8. Determinar la medida del ángulo $\angle 1$ y $\angle 2$. Conociendo la medida del ángulo $\angle CBA = 40°$, $\overline{\mathrm{AB}}$ tang. $\Theta(\mathrm{O.R})$ y el segmento $\overline{\mathrm{ED}}$ es paralelo al segmento $\overline{\mathrm{BC}}$.

Figura 5.8



H) $\overline{\mathrm{ED}} \parallel \overline{\mathrm{BC}}$

$\overline{\mathrm{AB}}$ tang. $\Theta(\mathrm{O.R})$

$1\mathrm{m}\angle\mathrm{CBA} = 40°$

T) $1\mathrm{m}\angle 1 =?$

$1\mathrm{m}\angle 2 =?$

Solución:

$a)\quad \overline{ED} \parallel \overline{BC} \quad por\ hipótesis$

$b)\quad \overset{\frown}{EB} = \overset{\frown}{CD}$

$en\ una\ circunferencia\ los\ ar\cos\ \ comprendidos\ entre\ dos\ rectas$
$paralelas\ son\ iguales.$

$c)\quad 1m\angle CBA = 40°$

$$= \frac{\overset{\frown}{BC}}{2} \qquad por\ ángulo\ semi$$

$$-inscrito \qquad : \qquad \overset{\frown}{BC} = 80°$$

$d)\quad \overset{\frown}{EB} + \overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{CD}$

$$= 180° \qquad por\ suma\ de\ ar\cos \qquad : \qquad 2\overset{\frown}{CD} + 80°$$

$$= 180° \qquad \Rightarrow \qquad \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{CD} = 50°$$

$e)\quad 1m\angle EFD = 90° \qquad por\ ángulo\ inscrito\ en\ una\ semi$

$$-circunferencia$$

$f)\quad 1m\angle 4 = 1m\angle EOF = 1m\angle COD \qquad por\ opuestos\ por\ el\ vértice$

$g)\quad 1m\angle 4 = \overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{EF} = 50° \qquad por\ ángulo\ central$

$$h)\quad 1m\angle 1 = \frac{\overset{\frown}{CD}}{2} = \frac{50°}{2} \qquad \Rightarrow \qquad * \quad 1m\angle 1 = 25° \quad LQQD.$$

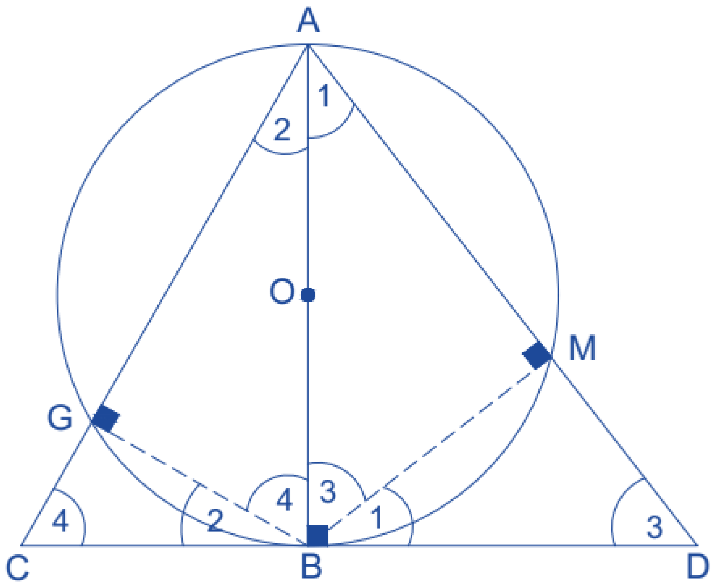
$$\text{i)}\quad 1\text{m}\angle 2 = \frac{\overset{\frown}{\text{EF}} + \overset{\frown}{\text{EB}} - \overset{\frown}{\text{BC}}}{2} = \frac{50° + 50° - 80°}{2}$$

$$\mathbf{1m\angle 2 = 10° \quad LQQD}.$$

Ejercicio 5.9.

Dada la figura 5.9. Determinar $(\overline{AC})(\overline{AG}) = (\overline{AD})(\overline{AM})$.

Figura 5.9



$T)\quad (\overline{AC})(\overline{AG}) = (\overline{AD})(\overline{AM})$

Solución:

$a)\quad \Delta ABD\ rectángulo\ por\ hipótesis$

$b)\quad \overline{BM} = cuerda\ por\ construcción$

$c)\quad 1m\angle AMB = 90\,°\qquad ángulo\ inscrito\ en\ una\ semi$
$\qquad\qquad - circunferencia$

$\Delta ABD\ \approx\ \Delta ABM\qquad rectángulos$

$d) \quad \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AM}} \qquad \Rightarrow \qquad \overline{AB}^2 = \overline{AD}.\overline{AM} \quad (d*)$

$e) \quad \Delta ABC \ rectángulo \ por \ hipótesis$

$f) \quad \overline{BG} = cuerda \ por \ construcción$

$g) \quad 1m\angle AGB = 90° \qquad ángulo \ inscrito \ en \ una \ semi$
$- circunferencia$

$\Delta ABC \approx \Delta AGB \qquad rectángulos$

$h) \quad \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AG}} \qquad \Rightarrow \qquad \overline{AB}^2 = \overline{AC}.\overline{AG} \quad (h*)$

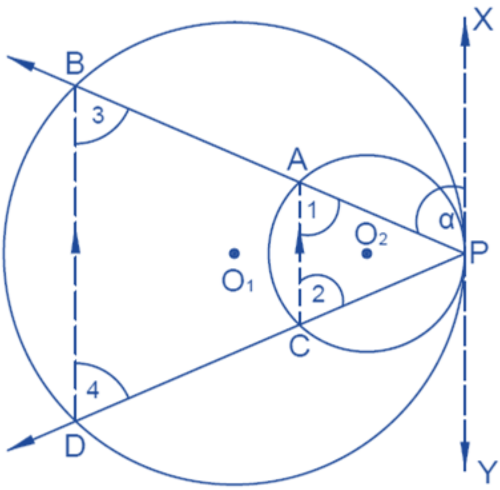
$(d*) = (h*)$

$\boldsymbol{\overline{AD}.\overline{AM} = \overline{AC}.\overline{AG} \quad LQQD}$

Ejercicio 5.10.

Demostrar que $(\overline{PB})(.\overline{PC}) = (\overline{PA})(.\overline{PD})$

Figura 5.10



$T) \quad (\overline{PB})(.\overline{PC}) = (\overline{PA})(.\overline{PD})$

Solución:

$a)\quad \Theta(O_1, R_1)\ \wedge\ \Theta(O_2, R_2)$ *tangentes interiores*   *por hipótesis*

$b)\quad "P"$ *punto de tangencia*   *por hipótesis*

$c)\quad BD\ \wedge\ AC$ *cuerdas auxiliares por construcción*

$d)\quad \overleftrightarrow{XY}$ *tangente por construcción*

$e)\quad 1m\angle\alpha = \dfrac{\overset{\frown}{AP}}{2}$ *por ángulo semi − inscrito* $\Theta(O_1, R_1)$

$f)\quad 1m\angle\alpha = \dfrac{\overset{\frown}{BP}}{2}$ *por ángulo semi − inscrito* $\Theta(O_2, R_2)$

$$(e) = (f)$$

$$\frac{\overset{\frown}{AP}}{2} = \frac{\overset{\frown}{BP}}{2} \quad \Rightarrow \quad \overset{\frown}{AP} = \overset{\frown}{BP}$$

$g)\quad 1m\angle 4 = \dfrac{\overset{\frown}{BP}}{2}$ *por ángulo inscrito* $\Theta(O_2R_2)$

$h)\quad 1m\angle 2 = \dfrac{\overset{\frown}{AP}}{2}$ *por ángulo inscrito* $\Theta(O_1, R_1)$

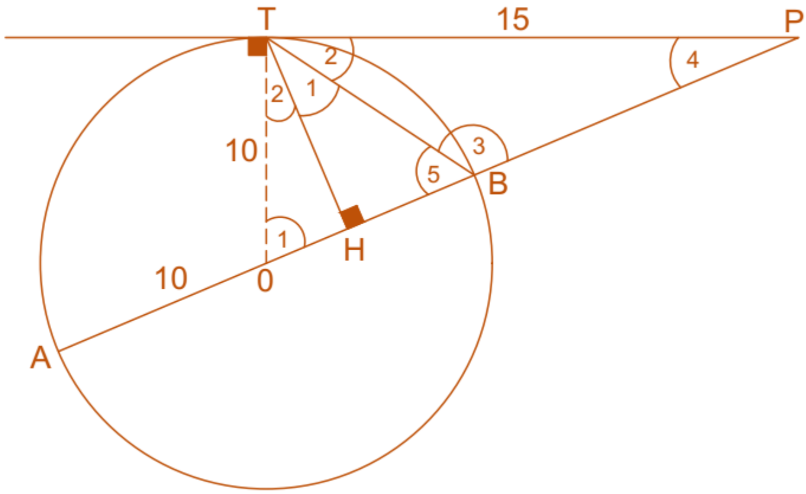
$i)\quad \Delta ACP \approx \Delta BDP \quad \Rightarrow \quad \dfrac{AP}{BP} = \dfrac{CP}{DP}$

$\boldsymbol{AP.DP = CP.BP \quad LQQD.}$

Ejercicio 5.11.

Determinar las medidas de los segmentos TH y TB, sabiendo que el segmento PT es tangente a la circunferencia $\Theta(O,R)$.

Figura 5.11



$H)\quad PT\ \ tang.\ \Theta(O,R)$

$T)\quad TH = ?$

$\quad\ \ TB = ?$

Solución:

$a)\quad OT\ \perp\ PT \qquad por\ teorema$

$b)\quad \Delta OTP\ rectángulo$

$c)\quad 1m\angle 1 = \overset{\frown}{TB} \qquad por\ ángulo\ central$

$d)\quad 1m\angle 2 = \dfrac{\overset{\frown}{TB}}{2} \qquad \Rightarrow \qquad \overset{\frown}{TB} = 2m\angle 2$

$\Delta OTH \approx \Delta OTP$

$e) \quad \overline{OP}^2 = OT^2 + TP^2 \qquad por\ Pitágoras\ en\ el\ \Delta OTP$

$OP = \sqrt{(10u)^2 + (15u)^2}$

$OP = 18.03u$

$f) \quad OP = OB + BP = R + BP = 10u + BP = 18.03u$

$BP = 8.03u$

$\Delta OTP \approx \Delta THP$

$g) \quad \frac{OT}{TH} = \frac{OP}{TP}$

$TH = \frac{OT.TP}{OT} = \frac{(10u)(15u)}{(18.03u)}$

$* \quad TH = 8.3u \quad LQQD.$

ΔOTP

$h) \quad Sen\ \angle 4 = \frac{OT}{OP} = \frac{10u}{(10u + 8.03u)}$

$1m\angle 4 = 33.68°$

ΔTBP

$i) \quad TB^2 = TP^2 + PB^2 - 2(TP)(PB)\cos\angle 4$

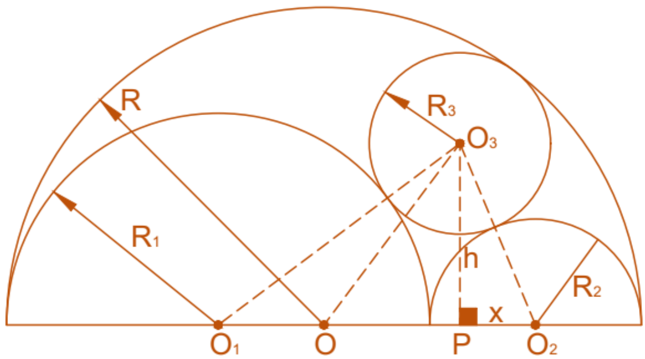
$TB^2 = (15u)^2 + (8.03u)^2 - (2)(10u)(8.03u)\cos 33.68°$

$\boldsymbol{TB = 9.43u \quad LQQD.}$

Ejercicio 5.12.

Dada la figura 5.12. Determinar la medida de R_3. Conociendo $R_1 = 2R_2$ y $R = 10\ u$.

Figura 5.12



$H)\quad R_1 = 2R_2$

$\quad\quad R = 10\ u$

$T)\quad R_3 = ?$

Solución:

$En\ la\ \Theta(O, R)$

$a)\quad 2R = 2R_1 + 2R_2 \qquad \Rightarrow \qquad R = R_1 + R_2$

$b)\quad 2R = 3R_1 \qquad \Rightarrow \qquad R_1 = \dfrac{2R}{3} = \dfrac{(20u)}{3}$

$\quad R_1 = 6.666u$

$c)\quad 2R = 6R_2 \qquad \Rightarrow \qquad R_2 = \dfrac{2R}{6} = \dfrac{(10u)}{3}$

$\quad R_2 = 3.333u$

$d)\quad (R_1 + R_3)^2 = h^2 + (3R_2 - x)^2 \qquad por\ Pitágoras\ en\ el\ \Delta O_1O_3P$

$e)\quad (6.666u)^2 + (2)(6.666)(R_3) + (R_3)^2 = h^2 + 100 - 20x + x^2$

$f)\quad (R_3 + R_2)^2 = h^2 + x^2 \qquad por\ Pitágoras\ en\ el\ \Delta O_3O_2P$

$g)\quad R_3^2 + (2)(3.333)(R_3) + (3.333u) = x^2 + h^2$

$h)\quad (R - R_3)^2 = h^2 + (R - R_2 - x)^2 \qquad por\ Pitágoras\ en\ el\ \Delta O_3QP$

$i)\quad (100u - (2)(10u)(R_3) + R_3^2 = h^2 + (6.666)^2 - (2)(6.666)(x) + x^2$

$(e) - (g)$

$j)\quad 20x + 6{,}666R_3 = 66.666$

$(e) - (h)$

$k)\quad 33.333uR_3 + 6.666x = 111u$

$$x = \frac{111u - 33{,}333R_3}{6{,}666} \qquad (k*)$$

$(g) - (h)$

$l)\quad 13.333u + 13.333R_3 + 44{,}444 = 0$

$(k*)\ en\ (j)$

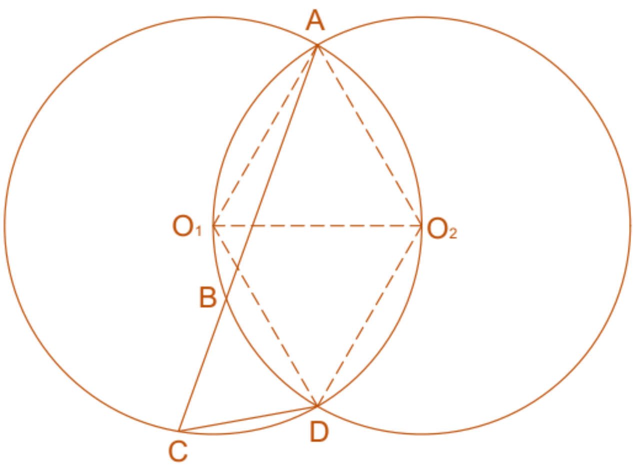
$$m)\quad (20)\left(\frac{111u - 33{,}333R_3}{6{,}666}\right) + 6{,}666R_3 = 66.666$$

$\boldsymbol{R_3 = 2{,}853\ u \quad LQQD}.$

Ejercicio 5.13.

Dada la figura 5.13. Demostrar que ΔCDB es equilátero.

Figura 5.13



$T)\quad \Delta CDB\ equilátero$

Solución:

$a)\quad \Theta(O_1,R) \ \wedge \ \Theta(O_2,R)\ son\ iguales\ por\ hipótesis$

$b)\quad AO_2{:}\,O_2B{:}\,BO_1\quad cuerdas\ auxiliares\ por\ construcción$

$c)\quad AO_1 = O_1D = DO_2 = O_2A = R$

$d)\quad \Delta AO_1O_2\ :\ \Delta O_1DO_2\qquad son\ equiláteros\ por\ construcción$

$\Theta(O_2,R)$

$$e)\quad 1m\angle AO_1D = 1m\angle ABD = \frac{\overset{\frown}{AKD}}{2} = \frac{\overset{\frown}{AKD}}{2} = \frac{240°}{2}$$

$$= 120°\qquad por\ ángulo\ inscrito$$

$f)\quad \overset{\frown}{AO_2D} = 120°$

$\Theta(O_1,R)$

$$g)\quad 1m\angle ACD = \frac{\overset{\frown}{AO_2D}}{2} = \frac{120°}{2}\qquad \Rightarrow\qquad 1m\angle ACD = 60°\quad (g\,*)$$

ΔCDB

$h)\quad 1m\angle ABD = 1m\angle BCD$

$+\ 1m\angle BDC\qquad por\ teorema\ de\ ángulo\ exterior\ al\ \Delta$

$i)\quad 1m\angle ABD - 1m\angle BCD = 1m\angle BDC$

$1m\angle BDC = 120° - 60°\qquad \Rightarrow\qquad 1m\angle BDC = 60°\qquad (i\,*)$

$j)\quad 1m\angle CBD + 1m\angle BCD + 1m\angle BDC$

$= 2\angle R\qquad teorema\ fundamental\ del\ \Delta$

$k)\quad 1m\angle CBD = 180° - 60° - 60°\qquad \Rightarrow\qquad 1m\angle CBD$

$= 60°\qquad (k\,*)$

$(k\,*) = (i\,*) = (g\,*)$

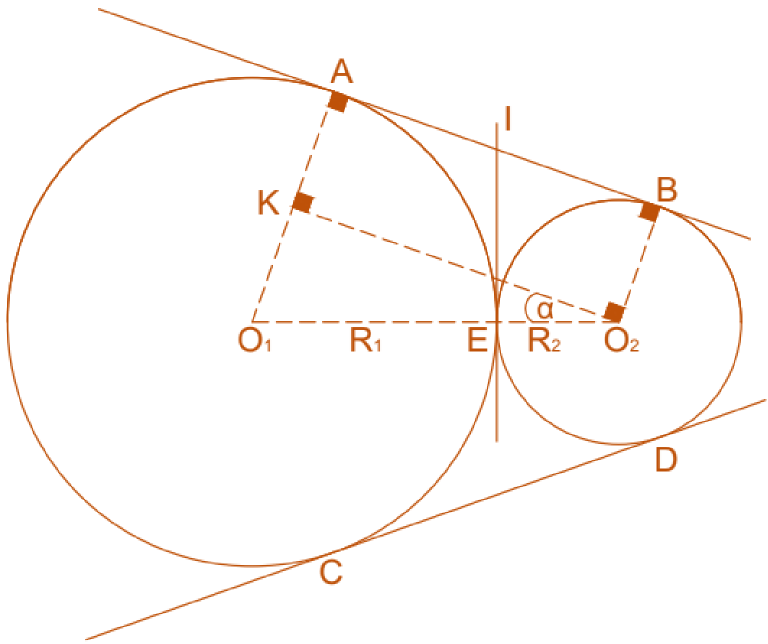
$l)\quad 1m\angle CBD = 1m\angle BCD = 1m\angle BDC = 60°$

$\boldsymbol{\Delta CDB\ es\ equilátero\quad LQQD}.$

Ejercicio 5.14.

Con relación a la figura 5.14. Determine $\overset{\frown}{EB}$. Conociendo $R_1 = 2R_2$, $\overleftrightarrow{CD}, \overleftrightarrow{AB} y\ EI$ son tangentes comunes.

Figura 5.14



$H)$ $\quad R_1 = 2R_2$

$\quad \overleftrightarrow{CD} \;\; ; \;\; \overleftrightarrow{AB} \quad tangentes\ comunes$

$\quad \overline{EI} \quad tangente\ común$

$T)$ $\quad \overset{\frown}{EB} = ?$

Solución:

$a)\quad AO_1 \perp AB \quad por \quad construcción$

$b)\quad AO_2 \perp AB \quad por \quad construcción$

$AO_1 II\ BO_2$

$\Delta O_1KO_2 \quad rectángulo\ por \quad construcción$

$c)\quad AO_1 = AK + KO_1 \quad suma\ de\ segmentos$

$O_1k = R_1 - R_2$

$d)\quad 1m\angle EO_2K = 1m\angle\alpha$

$$e)\quad Sen\angle\alpha = \frac{KO_1}{O_1O_2} = \frac{R_1 - R_2}{R_1 + R_2} = \frac{2R_2 - R_2}{2R_2 + R_2} = \frac{1}{3}$$

$d)\quad 1m\angle\alpha = 19.47°$

$\Theta(O_2, R_2)$

$e)\quad 1m\angle EO_2B = 1m\angle\alpha + 1\angle R = 19.47° + 90°$

$1m\angle EO_2B = 109.47° \quad ángulo\ central$

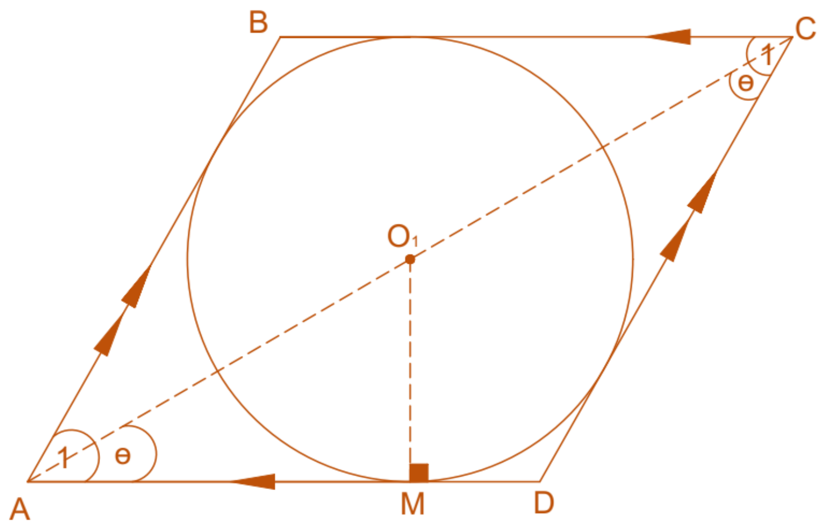
$f)\quad 1m\angle EO_2B = \overset{\frown}{EB} \quad por\ definición$

$\boldsymbol{\overset{\frown}{EB} = 109.47°} \quad \boldsymbol{LQQD}.$

Ejercicio 5.15.

Determine la medida de R_1 en función de a. Sabiendo que $AB = BC = CD = AD = a$ y la medida del ángulo $\angle BAD = 53°$.

Figura 5.15



$H)\quad AB = BC = CD = AD = a$

$1m\angle BAD = 53°$

$T)\quad R_1 = ?\ f(a)$

Solución:

$ABCD\quad romboide\ por\ hipótesis\ gráfica$

$a)\quad 1m\angle BAD = 1m\angle BCD = 1m\angle 1 = 53°\quad por\ hipótesis$

$b)\quad AC\ bi\sec t riz\ del\ \angle BAC$

$c)\quad 1m\angle 1 = 2m\angle\theta \qquad \Rightarrow \qquad 1m\angle\theta = 26.5°$

ΔACD

$d)\quad 1m\angle ADC = 180° - 2m\angle\theta \qquad \Rightarrow \qquad 1m\angle ADC = 127°$

$e)\quad AC^2 = AD^2 + DC^2$

$- (2)(AD)(DC)\cos\angle ADC \qquad ley\ del\ \cos e\, no$

$AC^2 = (a)^2 + (a)^2 - (2)(a)(a)\cos 127° \qquad \Rightarrow \qquad AC$

$= 1.79a$

$AC = 2AO = 2OC = 1.79a$

$AO = OC = 0.895a$

$f)\quad OM = R_1$

$R_1 \perp AD \quad propiedad\ de\ la\ tangente\ con\ respecto\ al\ radio$

$\Delta AOM\ rectángulo\ por\ construcción$

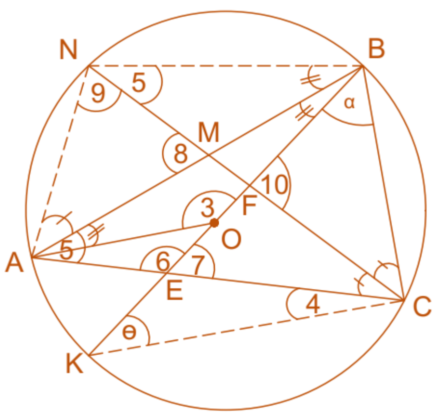
$g)\quad Sen\ \angle\theta = \dfrac{R_1}{OM} \qquad \Rightarrow \qquad R_1 = (Sen\ 26.5°)(0.895a)$

$\boldsymbol{R_1 = 0.4a} \qquad \boldsymbol{LQQD}.$

Ejercicio 5.16.

Determinar la medida de los segmentos AE, MB, EB, MF y MN. Sabiendo que R= 5u, BC= 6 u y AB = 9 u.

Figura 5.16



$H) \quad R = 5u$

$BC = 6u$

$AB = 9u$

$T) \quad AE = ?$

$MB = ?$

$EB = ?$

$MF = ?$

$MN = ?$

Solución:

$a) \quad KC \quad por\ construcción$

$b) \quad \Delta KBC \quad rectángulo$

$KC^2 = KB^2 - BC^2$

$KC^2 = (10u)^2 - (6u)^2 \qquad \Rightarrow \qquad KC = 8u$

$Sen\ \angle\vartheta = \dfrac{6u}{10u} \qquad \Rightarrow \qquad 1m\angle\vartheta = 1m\angle BAC = 1m\angle 5 = 36.87°$

$1m\angle\alpha = 90° - 36.87° \qquad \Rightarrow \qquad 1m\angle\alpha = 53.13°$

$c) \quad \Theta(o, R)$

$1m\angle\alpha = \dfrac{\overset{\frown}{KC}}{2} = \qquad por\ ángulo\ inscrito \qquad : \qquad \overset{\frown}{KC}$

$= 106.26°$

$d) \quad \Delta AOB \quad isósceles$

$Cos\ \angle 2 = \dfrac{OA^2 + AB^2 - OB^2}{(2)(OA)(AB)} = \dfrac{(9u)^2}{(2)(5u)(9u)}$

$1m\angle 2 = 1m\angle ACK = 1m\angle 4 = 25.84°$

$1m\angle 3 = 180° - 2m\angle 2$

$= 180° - 2(25.84°) \qquad : \qquad 1m\angle 3 = 128.32°$

$$1m\angle 3 = \overset{\frown}{ANB} = 2\overset{\frown}{AN} = 2\overset{\frown}{NB} = 128.32° \qquad \textit{por ángulo central}$$

$$1m\angle 1 = \frac{\overset{\frown}{AN}}{2} = \frac{\overset{\frown}{NB}}{2} = \frac{64.16°}{2} \qquad : \qquad 1m\angle 1 = 32.08°$$

$e)$ ΔABE

$$1m\angle 6 = 180° - 1m\angle 5 - 1m\angle 2$$

$$= 180° - 36.87° - 25.84° \qquad : \qquad 1m\angle 6$$

$$= 117.29° \qquad : \qquad 1m\angle 7 = 62.71°$$

$$\frac{Sen\ \angle 6}{AB} = \frac{Sen\angle\ 2}{AE} \qquad \Rightarrow \qquad AE = \frac{(Sen\ 25.84°)(9u)}{Sen\ 117.29°}$$

$\boldsymbol{AE = 4.41u \quad LQQD.}$

$f)$ ΔEBC

$$\frac{Sen\ \angle ACB}{EB} = \frac{Sen\angle\ 7}{BC} \qquad \Rightarrow \qquad EB = \frac{(Sen\ 64.16°)(6u)}{Sen\ 62.71°}$$

$\boldsymbol{EB = 6.1u \quad LQQD.}$

$g)$ ΔMBC

$$1m\angle 8 = 180° - 1m\angle 2 - 1m\angle\alpha - 1m\angle$$

$$= 180° - 25.84° - 53.13° - 32.08° \qquad : \qquad 1m\angle 8$$

$$= 68.95°$$

$$\frac{Sen\ \angle 8}{BC} = \frac{Sen\angle\ 1}{MB} \qquad \Rightarrow \qquad MB = \frac{(Sen\ 32.08°)(6u)}{Sen\ 68.95°}$$

$\boldsymbol{MB = 3.41u \quad LQQD.}$

$h)$ $AB = AM + MB \qquad : \qquad AM = 9u - 3.41u = 5.58u$

ΔANM

$i)$ $1m\angle 9 = 180° - 1m\angle 1 - 1m\angle 8$

$$= 180° - 32.08° - 68.95° \qquad : \qquad 1m\angle 9 = 78.97°$$

$$\frac{Sen\ \angle 1}{NM} = \frac{Sen\angle\ 9}{AM} \qquad \Rightarrow \qquad NM = \frac{(Sen\ 32.08°)(5.58u)}{Sen\ 78.97°}$$

$\boldsymbol{NM = 3.02u}$

$j)\quad \Delta FBC$

$$1m\angle 10 = 180° - 1m\angle \alpha - 1m\angle 1 = 180° - 53.13° - 32.08°$$

$$\mathbf{1m\angle 10 = 94.79°}$$

$$\frac{Sen\ \angle 10}{BC} = \frac{Sen\angle \alpha}{FB} \qquad \Rightarrow \qquad FB = \frac{(Sen\ 53.13°)(6u)}{Sen\ 94.79°}$$

$$\boldsymbol{FB = 4.82u}$$

$k)\quad \Delta NFB$

$$\frac{Sen\ \angle 5}{FB} = \frac{Sen\angle NBF}{NF} \qquad \Rightarrow \qquad NF$$

$$= \frac{(Sen\ (32.08° + 25.84°)) = (5.58u)}{Sen\ 36.87°}$$

$$\Rightarrow \qquad NF = 6.81u$$

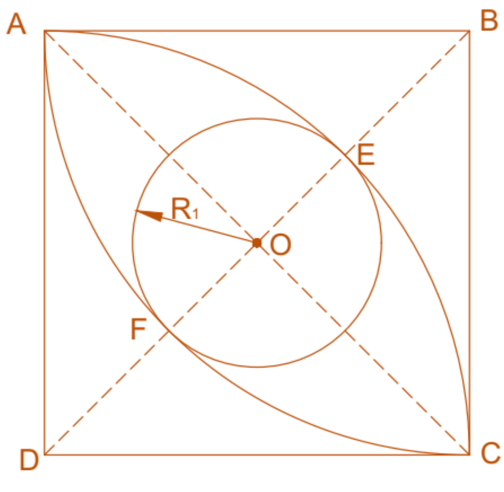
$$MF = NM - NM = 6.81u - 3.02$$

$$\boldsymbol{MF = 3.8u \quad LQQD}.$$

Ejercicio 5.17.

Hallar la medida de R_1 en función de a. Sabiendo $AB = BC = CD = AD = a$.

Figura 5.17



$H)\quad AB = BC = CD = AD = a$

$T)\quad R_1 = ?$

Solución:

$a)\quad ABCD \quad cuadrado \quad por\ hipótesis$

$b)\quad \Delta ABD\ rectángulo$

$DB^2 = AD^2 + AB^2 \quad por\ pitágoras$

$DB^2 = a^2 + a^2 = 2a^2 \qquad : \qquad DB = 1.41a$

$c)\quad BA = BF = AD = a$

$DB = DF + BF \qquad por\ suma\ de\ segmentos$

$d)\quad DF = DB - BF = 1.41a - a \qquad \Rightarrow \qquad DF = 0.41a$

$e)\quad DE = EB = 0.41a \qquad por\ simetría$

$f)\quad DB = 2DF + FE$

$FE = DB - 2DF = 1.41a - 2(0.41a) \qquad \Rightarrow \qquad FE = 0.59a$

$g)\quad FE = 2R_1$

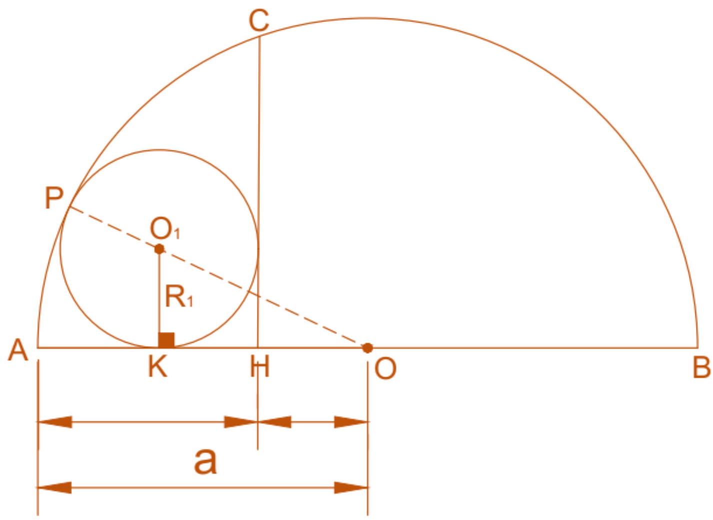
$$R_1 = \frac{0.59a}{2}$$

$\boldsymbol{R_1 = 0.29a \quad LQQD}.$

Ejercicio 5.18.

Hallar la medida de R_1 en función de a. Sabiendo $\mathrm{AO} = \mathrm{OB} = \mathrm{a}$ y $\mathrm{AH} = 2\mathrm{HO}$

Figura 5.18



$H)\quad AO = OB = a$

$\quad AH = 2HO$

$T)\quad R_1 = ?$

Solución:

$a)\quad \Delta O_1KO \quad rectángulo\ por\ construcción$

$\quad O_1O^2 = O_1K^2 + KO^2 \quad por\ pitágoras$

$\quad (R - R_1)^2 = R_1^2 + (R_1 + HO)^2$

$\quad a = 3HO = PO = R$

$\quad HO = \dfrac{a}{3}$

$$(a - R_1)^2 = R_1^2 + \left(R_1 + \frac{a}{3}\right)^2$$

$$(9)(a - R_1)^2 = R_1^2 + (3R_1 + a)^2$$

$b)$ $$(9)(a^2 - 2aR_1 + R_1^2) = 9R_1^2 + 9R_1^2 + 6aR_1 + a^2$$

$$9a^2 - 18aR_1 + 9R_1^2 = 18R_1^2 + 6aR_1 + a^2$$

$$9R_1^2 + 24aR_1 - 8a^2 = 0$$

$$R_1 = \frac{-24a \pm \sqrt{(24a)^2 - (4)(9)(-8a^2)}}{(2)(9)} = \frac{-24a \pm \sqrt{576a^2 + 288a^2}}{(18)}$$

$$= \frac{-24a \pm \sqrt{864a^2}}{18} = \frac{-24a \pm 29.4a}{18}$$

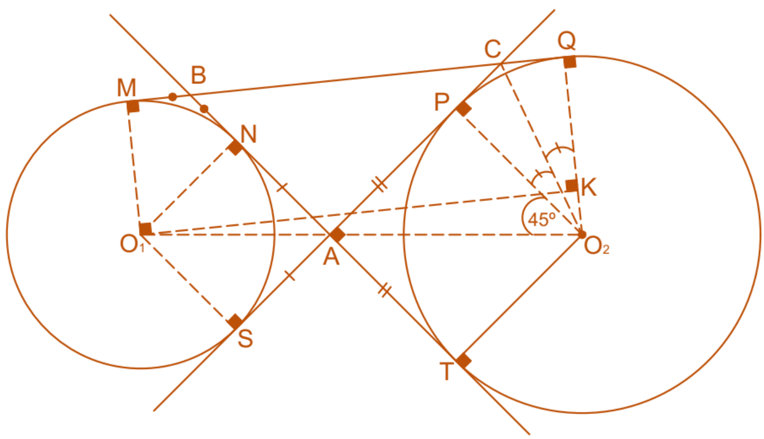
$$R_1 = \frac{-24a + 29.4a}{18}$$

$$\boldsymbol{R_1 = 0.3a \quad LQQD.}$$

Ejercicio 5.19.

Dada la figura 5.19. Determinar la medida del segmento BC. Sabiendo que $MQ,\ BT,\ CS$ son tangentes comunes, $R_2 = 8u$ y $R_1 = 6u$

Figura 5.19



$H)$ $MQ,\ BT,\ CS$ $Tangentes\ comunes$

$R_2 = 8u$

$R_1 = 6u$

$T)$ $BC = ?$

Solución:

$\Theta(O_1, R_1)$

$a)$ $CS = CM$ $:$ BM

$= BN$ $por\ la\ propiedad\ de\ las\ tangentes\ exteriores\ a\ una\ circunferencia$

$b)$ $O_1M \perp MC$ $\therefore$ $R_1 \perp MC$ $por\ teorema$

$c)$ $O_1S \perp SC$ $\therefore$ $R_1 \perp SC$

$El\ cuadrilátero\ O_1NAS\ es\ un\ cuadrado\ por\ lo\ tanto:$ R

$= O_1N = NA = AS = O_1S = 6\,unidades$

$\Theta(O_2, R_2)$

$d)$ $O_2P \perp AC$ $\therefore$ $R_2 \perp AC$ $por\ teorema$

$e)$ $O_2T \perp AT$ $\therefore$ $R_2 \perp AT$

$f)$ $O_1K = MQ$ $por\ construcción$

$g)$ ΔO_1NA $rectángulo$ $\therefore$ $O_1A = \sqrt{(O_1N)^2 + (NA)^2}$

$= \sqrt{(6u)^2 + (6u)^2}$ $\Rightarrow$ $O_1A = 8.48u$

ΔAO_2T $rectángulo$ $\therefore$ $O_2A = \sqrt{(O_2A)^2 + (PO_2)^2}$

$= \sqrt{(8u)^2 + (8u)^2}$ $\Rightarrow$ $O_2A = 11.31u$

ΔO_1O_2K $rectángulo\ por\ construcción$

$i)$ $O_1O_2 = O_1A + O_2A = 8.48u + 11.31u$ $\therefore$ $O_1O_2 = 19.79u$

$j)$ $BQ = BT$

$BC + CQ = BA + AT$ $:$ $BC + CQ$

$= BN + NA + AT$ $:$ $BC + CQ = MB + 6u + 8u$

$k) \quad BC + CQ - MB = 14$

$l) \quad SC = CM$

$SA + AP + PC = SC \qquad : \qquad 6u + 8u + PC = MB + BC$

$m) \quad MB + BC - PC = 14$

$(k) = (m)$

$BC + CQ - MB = MB + BC - PC \qquad \therefore \qquad MB = PC = CQ$

$= 19.69u$

$\Delta O_1O_2k \quad rectángulo\ por\ construcción$

$$Sen\ \angle O_1O_2k = \frac{O_1k}{O_1O_2} = \frac{19.69}{19.79} \qquad \therefore \qquad m\angle O_1O_2k = 84.23°$$

$n) \quad En\ el\ trapezoide\ simètrico\ PCQO_2$

$$1m\angle 1 = \frac{1m\angle O_1O_2k - 1m\angle O_1O_2P}{2} = \frac{84.23° - 45°}{2}$$

$\Rightarrow \qquad 1m\angle 1 = 19.62°$

$\Delta PCO_2\ rectángulo\ por\ construcción$

$$o) \quad tag\ 19.62° = \frac{PC}{PO_2} \qquad \therefore \qquad PC = (tag.\ 19.62°)(8u)$$

$\Rightarrow \qquad PC = 2.85u$

$p) \quad MQ = MB + BC + CQ \qquad \therefore \qquad BC = MQ - MB - CQ$

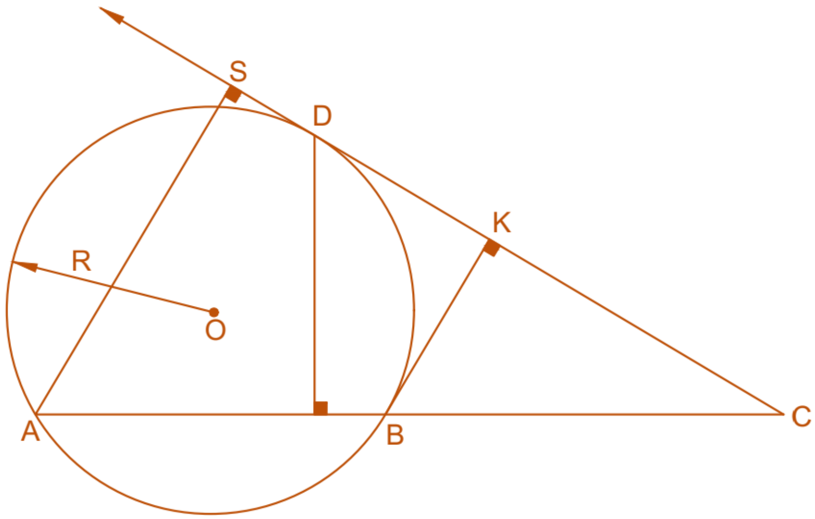
$BC = 19.69 - 2.85 - 2.85$

$\boldsymbol{BC = 14u \quad LQQD}.$

Ejercicio 5.20.

Determinar la mediad del segmento HD. Conociendo que la recta CS es tangente a la circunferencia (O, R), $AB = 12.5u$, $AS = 13.5u$, y $BK = 6u$.

Figura 5.20



$H)$ CS $tangente$ $\Theta(O, R)$

$AB = 12.5u$

$AS = 13.5u$

$BK = 6u$

$T)$ $HD = ?$

Solución:

$AS\ II\ BK$ $por\ hipótesis$

$\Delta ASC \approx \Delta BKC$ $rectángulos$

$a)\quad \frac{AS}{BK}=\frac{AC}{BC}=\frac{SC}{KC} \qquad \therefore \qquad \frac{AS}{BK}=\frac{AC}{BC} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{13.5u}{6u}$

$=\frac{AC}{BC}$

$BC=\frac{6u}{13.5u}.AC \qquad \therefore \qquad BC=0.44(AB+BC)$

$=0.44(12.5)+0.44BC) \qquad \Rightarrow \qquad BC=5.55+0.44BC$

$b)\quad BC=9.9u$

$c)\quad \Delta DHC\approx\Delta BKC$

$\frac{DH}{BK}=\frac{DC}{BC}=\frac{HC}{KC} \qquad \therefore \qquad \frac{DH}{BK}=\frac{DC}{BC}$

$d)\quad DH=(BK)\frac{DC}{BC}$

$e)\quad AC=AB+BC \qquad por\ suma\ de\ segmentos$

$AC=12.5u+9.9u \qquad \therefore \qquad AC=22.41u$

$f)\quad DC^2$

$=(AC)(BC) \qquad relación\ métrica\ de\ la\ sec\,a nte\ y\ la\ tangente$

$DC^2=(22.41u)(9.9u) \qquad \Rightarrow \qquad DC=14.89u$

$d)\quad DH=(6u)\frac{(14.89u)}{(9.9u)}$

$\boldsymbol{DH=9u \quad LQQD}.$

CAPÍTULO 6

Áreas de regiones rayadas

Capítulo 6
Áreas de regiones rayadas

6

"Las matemáticas comenzaron a ser una ciencia
cuando alguien, probablemente un griego,
enunció proposiciones acerca de cualquier cosa
o de alguna cosa sin especificar ninguna particularidad.
Los griegos fueron los primeros en aplicar
proposiciones a la geometría; por ello,
la geometría fue la gran ciencia matemática en Grecia."

— Alfred North Whitehead

Objetivo

Definir, interpretar y aplicar las proposiciones correspondientes que permitan que el lector analice casos de figuras que no tienen un perfil geométrico básico, que sea capaz de aplicar su criterio lógico con la ayuda del álgebra y a trigonometría, para resolver problemas donde se presenten figuras geométricas planas.

Logros de aprendizaje

El lector estará en capacidad de:

- Utilizar los conceptos, teoremas, postulados y propiedades de las figuras geométricas para calcular áreas de regiones rayadas.

- Enunciar y desarrollar las fórmulas para encontrar el área de las regiones rayadas.

6.1 Introducción teórica

Superficie. - Es la extensión en que se consideran dos dimensiones que son longitud y latitud. La superficie se refiere a la “forma”

Área. - Es la medida de una superficie, el área se refiere al “tamaño”.

Área de un rectángulo. - El área de un rectángulo es igual al producto de su base por su altura.

Área de un cuadrado. - El área del cuadrado es igual al lado al cuadrado o a la mitad del cuadrado de su diagonal.

Área del romboide. - El área del romboide es igual al producto de su base por su altura.

Área de un triángulo. - El área de un triángulo es igual a la mitad del producto de su base por su altura.

Área de un triángulo cualquiera en función de sus lados. - El área de un triángulo en términos de sus lados "a”, "b", "c”, está dada por el teorema de Herón “El área de todo triángulo es igual a la raíz cuadrada del producto del semiperímetro y su diferencia con cada lado”.

Área de un triángulo a través de una expresión trigonométrica. - En todo triángulo, el área se puede expresar como el semiproducto de dos lados, por el seno del ángulo comprendido.

Área de un triángulo equilátero en función de su lado. - El área de un triángulo es igual al lado al cuadrado por la raíz cuadrada de tres dividida para cuatro.

Área del triángulo en función de sus lados y del radio de la circunferencia inscrita. - El área de un triángulo es igual al producto de su semi - perímetro por el radio de la circunferencia inscrita.

Área de un triángulo en función de sus lados y del radio de la circunferencia circunscrita. - El área de un triángulo es igual al producto de sus lados divididos por el cuádruplo del radio de la circunferencia circunscrita.

Área de un triángulo en función del ángulo comprendido. - El área de un triángulo cualquiera es igual al semiproducto de dos lados por el seno del ángulo comprendido.

Área del rombo. - El área del rombo es igual al semi - producto de sus diagonales.

Área de un trapezoide. - Es igual al producto de una diagonal por la semi - suma de las perpendiculares trazadas a esta desde los otros dos vértices.

Área del trapecio. - El área del trapecio es igual a la semi - suma de sus bases multiplicada por su altura.

Área de un cuadrilátero. - El área de un cuadrilátero es igual al semiproducto de sus diagonales por el seno del ángulo comprendido entre ellos.

Área de un polígono regular. - El área de un polígono regular es igual al producto de su semi - perímetro por su altura (apotema).

Área de un polígono cualquiera. - Es igual a la suma de las áreas de los triángulos parciales en los que se puede descomponer el polígono.

Área de un círculo. - El área de un círculo es igual al producto de π por el cuadrado del radio. La longitud de una circunferencia es igual al doble de π multiplicado por el radio.

Área de un sector circular. - El área de un sector circular (OMNO) es igual al semi - producto de la longitud de su arco por el radio. Un sector circular de 1º de amplitud tendrá un área 360 veces menor, es decir, por ser "n" veces mayor que el área de un sector circular de 1º de amplitud.

Área del segmento circular. - El área de segmento circular es igual al área del sector circular que abarca el mismo arco menos el área del triángulo formado por los radios que lo delimitan y la cuerda correspondiente.

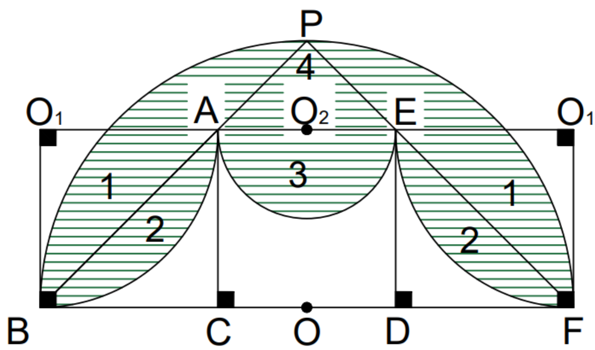
Área de la corona circular. - El área de una corona circular de radios R, r es igual al producto de π por la diferencia de los cuadrados de dichos radios.

6.2 Ejercicios resueltos de área de regiones rayadas

Ejercicio 6.1.

Determine el área de la región rayada de la figura 6.1.

Figura 6.1



$H)$ $\quad O_1BAC \rightarrow cuadrado$

$\quad AECD \rightarrow \quad cuadrado$

$EO_1DF \rightarrow cuadrado$

$\overline{O_1B} = 8m$

$T) \quad A_{iiiii} =?$

Solución:

$\overline{BP} \wedge \overline{PF} \qquad cuerdas \ \ por \ \ construcción$

$\overline{OB} = \overline{OF} = radio \ de \ la \otimes (O, R) = 12m = R$

$a) \quad \overline{O_1A} = \overline{O_1E} = R_1 = 8m$

$b) \quad \overline{O_2A} = \overline{O_2E} = R_2 = 4m$

$c) \quad A_{iiiiii} = 2A_1 + 2A_2 + Area \frac{\otimes}{2}(O_2, R_2) + Área \ \ \Delta \ APE$

$d) \quad A_1 = 0.5R^2\left(\frac{(\pi)(1m\angle POB)}{180^0} - Seno \ \angle POB\right)$

$A_1 = 0.5R^2(1.57 - 1) \qquad \Rightarrow \qquad A_1 = 0.285R^2$

$= (0.285)(12m)^2$

$e) \qquad A_1 = 41.09m^2$

$f) \quad A_2 = 0.5R_1^2\left(\frac{(\pi)(1m\angle AO_1B)}{180^0} - Sen. \angle AO_1B\right)$

$A_2 = 0.5(8m)^2(1.57 - 1) \qquad \Rightarrow \qquad A_2$

$= 18.24m^2 \quad (f *)$

$g) \quad A_3 = \pi \ \frac{R_2^2}{2} \qquad \Rightarrow \qquad A_3 = 25.13m^2 \quad (g *)$

$h) \quad A_4 = \frac{\overline{(AE)}\overline{(O_2P)}}{2} = \frac{(8m)(4m)}{2} \qquad \Rightarrow \qquad A_4 = 16m^2 \quad (h)$

$(e), (f *), (g *), (h) \ en \ (c)$

$A_{iii} = 2(41.09m^2) + 2(18.24m^2) + 25.13m^2 + 16m^2$

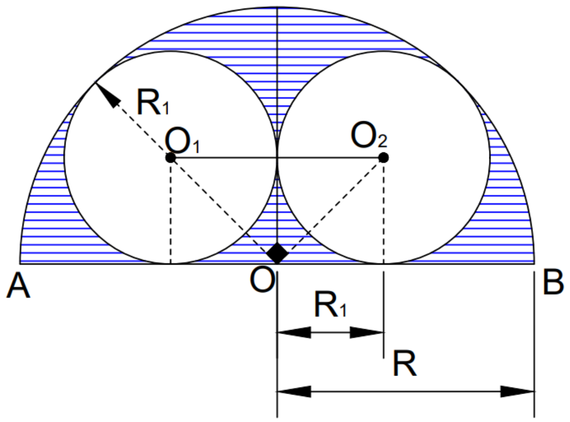
$A_{iii} = (82.18 + 36.48 + 25.13 + 16)m^2$

$\boldsymbol{A_{iii} = 159.79m^2 \quad LQQD}.$

Ejercicio 6.2.

Calcular el área de la región rayada de la figura 6.2.

Figura 6.2



$H)\quad \overline{AO} = R$

$T)\quad A_{iiiii} =? \quad f(R)$

Solución:

$a)\quad \overline{O_1P} = R_1 \rightarrow por\ construcción.$

$b)\quad \overline{OC} = R \quad \rightarrow por\ construcción$

$\Delta\ O_1OO_2\ rectángulo$

$c)\quad \overline{O_1O_2}^2 = \overline{O_1O}^2 + \overline{O_2O}^2 \quad por\ Pitágoras \qquad \overline{O_1O} = \overline{O_2O} = x$

$(2R_1)^2 = x^2 + x^2 \qquad \Rightarrow \qquad 4R_1^2 = 2x^2$

$x = R_1\sqrt{2} \qquad \Rightarrow \qquad x = 1.414R_1$

$d)\quad R = R_1 + x = R_1 + 1.414R_1 \qquad \Rightarrow \qquad R = 2.414R_1$

$R_1 = 0.4142R$

$$e) \quad A_{iiiiii} = \frac{A \otimes (O, R_1)}{2} - 2A \otimes (O_1, R_2)$$

$$f) \quad A_{iiii} = \frac{(\pi)R^2}{2} - (2)(\pi)(R_1^2)$$

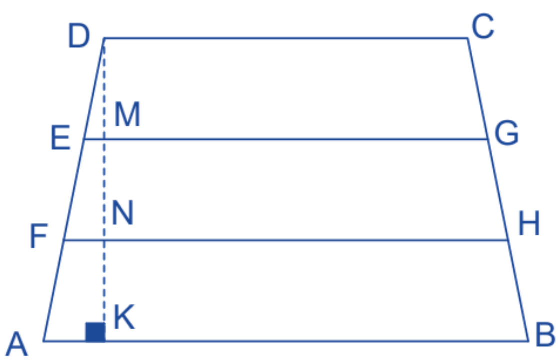
$$A_{iiii} = \frac{(\pi)R^2}{2} - (2)(\pi)(04142R)^2 = R^2\left(\frac{\pi}{2} - (2\pi)(0.1716)\right)$$

$$\boldsymbol{A_{iiiii} = 0.4918R^2 \quad LQQD}.$$

Ejercicio 6.3.

Las bases de un trapecio miden 8m y 6m y su altura 5m, se trazan dos paralelas a las bases que dividen en tres partes iguales a los otros dos lados. Calcular las áreas de los tres trapecios parciales que se forman.

Figura 6.3



$H) \quad AB = 8m$

$DC = 6m$

$DK = 5m$

Solución:

$a)\quad EG \parallel DC \ \parallel AB \parallel FH \qquad por\ hipótesis$

$b)\quad DE = EF = FA \qquad por\ teorema\ de\ Thales$

$c)\quad \overline{CG} = \overline{GH} = \overline{AD} \qquad por\ teorema\ de\ Thales$

$d)\quad \overline{DM} = \overline{MN} = \overline{NK} \quad " \qquad " \qquad " \qquad "$

$TRAPECIO \quad DFHC$

$f)\quad E\ punto\ medio\ de\ \overline{FD}$

$G \qquad\qquad\qquad \overline{\mathrm{HC}}$

$g)\quad EG =\ mediana\ del\ trapecioDFHC$

$h)\quad EG = \dfrac{FH + DC}{2} \qquad por\ definición\ de\ mediana\ del\ trapecio$

$TRAPECIO \quad EGAD$

$i)\quad F = punto\ medio\ de\ EA \qquad : \qquad H = punto\ medio\ de\ GB$

$j)\quad FH = mediana\ del\ trapecio\ EGBA$

$k)\quad FH = \dfrac{AB + EG}{2}$

$(h)\ en\ (l)$

$l)\quad FH = \dfrac{AB}{2} + \dfrac{FH + DC}{4} = \dfrac{8m}{2} + \dfrac{\overline{FH}}{4} + \dfrac{6m}{4} \qquad \Rightarrow \qquad FH$

$= 7.33m \quad (m*)$

$(m*)\ en\ (h)$

$m)\quad EG = \dfrac{(7.33 + 6)m}{2} \qquad EG = 6.66m$

$\boldsymbol{ÁREA\ DEL\ TRAPECIO \quad ADCB}$

$n)\quad A_1 = \dfrac{(AB + DC)}{2} * DK = \dfrac{(8m + 6m)}{2} * 5m$

$\boldsymbol{A_1 = 35m^2 \quad LQQD}$

$\boldsymbol{ÁREA\ DEL\ TRAPECIO\quad DCGE = A_2}$

$$o)\quad A_2 = \frac{(EG + DC)}{2} * DK_2 = \frac{(6.66m + 6m)}{2} * 1.67m$$

$\boldsymbol{A_2 = 10.57m^2 \quad LQQD}$

$\boldsymbol{ÁREA\ DEL\ TRAPECIO\ EGHF = A_3}$

$$p)\quad A_3 = \frac{(FH + EG)}{2} * \overline{K_1K_2} = \frac{(7.33m + 6.66m)}{2} * 1.67m$$

$\boldsymbol{A_3 = 11.68m^2 \quad LQQD}.$

$\boldsymbol{ÁREA\ DEL\ TRAPECIO\quad FHBA = A_4}$

$$q)\quad A_4 = \frac{(AB + FH)}{2} * KK_1 = \frac{(8m + 7.33m)}{2} * 1.67m$$

$\boldsymbol{A_4 = 12.8m^2 \quad LQQD}$

Ejercicio 6.4.

Calcular el radio R de la figura 6.4, sabiendo que:

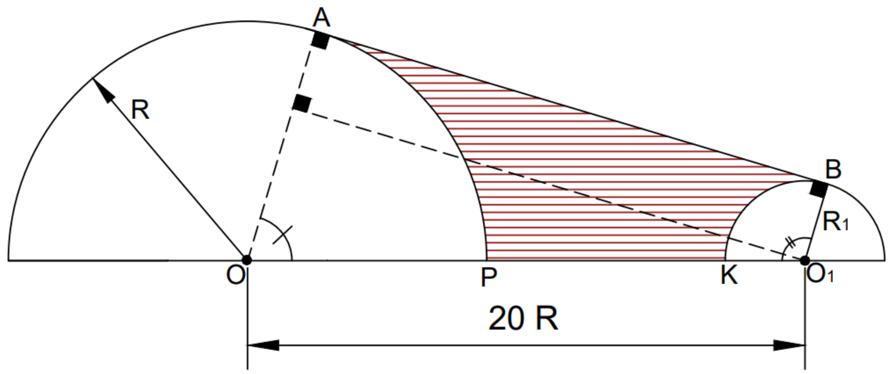
$H)\quad A_{iii} = 100m^2$

$\quad\overline{AB}\ tang.$

$\quad 3R_1 = R$

$T)\quad R =?$

Figura 6.4



Solución:

$a)\quad OA = R \qquad\qquad por\ construción$

$b)\quad TO_1 = AB \qquad\qquad por\ construción.$

$c)\quad TO = \frac{2}{3}R$

$Descomponemos\ la\ figura\ principal$

$d)\quad Área\ del\ rectángulo\ ABTO_1 = A_1$

$e)\quad Área\ del\ triángulo\ TOO_1 = A_2$

$f)\quad Área\ del\ \ sec\,t\,or\ circular\ APO = A_3$

$g)\quad Área\ del\ \ sec\,t\,or\ circular\ BKO_1 = A_4$

$h)\quad Área\ rayada = A_{iii}$

$(d), (e), (f), (g) en (h)$

$i)\quad A_{iiii} = A_1 + A_2 - A_3 - A_4$

$\Delta OTO_1\ rectángulo$

$$Cos\ \angle 1 = Cos\ \angle TOO_1 = \frac{TO}{\overline{OO_1}} = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)R}{20R} = 0.033 \qquad \Rightarrow \qquad 1m\angle 1 = 88\,°$$

$1m\angle OO_1T = 90° - 1m\angle 1 \qquad \Rightarrow \qquad 1m\angle 2 = 2°$

$1m\angle KO_1B = 1m\angle OO_1T + \ 90^0 = 2° + 90^0 \qquad \Rightarrow \qquad 1m\angle KO_1B$

$= 92°$

$\Delta\ O_1TO \quad rectángulo$

$OO_1^2 = OT^2 + TO_1^2 \qquad por\ Pitágoras \qquad \Rightarrow \qquad \overline{TO_1}^2$

$= \overline{OO_1}^2 - \overline{OT}^2$

$TO_1^2 = (20R)^2 - (0.666R)^2 \qquad \Rightarrow \qquad TO_1 = 19.98R = \overline{AB}$

$A_1 = \overline{AB} * \overline{TA} \rightarrow \qquad por\ definición \qquad \Rightarrow \qquad A_1$

$= [(19.98)(0.333)]R^2 \qquad \Rightarrow \qquad A_1 = 6.65R^2 \quad (j)$

$$A_2 = \frac{(OT)(TO_1)}{2} = \frac{(0666R)(19.98R)}{2} \qquad \Rightarrow \qquad A_2$$

$= 6.66R^2 \quad (k)$

$$A_3 = \frac{(\pi)R^2 * m\angle 1}{360^0} = \frac{(\pi)R^2(88^0)}{360^0} \qquad \Rightarrow \qquad A_3$$

$= 0.7679R^2 \quad (l)$

$$A_4 = \frac{(\pi)R_1^2 * m\angle 2}{360^0} = \frac{(\pi)(0.33R^2)(92^0)}{360^0} \qquad \Rightarrow \quad A_4$$

$= 0.087R^2 \quad (m)$

$(j), (k), (l), (m)\ en\ (i)$

$100m^2 = A_{iii} = A_1 + A_2 - A_3 - A_4$

$A_{iiii} = (6.65R^2) + (6.66R^2) - (0.7679R^2) - (0.087R^2) = 12.455R^2$

$$100m^2 = 12.455R^2 \qquad \therefore \qquad R^2 = \frac{100m^2}{12.455}$$

$\boldsymbol{R = 2.83m \quad LQQD}.$

Ejercicio 6.5.

Calcular el radio R de la figura 6.5 y el área de la región rayada, sabiendo que:

$H)\quad AC = 0.8\ unidades$

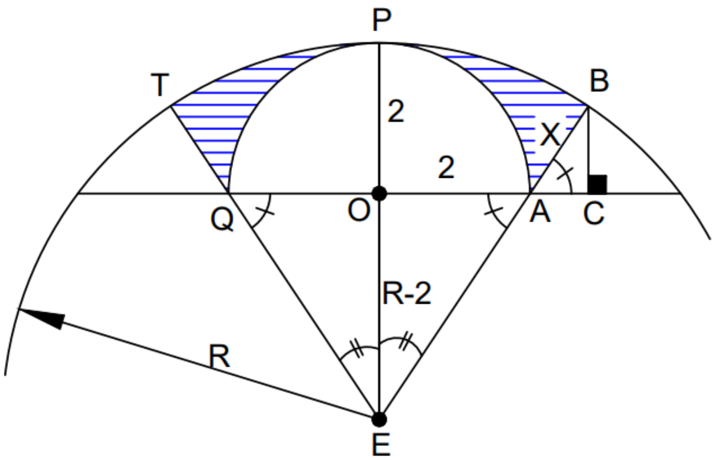
$OA = 2\ unidades = R_1$

$\overline{OP} = R$

$T)\quad A_{iiiiii} = ?$

$R = ?$

Figura 6.5



Solución:

$\Delta\ AOE \quad rectángulo$

$AE^2 = OA^2 + OE^2$

$a)\quad (R - X)^2 = (2)^2 + (R - 2)^2$

$Descomponemos\ la\ figura\ en\ superficies\ parciales$

$b) \quad A_{iii} = A_1 - A_2 - A_3$

$c) \quad A_1 = área\ del\ \ sec\,t\,or\ circular\ TPBE$

$d) \quad A_2 = área\ del\ semi - círculo\ (o, R_1)$

$e) \quad A_3 = área\ del\ triángulo\ QAE$

$\Delta ABC \quad rectángulo$

$f) \quad Cos\ \angle BAC = Cos\angle 1\ = \dfrac{AC}{x} = \dfrac{0.8}{x}$

$\Delta\ AOE$

$g) \quad Cos\angle OAE = Cos\angle 1 = \dfrac{\overline{OA}}{\overline{AE}} = \dfrac{2}{R-x}$

$(b) = (c)$

$\dfrac{0.8}{x} = \dfrac{2}{R-x} \qquad \Rightarrow \qquad 0.8R - 0.8x = 2x \qquad \Rightarrow \qquad R$

$= \dfrac{(2.8)(x)}{0.8}$

$h) \quad R = (3.5)(x)$

$(d)\ en\ (a)$

$(3.5x - x^2) = 4 + (3.5x - 2)^2 \qquad desarrollando$

$\Rightarrow \quad 6x^2 - 14x - 8 = 0$

$i) \quad El\ valor\ de\ "x"\ a\ considerar = 1.3$

$(i)\ en\ (h)$

$R = (3.5)(1.33) \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{R = 4.65\ unidades}$

$(e)\ en\ (b)$

$Cos\ \angle 1 = \dfrac{0.8}{1.33} = 0.6$

$1m\angle 1 = 53\,°$

$1m\angle OEA = 90\,° - 53\,°$

$1m\angle 2 = 37\,°$

$1m\angle QEA = 2m\angle 2 = 74\,°$

$j) \quad A_1 = \frac{\pi R^2(m\angle QEA)}{360°} = \frac{(\pi)(4.65)^2(74°)}{360°}$

$A_1 = 13.96\ unidades^2$

$k) \quad A_2 = \frac{(\pi)(R_1^2)}{2} = \frac{(\pi)(2)^2}{2}$

$A_2 = 6.28 unidades^2$

$l) \quad A_3 = \frac{QA \bullet OE}{2} = \frac{(4)(2.65)}{2}$

$A_3 = 5.3\ unidades^2$

$(j),(k),(l) \quad en \quad (b)$

$A_{iii} = (13.95 - 6.28 - 5.3)\ unidades^2$

$\boldsymbol{A_{iii} = 2.36\ unidades^2 \quad LQQD}$

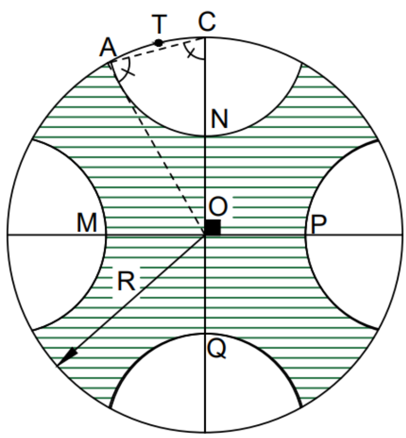
Ejercicio 6.6.

Calcular el área de la región rayada de la figura 6.6 en función del radio R, sabiendo que:

$H)$ M,N,P,Q puntos medios de los radios

$T)$ $A_{iii} = ?\ f(R)$

Figura 6.6



Solución:

$R = 2\mathrm{R}_1 \qquad por\ hipótesis$

$R = \overline{ON} + \overline{NC} \qquad por\ suma\ de\ segmentos$

$\Delta.AOC \rightarrow isósceles \quad por \quad construcción$

$\overline{AO} = \overline{OC} = R$

$Descomponemos\ el\ \ sec\,t\,or\ circular\ ATCOA = A_0$

$a) \quad A_{iii} = A_0 - 8A_3$

$a *) \quad Área\ del\ \ sec\,t\,or\ circular\ ATCOA = A_0$

$b) \quad A_3 = A_1 + A_2$

$c) \quad Área\ del\ segmento\ circular\ ATCA = A_1$

$d) \quad Área\ del\ \ sec\,t\,or\ circular\ ACNA = A_2$

$\overline{AC} = R_1 \qquad \Rightarrow \qquad \overline{AC} = (0.5)R$

$e) \quad \overline{AC}^2$

$= \overline{AO}^2 + \overline{OC}^2$

$- 2(\overline{AO})(\overline{OC}).Cos\angle.AOC \qquad ley\ del\ \ cos\,e\,no\ \ en\ el\ \Delta.AOC$

$$Cos.\angle AOC = \frac{\overline{AO}^2 + \overline{OC}^2 - \overline{AC}^2}{2(\overline{AO})(\overline{OC})} = \frac{R^2 + R^2 - (0.5)^2R^2}{2(R)(R)} = 0.875$$

$1m\angle AOC = 29\,°$

$2m\angle ACO + 1m\angle AOC = 180\,° \qquad T.F.\Delta$

$$1m\angle ACO = \frac{180\,° - 29\,°}{2} = 75.5\,°$$

$1m\angle\ 1 = 75.5\,°$

$$A_1 = \frac{1}{2}R^2\left[\frac{(\pi)(29\,°)}{180\,°} - Sen\ 29\,°\right]$$

$f) \quad A_1 = 0.01066R^2$

$$A_2 = \frac{(\pi)(R_1^2)(m\angle 75.5\,°)}{360\,°} = \frac{(\pi)(0.5R)^2(75.5\,°)}{360\,°}$$

$g)\quad A_2 = 0.1647R^2$

$(f),(g)\ en\ (b)$

$h)\quad A_3 = (0.01066 + 0.1647)R^2$

$A_3 = 0.175R^2$

$(h)\ en\ (a)$

$A_{iiii} = (\pi)(R^2) - (8)(0.175R^2)$

$\boldsymbol{A_{iii} = 1.738R^2} \quad \boldsymbol{LQQD}.$

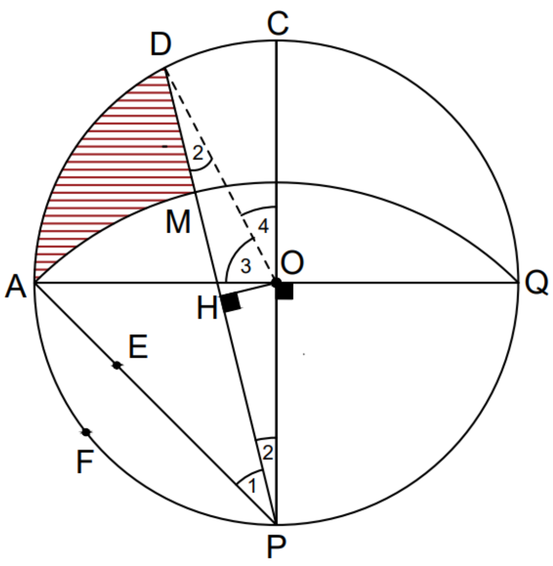
Ejercicio 6.7.

Calcular el área de la región rayada de la figura 6.7 en función del radio R, sabiendo que:

$H)\quad \overset{\frown}{AD} = 60°$

$T)\quad A_{iii} =?\ f(R)$

Figura 6.7



Solución:

$a)\quad PA = \overline{PM} = \overline{PQ} = R_1$

$\overline{OA} = \overline{OC} = \overline{OP} = R$

$AD = R_1 = cuerda\ por\ construcción.$

$DO = R \Rightarrow por\ construcción.$

$Descomposición\ del\ semicírculo\ CDAPOC$

$A_{iii} = A_0 - (A_1 + A_2 + A_3 + A_4)$

$A_0 = Área\ del\ semi' - círculo\ \Theta(O,R)$

$A_1 = Área\ del\ segmento\ circular\ .AEPFA$

$A_2 = Área\ del\ sec\,t\,or\ circular\ AMPA$

$A_3 = Área\ del\ triángulo\ .DOP$

$A_4 = Área\ del\ sec\,t\,or\ circular\ DCOD$

$b)\quad A_1 = \frac{1}{2}R^2(\frac{\pi.90^o}{180^o} - Seno.90^o) \quad \Rightarrow \quad A_1 = 0.285R^2$

$c)\quad A_2 = \frac{\pi.R_1^2.m\angle APM}{360°}$

$1m\angle 1 + 1m\angle 2 = 45^o$

$1m\angle 3 = ángulo\ central\ = arco\ AD = 60°$

$1m\angle DOP = 1m\angle 3 + 90^o = 60° + 90° \quad \Rightarrow \quad 1m\angle DOP$
$= 150°$

$\Delta.DOP \quad isósceles \quad \Rightarrow \quad \overline{OD} = \overline{OP} = R$

$1m\angle.ODP = 1m\angle.OPD = 1m\angle 2$

$\rightleftarrows \quad 2m\angle 2 + 1m\angle.DOP = 180^o \quad \Rightarrow \quad 1m\angle 2 = 15°$

$1m\angle 1 + 1m\angle 2 = 45^o \quad \Rightarrow \quad 1m\angle 1 = 30°$

$\Delta AOP\ rectángulo$

$\overline{AP^2} = \overline{AD^2} + \overline{OP^2} \quad \Rightarrow \quad R_1^2 = R^2 + R^2 \quad \Rightarrow \quad R_1^2$
$= 1.4142R$

$c*)\quad A_2 = \dfrac{\pi. R_1^2 . m\angle APM}{360^o} = \dfrac{\pi.(2R^2)(30^o)}{360^o} \qquad \Rightarrow \qquad A_1$

$= 0.524R^2$

$\Delta . OHP \rightarrow rectángulo$

$Sen. \angle 2 = \dfrac{\overline{OH}}{\overline{OP}} \qquad \Rightarrow \quad \overline{OH} = \overline{OP}. Sen. 15^o \qquad \Rightarrow \qquad OH$

$= 0.258R$

$A_3 = 2\ areas\ del\ \Delta OHP = 2\left[\dfrac{(OH)(HP)}{2}\right] = (OH)(HP)$

$\dfrac{Sen. 150^o}{\overline{DP}} = \dfrac{Sen. 15^o}{\overline{OD}} \quad ; \quad \overline{DP} = \dfrac{(0.5)(R)}{0.258} \qquad \Rightarrow \qquad \overline{DP}$

$= 1.932R$

$\dfrac{\overline{DP}}{2} = \overline{DH} = \overline{HP} = 0.966R$

$d)\quad A_3 = (0.258R)(0.966R) \qquad \Rightarrow \qquad A_3 = 0.25R^2$

$e)\quad A_4 = \dfrac{\pi. R^2 . 30^o}{360^o} \qquad \Rightarrow \qquad A_4 = 0.261R^2$

$f)\quad A_0 = \dfrac{\pi. R^2}{2} \qquad \Rightarrow \qquad A_0 = 1.57R^2$

$(b), (c*), (d), (e), (f) \quad en \quad (a)$

$A_{iii} = A_a - (A_1 + A_2 + A_3 + A_4)$

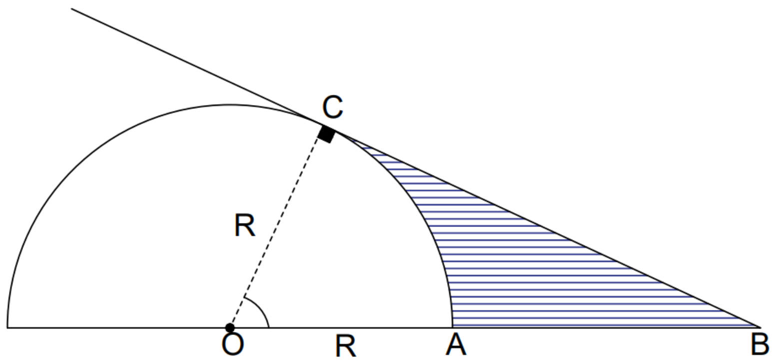
$A_{iiii} = 1.57R^2 - (0.285R^2 + 0.524R^2 + 0.25R^2 + 0.261R^2)$

$\boldsymbol{A_{iii} = 0.25R^2 \quad LQQD.}$

Ejercicio 6.8.

Calcular el área de la región rayada de la figura 6.8.

Figura 6.8



$H)\quad \overline{BC} = 20m$

$\overline{BA} = 10m$

$T)\quad A_{iii} = ?$

Solución:

$\Delta\ OCB \quad rectángulo.$

$a)\quad (\overline{OB}^2) = \overline{OC}^2 + \overline{BC}^2 \qquad por\ Pitágoras$

$\therefore \qquad (R + \overline{BA})^2 = R^2 + (20m)^2 \qquad \Rightarrow \qquad R$

$= 15m$

$b)\quad \overline{OB} = \overline{OA} + \overline{AB} \qquad por\ suma\ de\ segmentos$

$c)\quad \overline{OB} = R + \overline{AB} \qquad : \qquad \overline{OB} = 15m + 10m$

$\Rightarrow \qquad \overline{OB} = 25m$

$\Delta\ OCB\ rectángulo$

$d) \quad Sen \angle COA = \frac{\overline{CB}}{\overline{OB}} = \frac{20m}{10m} \qquad \Rightarrow \qquad 1m\angle COA = 53.13°$

$Analizamos\ la\ figura\ del\ gráfico$

$e)\ Área\ del\ triángulo\ rectágulo\ OCB$

$= Área\ del\ \ sec\,t\,or\ circular\ OCA + A_{iii}$

$Área\ del\ \ \Delta\ \ OCB = A_1$

$Área\ del\ \ \ sec\,t\,or\ .circular\ OCA = A_2$

$f) \quad A \quad_{iiiii} = A_1 - A_2$

$g) \quad A_1 = \frac{(OC)(CB)}{2} = \frac{(15m)(20m)}{2} = 150m^2$

$h) \quad A_2 = \frac{(\pi)(R^2)(m\angle COA)}{360°} = \frac{\pi.(15m)^2(53.13°)}{360°} = 104m^2$

$(g)\ y\ (h)\ en\ (f)$

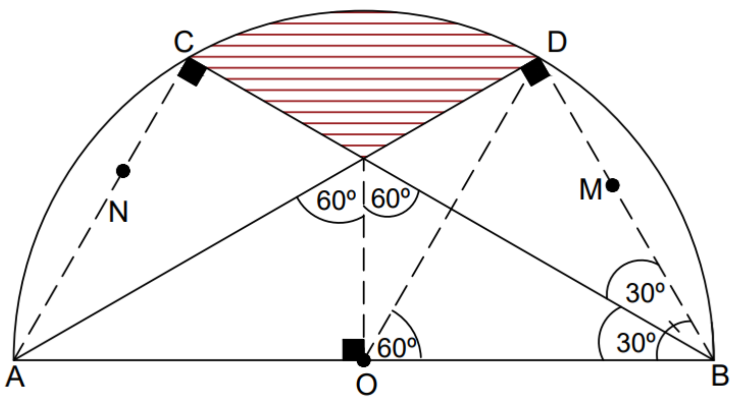
$A \quad_{iii} = 150m^2 - 104m^2$

$\boldsymbol{A \quad_{iii} = 46m^2 \quad LQQD.}$

Ejercicio 6.9.

Calcular el área de la región rayada de la figura 6.9.

Figura 6.9



$H) \quad \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{DB}$

$T) \quad A_{iii} =? \ f(R)$

Solución:

$\overline{AC} \quad \wedge \ DB \qquad cuerdas\ por\ construcción$

$\overline{OA} \quad = \overline{OB} = radio\ de\ la \quad \Theta \quad (O,R)$

$\Delta\ ACB$

$a) \quad 1m\angle\ ACB = ángulo.inscrito = \dfrac{\overset{\frown}{AB}}{2} = \dfrac{180°}{2} = 90°$

$b) \quad 1m\angle\ ACB = 90° = 1m\angle ADB$

$\Delta\ ACB \wedge \square\ ADB \qquad rectángulos$

$\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{DB} \qquad por\ hipótesis. \qquad \therefore \qquad \overline{AC}$

$= \overline{DB} = R \qquad lado\ del\ \ exágono$

$c) \quad \overline{AB^2} = \overline{AD^2} + \overline{DB^2} \qquad por\ Pitágoras\ en\ el\ \Delta\ ADB\ \ rectángulo$

$(2R)^2 = \overline{AD}^2 + R^2 \quad ; \quad \overline{AD}^2 = 3R^2 \quad ; \quad \overline{AD} = 1.732R = \overline{BC}$

$Sen\ \angle\ ABD = \dfrac{\overline{AD}}{\overline{\overline{AB}}} = \dfrac{1.732R}{2R} = 0.8666 \quad ; \quad 1m\angle ABD = 60°$

$= 1m\angle BAC$

$1mDAB = 1m\angle ABC = 30°$

$En\ el\ \Delta AOP \quad : \quad PO = h = altura$

$Tang.30° = \dfrac{PO}{AO} = \dfrac{h}{R} \quad \Rightarrow \quad h = (R)(Tang.30°) \quad \Rightarrow \quad h$

$= 0.577R$

$AP^2 = PO^2 + AO^2 \quad \Rightarrow \quad AP = PB = 1.15R \quad \Rightarrow \quad PD = PC$

$= 0.58R$

$d) \quad A_{iiiii} = A_1 - 2A_2 - 2A_3$

$e)\quad A_1 = \acute{A}rea\ del\ semi-c\acute{i}rculo$

$f)\quad A_2 = \acute{A}rea\ del\ cuadril\acute{a}tero\ ACPOA = cuadril\acute{a}tero\ OPDB$

$g)\quad A_3 = \acute{A}rea\ del\ segmento\ circular\ ACNA$

$$A_1 = \frac{(\pi)(R^2)}{2} \qquad \Rightarrow \qquad A_1 = 1.577R^2 \qquad (h)$$

$$A_2 = (\acute{A}rea\ \Delta ACP + \acute{A}rea\ \Delta APO) = \left[\frac{(CP)(CA)}{2}\right] + \left[\frac{(PO)(OA)}{2}\right]$$

$$= \left[\frac{(0.58R)(R)}{2} + \frac{(0.577R)(R)}{2}\right]$$

$$A_2 = 0.5785R^2 \qquad (i)$$

$$A_3 = \frac{1}{2}R^2\left[\frac{(\pi)(60°)}{180°} - Sen\ 60°\right] = 0.09R^2 \qquad (j)$$

(h) ,(i) , (j) en (d)

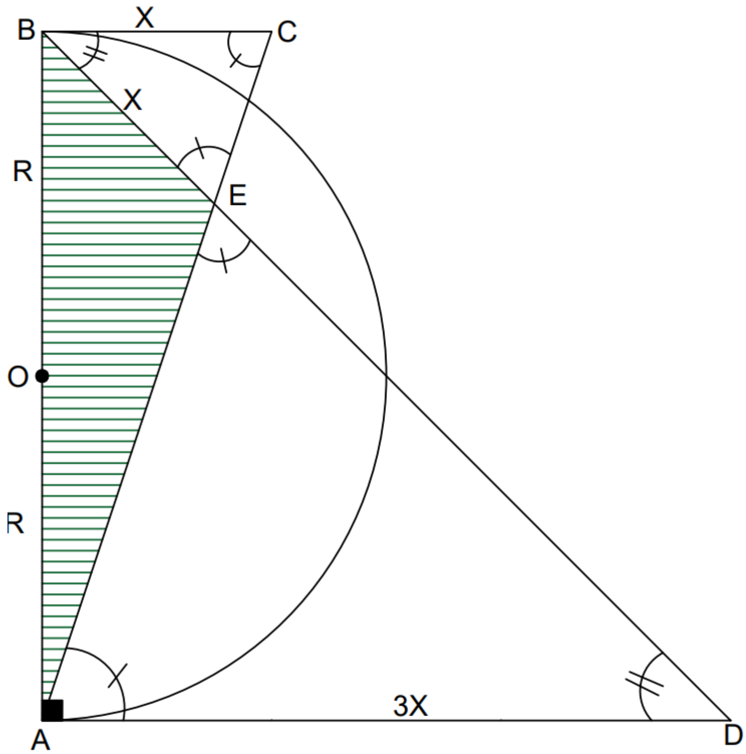
$$A_{iiiiii} = [1.577 - (2)(0.5785) - (2)(0.09)]\ R^2$$

$$\boldsymbol{A_{iiiiii} = 0.242\ R^2 \quad LQQD.}$$

Ejercicio 6.10.

Calcular el área de la región rayada de la figura 6.10 en función del radio R.

Figura 6.10



$H)$ $BC \perp BA$

$BA \perp AD$

$BCIIAD$

$T)$ $A_{iiii} =?\ f(R)$

Solución:

$1m\angle BCA = 1m\angle CAD \quad por\ \acute{a}ngulos\ alternos\ internos$

$1m\angle CBD = 1m\angle BDA \quad por\ \acute{a}ngulos\ alternos\ internos$

$1m\angle BEC = 1m\angle AED \quad por\ \acute{a}ngulos\ opuestos\ por\ el\ v\acute{e}rtice$

$\Delta BCE \sim \Delta \mathrm{AED}$

$a) \quad \frac{BC}{AD} = \frac{BE}{ED} \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{3\mathrm{x}}$

$= \frac{x}{ED} \quad por\ semejanza\ de\ tri\acute{a}ngulos$

$b) \quad \mathrm{ED} = 3\mathrm{x}$

$c) \quad \mathrm{BD} = \mathrm{BE} + \mathrm{ED} = x + 3\mathrm{x} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{BD} = 4\mathrm{x}$

Δ ABD rectángulo

$d) \quad \mathrm{BD}^2 = AB^2 + AD^2$

$e) \quad AB^2 = BD^2 - AD^2$

$AB = \sqrt{(4x)^2 - (3x)^2} = 2.6457x \quad \Rightarrow \quad AB = 2R$

$= 2.646x$

$f) \quad R = 1{,}323x \quad \Rightarrow \quad x = 0{,}756R$

$\Delta ABD\ rect\acute{a}ngulo$

$g) \quad Sen\ \angle ABD = \frac{3x}{4x} = 0.75 \quad \Rightarrow \quad 1m\angle ABD = 48.59°$

$h) \quad Area\ del\ \Delta ABE = A_{iiii}$

$A_{iii} = (0.5)(AB)(BE)Sen\ \angle ABE$

$A_{iii} = (0.5)(2R)(0.756R)Sen\ 48.59°$

$\boldsymbol{A = 0.567R^2 \quad LQQD}.$

Ejercicio 6.11.

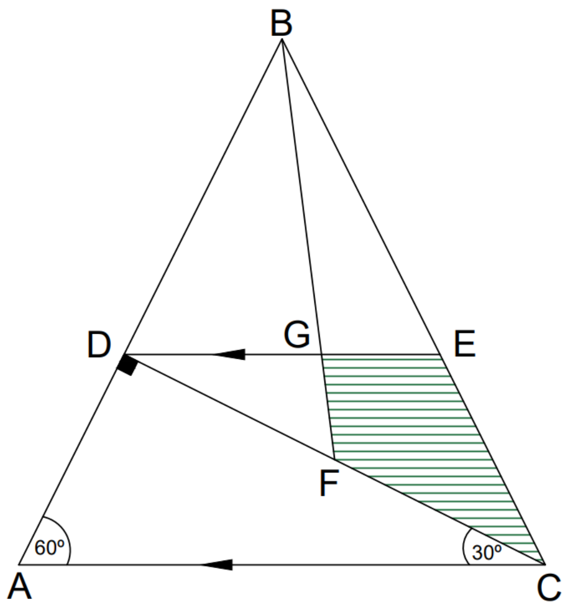
Hallar la relación $\frac{A_{iiii}}{A_{\Delta_{ABC}}}$ de la figura 6.11 sabiendo que:

$H)\quad \Delta ABC\ equilátero$

$DF = FC$

$T)\quad \dfrac{A_{iiii}}{A_{\Delta_{ABC}}} = ?$

Figura 6.11



Solución:

$a)\quad AB = BC = AC = L$

$b)\quad 1m\angle ACD = 1m\angle DCB = 30\,°$

$c)\quad DF = FC \quad por\ hipótesis$

$\Delta ADC\ rectángulo$

$$Cos\ 30° = \frac{DC}{L} \qquad \Rightarrow \qquad DC = 0.866L$$

$$DC = DF + FC = 2DF = 2FC$$

$$DF = \frac{DC}{2} = \frac{0.866}{2}L \qquad \Rightarrow \qquad DF = 0.433\ L$$

$d)\quad \Delta DBF\ rectángulo$

$$BF^2 = DB^2 + DF^2 = (0.5L)^2 + (0.433L)^2 \qquad \Rightarrow \qquad BF = 0.6614L$$

$$e)\quad Sen\ \angle DFB = \frac{0.5L}{0.6614L} = 0.7559 \qquad \Rightarrow \qquad 1m\angle DFB = 49.11°$$

$f)\quad El\ área\ rayada = Área\ del\ \Delta FBC - Área\ del\ \Delta BGE$

$Área\ rayada = A_{iiiii}$

$Área\ del\ \Delta FBC = A_1$

$Área\ del\ \Delta BGE = A_2$

$$g)\quad 1m\angle DBF = 90° - 49.11° \qquad \Rightarrow \qquad 1m\angle DBF = 40.89°$$

$$1m\angle FBC = 1m\angle DBC - 1m\angle DBF = 60° - 40.89°$$

$$\Rightarrow \qquad 1m\angle FBC = 19.11°$$

ΔDBG

$$h)\quad 1m\angle BGE = 1m\angle DBG + 1m\angle BDG = 40.89° + 60°$$

$$\Rightarrow \qquad 1m\angle BGE = 100.89°$$

ΔBGE

$$\frac{Sen\ 60°}{BG} = \frac{Sen\ 100.89°}{0.5L} \qquad \therefore \qquad BG = \frac{(Sen\ 60°)(0.5L)}{Sen\ 60°}$$

$$\Rightarrow \qquad BG = 0.44\ L$$

$i) \quad A_1 = (0.5)(BF)(BC)(Sen\ 19.11°)$

$= (0.5)(0.6614L)(L)(Sen\ 19.11°) \quad \Rightarrow \quad A_1 = 0.1082\ L^2$

$j) \quad A_2 = (0.5)(BG)(BE)Sen\ 19.11°$

$= (0.5)(0.44L)(0.5L)Sen\ 19.11° \quad \Rightarrow \quad A_2 = 0.036\ L^2$

$k) \quad A_{iii} = A_1 - A_2 = 0.1082L^2 - 0.036L^2 \quad \Rightarrow \quad A_{iiii} = 0.0722L^2$

$$l) \quad \frac{A_{iii}}{A_{\Delta ABC}} = \frac{0.0722L^2}{\frac{L^2\sqrt{3}}{4}} = \frac{0.0722}{0.433}$$

$\boldsymbol{\frac{A_{iii}}{A_{\Delta ABC}} = 0.1667 \quad LQQD}.$

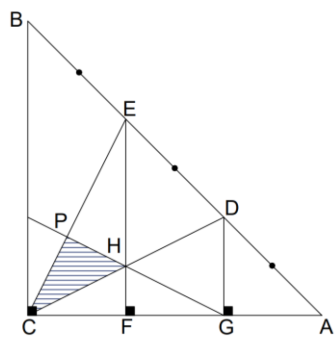
Ejercicio 6.12.

Hallar el área de la región rayada en términos del segmento AB de la figura 6.12 sabiendo que:

$H) \quad \frac{AC}{BC} = \frac{2}{3}$

$T) \quad A_{iiii} f(AB) = ?$

Figura 6.12



Solución:

$a)\quad AB = BE + ED + DA$

$BE = ED = DA \qquad \Rightarrow \qquad AB = 3BE = 3ED$

$= 3DA$

$b)\quad \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{2}{3} \quad por\ hipótesis \qquad \Rightarrow \quad AC = 0.66AB$

$\Delta ABC\ rectángulo$

$BC^2 = AB^2 - AC^2 = AB^2 - (0.66AB)^2 \qquad \Rightarrow \qquad BC = 0.75AB$

$CF = FG = GA = \dfrac{AC}{3} = 0.22AB$

$Sen\angle BAC = \dfrac{0.75AB}{AB} = 0.75 \qquad \Rightarrow \qquad 1m\angle BAC = 48.59°$

ΔCDA

$c)\quad CD^2 = DA^2 + AC^2 - 2(DA)(AC)\cos 48.59 \quad Ley\ del\ \cos e no$

$CD^2 = (0.33AB) \quad + (0.66AB)^2$

$- 2(0.33AB)(0.66AB)\cos 48.59 \qquad \Rightarrow \qquad CD$

$= 0.5AB$

$\dfrac{Sen\angle DCA}{DA} = \dfrac{Sen\angle BAC}{CD} \qquad \Rightarrow \qquad Sen\angle DCA = \dfrac{(Sen48.59)(0.33AB)}{(0.5AB)}$

$1m\angle DCA = 29.66° = 1m\angle HGC \qquad \Rightarrow \quad \Delta CHG\ isósceles$

ΔBCE

$1m\angle CBE = 90° - 48.59° \qquad \Rightarrow \qquad 1m\angle CBE = 41.41°$

$CE^2 = BE^2 + BC^2 - 2(BE)(BC)Cos\angle CBE$

$CE^2 = (0.33AB)^2 + (0.75AB)$

$- 2(0.33AB)(0.75AB)Cos41.41° \qquad \Rightarrow \qquad CE$

$= 0.548AB$

$d)\quad \frac{Sen\angle BCE}{BE}=\frac{Sen\angle CBE}{CE} \qquad \Rightarrow \qquad Sen\angle BCE$

$$=\frac{(Sen41.41°)(0.33AB)}{(0.548AB)}$$

$1m\angle BCE = 23.47°$

$e)\quad 1m\angle BCA = 90° = 1m\angle BCE + 1m\angle ECD + 1m\angle DCA$

$$\Rightarrow \qquad 1m\angle ECD = 36.87°$$

$f)\quad Cos\angle HCF = Cos29.66° = \frac{CF}{CH} = \frac{0.22AB}{CH} \qquad \Rightarrow \qquad CH$

$$= 0.253AB$$

$g)\quad 1m\angle CPG = 180° - 25.12° - 2(29.66)° \qquad \Rightarrow \qquad 1m\angle CPG$

$$= 95.56°$$

$\frac{Sen\angle CPG}{CG}=\frac{Sen\angle CGH}{CP} \qquad \therefore \qquad CP$

$$=\frac{(Sen\ 29.66)(0.44AB)}{Sen95.56} \qquad \Rightarrow \qquad CP = 0.218AB$$

$h)\quad Área\ del\ \Delta CPH = Área\ rayada = (0.5)(CH)(CP)Sen\ \angle ECD$

$$= A_{iiii}$$

$A_{iiii} = (0.5)(0.253AB)(0.218AB)Sen\ 36.87°$

$\boldsymbol{A_{iiiii} = 0.0165AB^2} \quad \boldsymbol{LQQD}.$

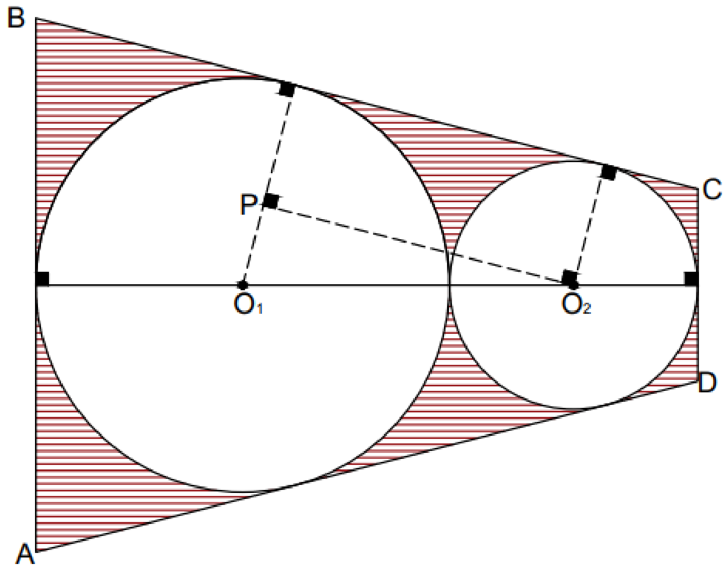
Ejercicio 6.13.

Hallar la relación $\frac{\mathrm{A_{iiiii}}}{\mathrm{A_{ABCD}}}$ de la figura 6.13, sabiendo que:

$H)\quad \frac{R_2}{R_1}=\frac{7}{11}$

$T)\quad \frac{A_{iiiii}}{A_{ABCD}}=?$

Figura 6.13



Solución:

$a) \quad AB\ II\ CD \quad por\ hipótesis\ gráfica$

$ABCD\ trapecio\ isósceles$

$b) \quad BE = BN = EA \quad propiedad\ de\ las\ tangentes$

$c) \quad MC = CF = FD \quad propiedad\ de\ las\ tangentes$

$d) \quad PO_2 = NM \quad por\ construcción$

$e) \quad \Delta O_1PO_2\ rectángulo$

$$PO_2^2 = (O_1O_2)^2 - (PO_1)^2 \qquad \Rightarrow \qquad PO_2^2$$

$$= (R_1 + R_2)^2 + (R_1 - R_2)^2$$

$$R_2 = 0.636\ R_1$$

$$PO_2^2 = (1.636R_1)^2 + (0.364R_1)^2 \qquad \Rightarrow \qquad PO_2 = 1.59R_1$$

$$A_{ABCD} - A_{\oplus(O1:R1)} - A_{\oplus(O2:R2)} = A_{iiiiii}$$

$A_{ABCD} = A_1 \quad : \quad A_{\oplus(O1:R1)} = A_2 \quad : \quad A_{\oplus(O2:R2)} = A_3$

$A_1 - A_2 - A_3 = A_{iiiiii}$

$f) \quad Sen\ \angle NO_1O_2 \ = \dfrac{1.59\ R_1}{1.636R_1} = 0.9718$

$1m\angle NO_1O_2 \ = 76.38° \qquad \Rightarrow \qquad 1m\angle O_1O_2\ P = 13.62°$

$g) \quad EBNO_1 \quad \wedge \quad MCFO \qquad trapezoides\ simétricos$

$1m\angle EO_1N = 180° - 76.38° \qquad \Rightarrow \qquad 1m\angle EO_1N = 103.62°$

$\Delta BEO_1\ :\ \Delta CO_2\ F\ rectángulos$

$Tang.\ \angle BO_1E = Tang.(\dfrac{103.62°}{2}) = \dfrac{EB}{EO_1} = \dfrac{EB}{R_1} \qquad \Rightarrow \qquad EB$

$= 1.27\ R_1$

$Tang.\ \angle CO_2F = Tang.(\dfrac{76.38°}{2}) = \dfrac{CF}{O_2F} = \dfrac{CF}{R_2} \qquad \Rightarrow \qquad CF$

$= 0.5R_2$

$CD = 2(CF) = (2)(0.5R_1) = R_1 \qquad \Rightarrow \qquad CD = R_1$

$AB = 2(EB) = 2(1.27R_1) = 2.54R_1 \qquad \Rightarrow \qquad AB = 2.54R_1$

$h) \quad A_1 = \left[\dfrac{AB + CD}{2}\right] EF = \left[\dfrac{2.54R_1 + R_1}{2}\right][3.272R_1] \qquad \Rightarrow \qquad A_1$

$= 5.79R_1$

$i) \quad A_2 = (\pi)R_1^2 = 3.1416R_1^2$

$j) \quad A_3 = (\pi)R_2^2 = (\pi)(0.636R_1)^2 \qquad \Rightarrow \qquad A_2 = 1.27R_1^2$

$A_{iiiii} = (5.79 - 3.1416 - 1.27)R_1^2 \qquad \Rightarrow \qquad A_{iiiii} = 1.378R_1^2$

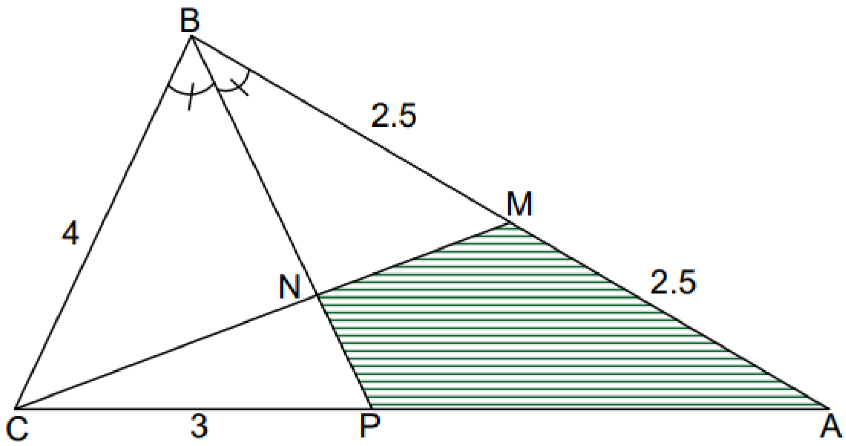
$\dfrac{A_{iiiiii}}{A_1} = \dfrac{1.378R_1^2}{5.79R_1^2}$

$\boldsymbol{\dfrac{A_{iiiiii}}{A_1} = 0.238 \quad LQQD}.$

Ejercicio 6.14.

Calcular el área de la región rayada de la figura 6.14.

Figura 6.14



$T) \quad A_{iiii} = ?$

Solución:

$$a) \quad \frac{CP}{CB} = \frac{PA}{AB} \qquad propiedad\ de\ la\ bisectriz\ interna$$

$$PA = \frac{(CP)(AB)}{CB} = \frac{(3m)(5m)}{4m} \qquad \Rightarrow \qquad PA = 3.75m$$

$$b) \quad Cos\ \angle ABC = \frac{BC^2 + AB^2 - AC^2}{(2)(BC)(AB)}$$

$$= \frac{(4m)^2 + (5m)^2 - (3m + 3.75m)^2}{(2)(4m)(5m)} = -0.114$$

$$1m\angle ABC = 2m\angle 1 = 96.55\,° \qquad \Rightarrow \qquad 1m1 = 48.27\,°$$

$$\frac{Sen\ \angle BAC}{BC} = \frac{Sen \angle ABC}{AC} \quad \Rightarrow \quad Sen\ \angle BAC = \frac{(Sen\ 96.55°)(4m)}{6.75m}$$

$1m\angle BAC = 36°$ $\quad \Rightarrow \quad$ $1m\angle BPA = 95.73°$

$\Rightarrow \quad 1m\angle ACB = 47.45°$

ΔCBM

c) $CM^2 = BM^2 + BC^2 - 2.BM.BC.Cos\ \angle BMC$

$CM^2 = (2.5m)^2 + (4m)^2 - 2(2.5m)(4m)Cos\ 96.55° \quad \Rightarrow \quad CM = 4.95m$

$$\frac{Sen\ \angle BMC}{BC} = \frac{Sen\ \angle CBM}{CM} \quad \Rightarrow \quad Sen\ \angle BMC = \frac{(Sen\ 96.55°)(4m)}{4.95m}$$

$1m\angle BMC = 53.39°$ $\quad : \quad$ $1m\angle BNM = 78.34°$

ΔBNM

d) $\dfrac{Sen\ BMC}{BN} = \dfrac{Sen\ BNM}{BM} \quad \Rightarrow \quad BN = \dfrac{(Sen.\ 53.39°)(2.5m)}{Sen\ 78.34°}$

$\cdots BN = 2.05m$

e) $Área\ del\ \Delta PBA - Área\ del\ \Delta BNM = Área\ rayada$

$A_1 = Área\ del\ \Delta PBA$

$A_2 = Área\ del\ \Delta BNM$

$A_{iiiii} = Área\ rayada$

f) $A_1 = (0.5)(PA)(BA)Sen\ \angle BAP = (0.5)(3.75m)(5m)Sen36°$

$A_1 = 5.51m^2$

g) $A_2 = (0.5)(BN)(BM)Sen\ \angle PBA = (0.5)(2.05m)(2.5m)Sen\ 48.27°$

$A_2 = 1.91\ m^2$

h) $A_{iii} = A_1 - A_2$

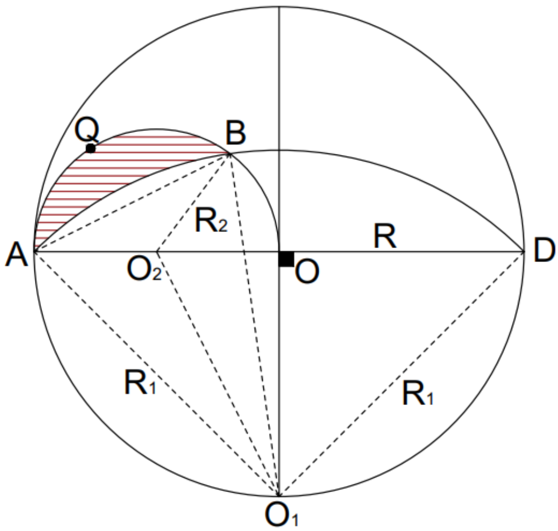
$A_{iiii} = (5.51 - 1.91)m^2$

$\boldsymbol{A_{iiiii} = 3.6m^2 \quad LQQD}$.

Ejercicio 6.15.

Calcular el área de la región rayada de la figura 6.15.

Figura 6.15



$H)\quad R = 2R_2 = 10\ unidades$

$T)\quad A_{iiiii} = ?$

Solución:

$a)\quad AO = OO_1 = OD = R = 10\ unidades$

$b)\quad O_1A = O_1B = O_1D = R_1 = R\sqrt{2}\ = 1.4142(10unid.)$

$= 14.14\ unidades$

$c)\quad O_2B = O_2O = O_2A = R_2 = 5\ unidades$

$\Delta O_1AO_2\ rectángulo$

$$Tag.\ \angle O_1O_2O = \frac{R}{R_2} = \frac{10unid.}{5\ unid.} = 2 \qquad \Rightarrow \qquad 1m\angle O_1O_2O$$

$$= 63.435°$$

$\Delta O_1O_2O\ rectángulo$

$$O_1O_2 = \sqrt{O_1O^2 + O_2O^2} = \sqrt{100+25} = \sqrt{125} \qquad \Rightarrow \qquad O_1O_2$$

$$= 11.18\ uni$$

$d)\quad \Delta O_1BO_2$

$$Cos\angle O_1O_2B = \frac{R_2^2 + (O_1O_2)^2 - R_1^2}{(2)(R_2)(O_1O_2)} = \frac{(5)^2 + (11.18)^2 - (14.14)^2}{(2)(5)(11.18)}$$

$$= -0.44675 \qquad \Rightarrow \qquad 1m\angle O_1O_2B = 116.53°$$

$e)\quad 1m\angle BO_2O = 1m\angle O_1O_2B - 1m\angle O_1O_2O = 116.53° - 63.435°$

$$= 53.1°$$

$$1m\angle O_2BO = 1m\angle O_2OB = \frac{180° - 53.1°}{2} = 63.45°$$

$$1m\angle AO_2B = 180° - 1m\angle BO_2O = 180° - 53.1°$$

$$\Rightarrow \qquad 1m\angle AO_2B = 126.9°$$

$\Delta ABO\ rectángulo$

$f)\quad 1m\angle BAO = 1mABO - 1m\angle BOA = 90° - 63.45°$

$$\Rightarrow \qquad 1m\angle BAO = 26.55°$$

$$1m.\angle BAO_1 = 1m\angle BAO + 45° = 26.55° + 45°$$

$$\Rightarrow \qquad 1m\angle BAO_1 = 71.55°$$

$$1mAO_1B = 180° - 2m\angle BAO_1 = 180° - (2)(71.55°)$$

$$\Rightarrow \qquad 1m\angle AO_1B = 36.9° \quad .$$

$g)\quad Área\ rayada$

$$= Área\ del\ seg.\ circular\ APBA$$

$$- Área\ del\ seg.\ circular\ AKBA$$

$h)\quad A_{iiiiii} = Área\ rayada$

$i)\quad A_1 = Área\ del\ seg.\ circular\ APBA$

$j)\quad A_2 = Área\ del\ seg.\ circular\ AKBA$

$$A_1 = (0.5)R_2^2\left[\frac{(\pi)(1m\angle AO_2B)}{180°} - sen\angle AO_2B\right]$$

$$A_1 = (0.5)(5unid.)^2\left[\frac{(\pi)(126.9°)}{180°} - sen.126.9°\right] \quad \Rightarrow \quad A_1$$

$$= 17.69\ unid.^2$$

$$A_2 = (0.5)R_1^2\left[\frac{(\pi)(1m\angle AO_1B)}{180°} - sen\angle AO_1B\right]$$

$$A_1 = (0.5)(14.14unid.)^2\left[\frac{(\pi)(36.9°)}{180°} - sen.36.9°\right] \quad \Rightarrow \quad A_2$$

$$= 4.36\ unid.^2$$

$k)$ $A_{iiiii} = A_1 - A_2$

$A_{iiiii} = 17.69\ unid.^2 - 4.36\ unid.^2$

$\boldsymbol{A_{iiiii} = 13.33\ unid^2 \quad LQQD}.$

Ejercicio 6.16.

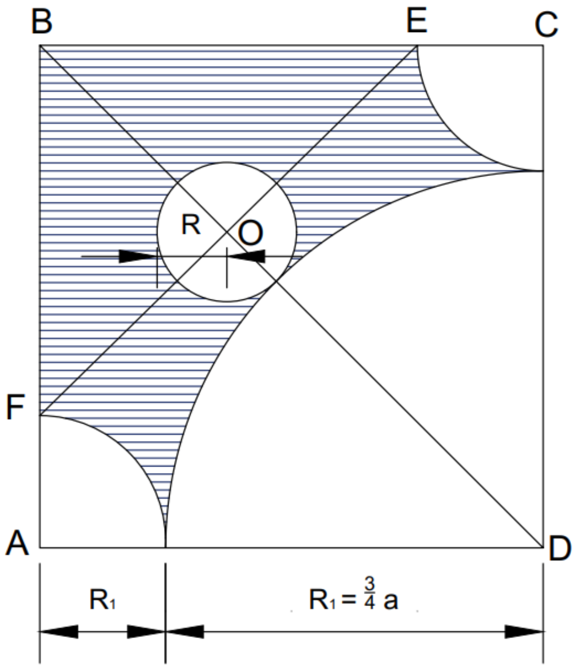
Calcular la relación $\frac{A_{iiii}}{A_{ABCD}}$ de la figura 6.16, sabiendo que:

$H)$ $ABCD\ cuadrado\ de\ lado\ "a"$

$$R_1 = \frac{3}{4}\ a$$

$T)$ $\frac{A_{iiiii}}{A_{ABCD}} = ?$

Figura 6.16



Solución:

$a)\quad DG = DJ = DH = R_1 = 0.75a \qquad por\ hipótesis\ gráfica$

$b)\quad CE = CH = AF = AG = 0.25a = R_2 \qquad por\ hipótesis\ gráfica$

$c)\quad A_{SECTOR\ CIRCULAR}AFG = A_{SECTOR\ CIRCULAR}ECH = A_2$

$Descomposición\ en\ áreas\ parciales$

$d)\quad A_{ABCD} = 2A_2 + A_{SECTOR\ CIRCULAR}GJHD + A_{\Theta(O,R)} + Área\ rayada$

$A_{ABCD} = A_1$

$A_{SECTOR\ CIRCULAR}GJHD = A_3.$

$A_{\Theta(O,R)} = A_4.$

$Área\ rayada. = A_{iiiii}$

$e) \quad A_1 = a^2$

$f) \quad A_2 = \dfrac{(\pi)(R_2^2)(1m\angle ECH)}{360°} = \dfrac{(\pi)(0.25a)^2(90°)}{360°} \quad \Rightarrow \quad A_2$

$= 0.05a^2$

$g) \quad A_3 = \dfrac{(\pi)(R_2^2)(1m\angle GDH)}{360°} = \dfrac{(\pi)(0.75a)^2(90°)}{360°} \quad \Rightarrow \quad A_2$

$= 0.44a^2$

ΔBFE *rectángulo e isósceles*

$1m\angle BFE = 1m\angle BEF = 1m\angle 1 = 45°$

"O" punto medio de FE(hipotenusa)

$BO = OE$

$= OF$ *propiedad de la mediana en triángulos rectángulos*

$1m\angle BOF = 1\angle recto = 90°$

ΔBEO *rectángulo*

$Sen\ 45^2 = \dfrac{OE}{BE} \quad \Rightarrow \quad OE^2 = (Sen\ 45°)(0.75a) \quad \Rightarrow \quad OE$

$= 0.53a$

ΔABD *rectángulo*

$(BD)^2 = (AB)^2 + (AD)^2 = a^2 + a^2 = 2a^2 \quad \Rightarrow \quad BD$

$= 1.4142a$

$h) \quad BD = BO + OJ + JD = 1.4142a = 0.53a + R + R_1 \quad \Rightarrow \quad R$

$= 0.134a$

$i) \quad A_4 = (\pi)R^2 = (\pi)(0.134a)^2 \quad \Rightarrow \quad A_4 = 0.056a^2$

$j) \quad A_{IIII} = A_1 - 2A_2 - A_3 - A_4 = a^2 - 2(0.05a^2) - 0.44a^2 - 0.056a^2$

$A_{iii} = 0.4a^2$

$k) \quad \dfrac{A_{iiii}}{A_{ABCD}} = \dfrac{0.4a^2}{a^2}$

$\boldsymbol{\dfrac{A_{iiiii}}{A_{ABCD}} = 0.4 \quad LQQD}$

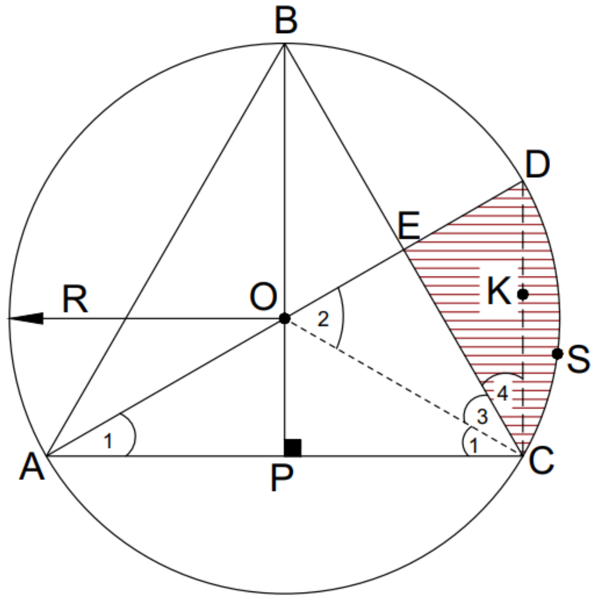
Ejercicio 6.17.

Calcular la relación $\frac{A_{iiii}}{A_{ABC}}$ de la figura 6.17, sabiendo que:

$H) \quad 1m\angle 1 = 20°$

$T) \quad \dfrac{A_{iiiii}}{A_{ABC}} = ?$

Figura 6.17



Solución:

$a) \quad \Theta(o, R)$

$b) \quad DC = cuerda\ auxiliar\ por\ construcción$

$c) \quad 1m\angle 1 = \dfrac{\overset{\frown}{DC}}{2} \quad por\ def.\ de\ ángulo\ inscrito$

$\overset{\frown}{DC} = 2m\angle 1 = 40° = 1m\angle 2 \quad$ *por ángulo central*

$1m\angle ACD = 90° \quad \Rightarrow \quad$ □ADC *es rectángulo*

$Sen\angle 1 = \dfrac{DC}{AD} \quad \Rightarrow \quad DC = Sen20°(2R) \quad \Rightarrow \quad DC = 0.684R$

$AC = \sqrt{AD^2 - DC^2} = \sqrt{(2R)^2 - (0.684R)^2} \quad \Rightarrow \quad AC = 1.88R$

$d)$ ΔODC *es isósceles* $\quad \therefore \quad 1m\angle OCD = 1m\angle ODC = 70°$

$e)$ $\Delta BOC = \Delta BOA$ *son isósceles*

$1m\angle AOC = 180° - 1m\angle 2 = 140°$ *por suplementarios*

$1m\angle BOC = \dfrac{360° - 1m\angle AOC}{2} = 110°$

$1m\angle OCB = 1m\angle OBC = 1m\angle 3 = 35°$

$1m\angle EDC = 90° - 1m\angle PCB = 1m\angle 4 = 35°$

$f)$ ΔEDC

$1m\angle DEC = 180° - 1m\angle 4 - 1m\angle ADC = 75°$

$\dfrac{Sen\ \angle DEC}{DC} = \dfrac{Sen\ \angle EDC}{EC} \quad \Rightarrow \quad EC = \dfrac{(Sen70°)(0.684R)}{Sen75°} \quad \Rightarrow \quad EC = 0.665R$

$g)$ *Area rayada*

$= Area\ del\ \Delta EDC$

$+ Area\ del\ segmento\ circular\ DSCKD$

$h)$ $A_{\Delta EDC} = A_1 = (0.5)(EC)(DC)Sen\ \angle 4$

$= (0.5)(0.665R)(0.684R)Sen35° \quad \Rightarrow \quad A_1 = 0.13R^2$

$i)$ $A_{SEGMEMENTO\ CIRCULAR}DSCKD = A_2$

$= (0.5)(OC)^2\left(\dfrac{(\pi)(1m\angle 2)}{180°} - Sen\angle 2\right)$

$A_2 = (0.5)(R)^2\left(\dfrac{(\pi)(40°)}{180°} - Sen40°\right) \quad \Rightarrow \quad A_2 = 0.03R^2$

$j) \quad A_{IIII} = A_1 + A_2 = 0.13R^2 + 0.03R^2 \qquad \Rightarrow \qquad A_{iiii} = 0.16R^2$

$k) \quad \Delta BPC\ rectángulo \qquad \therefore \qquad Tag\angle BCP = \frac{PB}{PC}$

$\Rightarrow \quad PB = (tag55°)(0.5)(1.88R) \qquad \Rightarrow \quad PB = 1.34R$

$l) \quad A_{\Delta ABC} = \frac{(AC)(PB)}{2} = \frac{(1.88R)(1.34R)}{2} \qquad \Rightarrow \qquad A_{\Delta ABC} = 1.26R^2$

$m) \quad \frac{A_{iiii}}{A_{\Delta ABC}} = \frac{0.16R^2}{1.26R^2}$

$$\boldsymbol{\frac{A_{iiii}}{A_{\Delta ABC}} = 0.127 \quad LQQD}$$

Ejercicio 6.18.

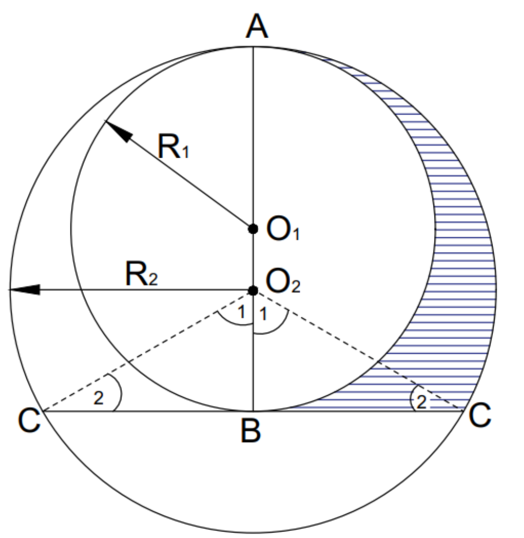
Calcular el área de la región rayada de la figura 6.18 conociendo que:

$H) \quad R_1 = 8cm$

$\quad\ R_2 = 12cm$

$T) \quad A_{iiii} = ?$

Figura 6.18



Solución:

$a)\quad O_1O_2 = R_2 - R_1 \qquad distancia\ entre\ centros$

$\Rightarrow \qquad O_1O_2 = 12cm - 8cm = 4cm$

$b)\quad O_1B = R_1 = O_1O_2 + O_2B$

$c)\quad O_2B = R_1 - O_1O_2 = 8cm - 4cm \qquad \Rightarrow \qquad O_2B = 4cm$

$d)\quad O_2C = O_2D = R_2$

$\Delta O_2BC = \Delta O_2BD\ rectángulos \qquad (L, A, L)$

$e)\quad O_2B = altura,\ mediana,\ bi\sec t\,riz,\ mediatriz,\ ceviana$

$$Sen\ \angle O_2CB = \frac{O_2B}{O_2C} = \frac{4cm}{12cm} = 0.333 \qquad \Rightarrow \qquad 1m\angle O_2CB$$

$$= 1m\angle 2 = 19.41\,°$$

$f)\quad 1m\angle 1 + 1m\angle 2 = 90\,° \qquad \therefore \qquad 1m\angle 1$

$$= 90\,° - 19.47\,° \qquad \Rightarrow \qquad 1m\angle 1 = 70.53\,°$$

$1m\angle CO_2D = 2m\angle 1 = 141.06\,°$

$Descomposición\ de\ la\ figura\ principal$

$g)\quad Area\ \Theta\ (O_2, R_2) - Area\ \Theta\ (O_1, R_1)$

$$- Area\ del\ seg.\ circular\ CBDEC = \frac{Area\ rayada}{2}$$

$h)\quad Area\ \Theta\ (O_2, R_2) = A_1$

$i)\quad Area\ \Theta\ (O_1, R_1) = A_2$

$j)\quad Area\ del\ segmento\ circular\ CBDEC = A_3$

$k)\quad \dfrac{Area\ rayada}{2} = A_{iiiii}$

$l)\quad A_{iiii} = A_1 - A_2 - A_3$

$A_1 = (\pi)(R_2)^2 = (\pi)(12cm)^2 \qquad \Rightarrow \qquad A_1 = 452.39cm^2$

$A_2 = (\pi)(R_1)^2 = (\pi)(8cm)^2 \qquad \Rightarrow \qquad A_2 = 201.06cm^2$

$$A_3 = (0.5)(R_2^2)\left(\frac{(\pi)(2m\angle 1)}{180\,°} - sen.\ \ 2m\angle 1\right)$$

$$A_3 = \ (0.5)(12cm)^2 \left(\frac{(\pi)(141.06°)}{180°} - sen.\ \ 141.06°\right)$$

$$\Rightarrow \qquad A_3 = 132.01cm^2$$

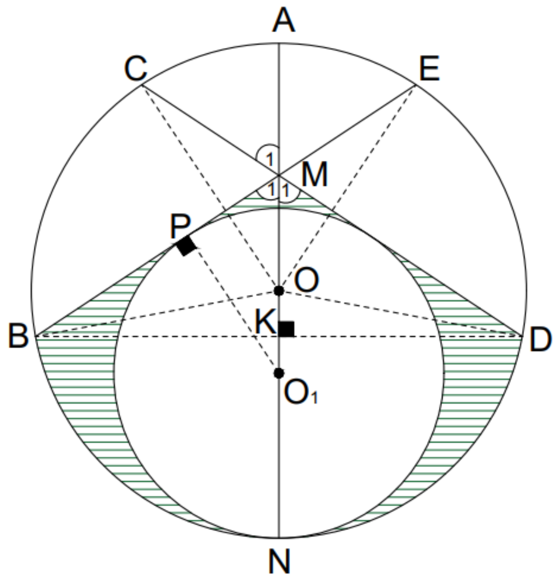
$$m) \quad A_{iiii} = \frac{(452.39 - 201.06 - 132.01)cm^2}{2}$$

$\boldsymbol{A_{iiiii} = 59.66cm^2 \quad LQQD}.$

Ejercicio 6.19.

Calcular el área rayada de la figura 6.19 en función del radio R.

Figura 6.19



$H) \quad AM = MO$

$$m\overset{\frown}{AC} = m\overset{\frown}{AE} = 20°$$

$T) \quad A_{iiii} = f(R)$

Solución:

$OE = OC = OB = OD = R$ $\quad$ *por construcción*

$O_1P = R_1$

$1m\angle COE = 40°$ $\quad$ *por hipótesis*

$b)$ $\quad \Delta OAE$ *isósceles*

$AE^2 = OE^2 + OA^2 - 2(OE)(EA)\cos\angle\ COE$

$AE = \sqrt{2R^2 - (2)(R)(R)\cos 2\,0°}$ $\quad : \quad AE$

$= 0.3473R$

$1m\angle OAE = 1m\angle OEA = 80°$ $\quad$ $por(b)$

$c)$ $\quad \Delta AME$

$EM^2 = AM + AE - 2(AM)(AE)\cos\angle MAE$ $\quad$ *ley del cos e no*

EM

$= \sqrt{(0.5R)^2 + (0.3473R)^2 - (2)(0.5R)(0.3473R)\cos 8\,0°}$ $\quad : \quad EM$

$= 0.557R$

$\dfrac{Sen\ \angle AME}{AE} = \dfrac{Sen\ \angle MAE}{EM}$ $\quad : \quad Sen\ \angle AME = Sen\ \angle 1$

$= \dfrac{(Sen\ 80°)(0.3473R)}{(0.557R)}$ $\quad \Rightarrow \quad 1m\angle 1$

$= 37.88°$

$1m\angle CME = 2m\angle 1$

$= \dfrac{\overset{\cap}{BD} + \overset{\cap}{CAE}}{2}$ $\quad$ *por ángulo int e rior en la* Θ

$(2)(2)(37.88°) = \overset{\cap}{BD} + 40°$ $\quad \Rightarrow \quad \overset{\cap}{BD} = 111.52°$

$= 1m\angle BOD$ $\quad$ *por ángulo central*

$d)$ $\quad \Delta MPO_1$ *rectángulo*

$Sen\ 37.88° = \dfrac{R_1}{[(0.5R.) + (R + R_1)]}$ $\quad \Rightarrow \quad R_1 = 0.570R$

$e)\quad \Delta OBD \quad isósceles$

$BD^2 = OB^2 + OD^2 - 2(OB)(OD)\cos\angle BOD$

$BD = \sqrt{2R^2 - 2R\cos 1\,11.52°} \qquad : \qquad BD = 1.653R$

$BD = 2BK = 2KD \qquad : \qquad BK = 0.826R$

$f)\quad \Delta BMK \quad rectángulo$

$Sen37.88° = \frac{0.826R}{MB} \qquad \Rightarrow \qquad MB = 1.345R$

$Descomposición\ parcial\ de\ regiones$

$A_1 = Area\ del\ \Delta BMD$

$A_2 = Area\ del\ segmento\ circular\ BKDNB$

$A_3 = Area\ del\ círculo\ de(O_1, R_1)$

$A_{iiii} = Area\ de\ las\ región\ rayada$

$g)\quad A_{iiii} = A_1 + A_2 - A_3$

$h)\quad A_1 = \frac{1}{2}(MB)(MD)Sen\ (2m\angle 1)$

$= \frac{1}{2}(1.345R)(1.345R)Sen75.76°$

$A_1 = 0.876R^2 \qquad (h`)$

$i)\quad A_2 = \frac{1}{2}R^2\left[\frac{(\pi)(1m\angle BOD)}{180°} - Sen\angle BOD\right]$

$= \frac{1}{2}R^2\left[\frac{(\pi)(111.52°)}{180°} - Sen111.52°\right] \qquad \Rightarrow \qquad A_2$

$= 0.508R^2 \qquad (i`)$

$j)\quad A_3 = (\pi)R_1^2 = (\pi)(0.570R)^2$

$A_3 = 1.0207R^2 \qquad (j`)$

$(h`)(i`)(j`)\ en\ (g)$

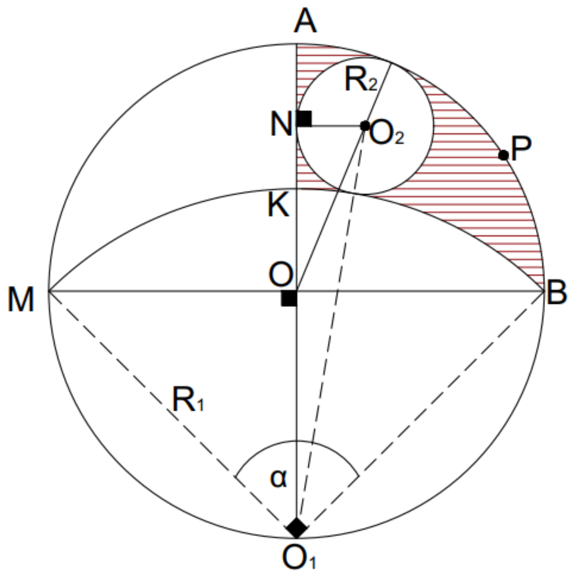
$g)\quad A_{iiii} = 0.876R^2 + 0.508R^2 - 1.0207R^2$

$\boldsymbol{A_{iiii} = 0.363R^2} \qquad \boldsymbol{LQQD}.$

Ejercicio 6.20.

Calcular el área rayada de la figura 6.20 en función del radio R.

Figura 6.20



$T)\quad A_{iii} =?\ f(R)$

Solución:

$a)\quad A_{iii} = A_{(Sector\ Circular\ OAPBO)} - A_{\left(\frac{Segmento\ Circular\ MKBOM}{2}\right)}$

$- A_{(Circulo\ (o_1,R_1))}$

$b)\quad A_1 = A_{(Sector\ Circular\ OAPBO)}$

$c)\quad A_2 = A_{\left(\frac{Segmento\ Circular\ MKBOM}{2}\right)}$

$d)\quad A_3 = A_{(Circulo\ (o_1,R_1))}$

$e)\quad A_{iii} = A_1 - A_2 - A_3$

ΔNO_2O rectángulo por construcción

$f)$ $NO^2 = O_2O^2 - NO_2$ por Pitágoras

$O_2O = R - R_2$

$NO_2 = R_2$

$NO_2^2 = (R - R_2)^2 - R^2 = R^2 - 2R_2R + R_2^2 - R^2 \quad \Rightarrow \quad NO_2 = \sqrt{R^2 - 2R_2R}$

ΔNO_1O_2 rectángulo por construcción

$g)$ $NO_1^2 = O_1O_2^2 - NO_2$

$NO_1 = NO + R$ por suma de segmentos

$O_1O_2 = R\sqrt{2} + R_2$

$h)$ $(\sqrt{R^2 - 2R_2R} + R)^2 = (R\sqrt{2} + R_2)^2 - R_2^2$

Desarrollando (h)

$i)$ $R^2 - 2RR_2 - 5.82R_2^2 = 0$

Desarrollando (i)

$j)$ $R_2 = 0.27R$

$k)$ $A_1 = A_{(Sector\ Circular\ OAPBO)} = \dfrac{(\pi)R^2}{4} \quad \Rightarrow \quad A_1 = 0.78R^2 \quad (k`)$

$l)$ $A_2 = A_{\left(\frac{Segmento\ Circular\ MKBOM}{2}\right)} = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{2}R_1^2\left(\dfrac{(\pi)(\alpha°)}{180°} - Sen\ \alpha°\right)\right]$

$= \dfrac{1}{4}\left[\dfrac{1}{2}(2R^2)\left(\dfrac{(\pi)(90°)}{180°}\right) - sen\ \ 90°\right]$

$A_2 = 0.285R^2 \quad (l`)$

$m)$ $A_3 = A_{(Circulo\ (o_1,R_1))} = (\pi)(R_2^2) = (\pi)(0.27R)^2$

$A_2 = 0.23R^2 \quad (m`)$

$(k`)(l`)(m`)$ en (e)

$A_{iii} = 0.78R^2 - 0.285R^2 - 0.23R^2$

$\boldsymbol{A_{iii} = 0.265R^2}$ ***LQQD***.

Referencias

Albuja G., y Vallejo P. (2011). *Geometría básica*.

Alva, F. (2000). *Geometría: teoría y práctica*. Editorial San Marcos.

Antonov, N., Vygodsky, M., Nikitin, V., y Sankin, A., (1976). *1000 problemas de aritmética, algebra, geometría y trigonometría*. Paraninfo.

Aucallanchi, F. (2000). *Problemas de geometría y cómo resolverlos*. RACSO Editores.

Bruño, G. M. (1978). *Geometría curso superior*.

Calvache, G., Rosero, T., Yacelga, M. (2011). *Geometría*.

Jurgensen, D. (1968). *Geometría moderna*. Publicaciones Cultural.

Manzano H. (2011).*Geometría*. (1a ed.) Editorial Copycenter.

Straeneo, L., Consorti, R. (s.f.). *Dibujo técnico mecánico.*

Ubaldo, L. (2005). *Geometría*. Editorial San Marcos.

La presente publicación, tiene por objetivo acercar al lector al cálculo y análisis de las diferentes figuras geométricas, siendo un instrumento imprescindible para el estudio del álgebra, trigonometría, cálculo, física, dibujo técnico, entre otras ciencias de la ingeniería. El libro está estructurado en seis capítulos, los cuales inician con los aspectos teóricos más importantes en la parte introductoria y luego describen la resolución de ejercicios de segmentos rectilíneos, ángulos, triángulos, polígonos, círculo y regiones rayadas, de tal manera que se optimice el tiempo de la resolución de aplicaciones de la geometría plana.

ISBN: 978-9942-616-32-6
9789942616326